Vol. 35 (2015)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

间隔序列与拟对称映射

娄曼丽
(广东技术师范学院计算机科学学院, 广东 广州 510665)

摘 要: 本文研究了欧式空间上拟对称映射的不变量问题, 利用定义集合间隔序列的方法, 获得了一个新的 d - 维拟对称映射的不变量, 深化了 Lipschitz 不变量研究中类似的结果.

关 键 词: 分形; 间隔序列; 拟对称映射
MR(2010) **主题分类号**: 28A80 **中 图 分 类 号**: O18
文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2015)03-0705-04

1 引言及主要结果

设 $f\colon X\to Y$ 为从度量空间 (X,ρ_X) 到度量空间 (Y,ρ_Y) 的映射. 称 f 为拟对称映射, 若存在从 $[0,\infty)$ 到 $[0,\infty)$ 上的同胚 η, 使得对于任意 $x,a,b\in X$, 有

$$\frac{\rho_Y(f(x),f(a))}{\rho_Y(f(x),f(b))}\le\eta\left(\frac{\rho_X(x,a)}{\rho_Y(x,b)}\right).$$

Tukia 和 Väisälä 在文献 [1] 中系统研究了一般度量空间上的拟对称映射. 因为拟对称映射与拟共形映射及加倍测度有密切的联系, 对其相关性质的研究一直是度量空间分析学的重要研究内容, 有关拟对称映射更详细的介绍及参考文献可以参看专著 [2].

拟对称映射研究的一个重要内容是研究那些在拟对称映射下不变的性质, 即拟对称不变量. 本文考虑从欧式空间 $\mathbb{R}^d$ 映到其自身上的拟对称同胚, 称之为 d - 维拟对称映射. 与双 Lipschitz 映射不同, 拟对称映射并不能保持集合的维数不变, 即分形维数并不是拟对称映射的不变量. 关于拟对称映射对维数的改变已有大量的研究结果, 参见文献 [3–8].

本文将利用集合的间隔序列给出 d - 维拟对称映射的一个不变量. 间隔序列的概念源于直线上的剪切集. 设 $A\in[a,b]$ 为 Lebesgue 零测度的非空紧集, 不妨设 $a,b\in A$. 由直线上开集的结构定理, $[a,b]\setminus A$ 可以写成至多可数个互不相交的开区间 U_1, U_2, $\cdots$ 的并. 因 A 可以看作区间 $[a,b]$ 去掉 U_1, U_2, $\cdots$, 故称 A 为剪切集, 详见文献 [9]. 将开区间 U_1, U_2, $\cdots$ 的长度按照从大到小的顺序排列, 得到的序列称为集合 A 的间隔序列. 例如, Cantor 三分集的间隔序列为

$$1/3,1/9,1/9,\cdots,\underbrace{3^{-k},\cdots,3^{-k}}_{2^k},\cdots.$$

*收稿日期: 2014-05-09 接收日期:2014-09-16
基 金 项 目: 国家自然科学基金资助 (11301092); 高等学校博士学科点专项科研基金资助 (20100172120027).
作者简介: 娄曼丽 (1979–), 女, 安徽宿州, 讲师, 主要研究方向: 分形几何.

饶辉等在文献 [10] 中将间隔序列的定义推广到一般度量空间中. 为了介绍他们的定义, 我们首先给出 δ - 连通分支的定义. 设 A 为度量空间 (X,ρ) 的子集, 若任给 $x,y\in A$ 都存在序列

$$x_0=x,x_1,\cdots,x_k=y\in A,$$

使得

$$\rho(x_i,x_{i+1})\le\delta,\quad 对任意\ 0\le i\le k-1,$$

则称 A 为 δ - 连通. 设 A 为 δ - 连通, 若任意真包含 A 的集合 B 都不是 δ - 连通的, 则称 A 为 X 的 δ - 连通分支. 固定集合 A, 记 $h(\delta)$ 为 A 的 δ - 连通分支的个数. 则 $h(\delta)$ 关于 δ 单调下降, 并且可以证明 $h(\delta)$ 是右连续的. 从而 h 的间断点至多可数, 按照从大到小的顺序设为 $\delta_1>\delta_2>\cdots$.

注 1 由序列 $\{\delta_k\}_{k\ge1}$ 的定义, 不难证明 $h(\delta_1)=1$, 及对任意 $k\ge1$, $h(\delta_{k+1}-0)>h(\delta_{k+1})=h(\delta_k-0)$.

记 $n_k=h(\delta_k-0)-h(\delta_k)$, 定义 A 的间隔序列为

$$\underbrace{\delta_1,\cdots,\delta_1}_{n_1},\underbrace{\delta_2,\cdots,\delta_2}_{n_2},\cdots,\underbrace{\delta_k,\cdots,\delta_k}_{n_k},\cdots.$$

注 2 设 A 的间隔序列为 $\{\alpha_k\}_{k\ge1}$. 由间隔序列的定义, 不难证明对任意 $k\ge1$ 有

$$h(\alpha_k)=1+\sum_{\substack{\delta>\alpha_k\\ \delta\ 为\ h\ 间断点}}(h(\delta-0)-h(\delta))\le k.$$

饶辉等 [10] 利用间隔序列给出了一个双 Lipschitz 映射的不变量. 类似于他们的结果, 我们在本文中也利用间隔序列给出一个拟对称映射的不变量. 设 $A,B\subset\mathbb{R}^d$, 称 A 和 B d - 维拟对称等价, 若存在从 $\mathbb{R}^d$ 到其自身的拟对称同胚 f, 满足

$$f(A)=\{f(x)\colon x\in A\}=B.$$

下面的定理给出了一个 d - 维拟对称映射的不变量, 是本文的主要结果.

定理 1.1 设 A,B 为 $\mathbb{R}^d$ 的紧子集, 完全不连通. 其间隔序列分别为 $\{\alpha_k\}_{k\ge1}$, $\{\beta_k\}_{k\ge1}$. 若 A 和 B d - 维拟对称等价, 则存在常数 $C>1$, 使得

$$C^{-1}\le\log\alpha_k/\log\beta_k\le C$$

对充分大的 k 成立.

定理 1.1 是文献 [10] 中结果的一个有趣的对偶. 文献 [10] 中证明, 若集合 A 和 B Lipschitz 等价, 则存在 $C>1$, 使得

$$C^{-1}\le\alpha_k/\beta_k\le C$$

对任意 $k\ge1$ 成立.

2 主要结果的证明

证 设 f 为从 $\mathbb{R}^d$ 到其自身的拟对称同胚, 且 $f(A)=B$. 则由文献 [2] 推论 11.5, f 限制在紧集 A 上是 Hölder 连续的, 即存在常数 $c,\gamma>0$, 使得对于任意 $x,y\in A$, 有

$$|f(x)-f(y)|\leq c\cdot|x-y|^{\gamma}. \tag{2.1}$$

固定 $k\geq 1$, 设 h_A 为表示集合 A 的 δ- 连通分支个数的函数. 设 A 的 α_k - 连通分支为 $A_1, A_2, \cdots, A_{h_A(\alpha_k)}$. 由注 2, $h_A(\alpha_k)\leq k$. 设 h_B 为表示集合 B 的 δ - 连通分支个数的函数. 由注 1, h_B 在区间 $[\beta_{k+1},\beta_k)$ 上恒等于常数, 且对任意 $\beta\in[\beta_{k+1},\beta_k)$,

$$h_B(\beta)=h_B(\beta_k-0)=1+\sum_{\substack{\delta>\beta\\ \delta\text{ 为 }h_B\text{ 间断点}}}(h_B(\delta-0)-h_B(\delta))\geq 1+k.$$

即 B 的 β - 连通分支的个数 $h_B(\beta)\geq k+1$. 设 B 的 β - 连通分支为 $B_1, B_2, \cdots, B_{h_B(\beta)}$. 现在考虑 $A_1, A_2, \cdots, A_{h_A(\alpha_k)}$ 在 f 映射下的象集. 因 $h_A(\alpha_k)\leq k<k+1\leq h_B(\beta)$, 必存在 A_i, 其象集 $f(A_i)$ 与至少两个 B_j 相交, 不妨设 $f(A_1)$ 与 $B_1, \cdots, B_l$ 相交, 与其余的 B_j 不交, 则

$$A_1=(A_1\cap f^{-1}(B_1))\cup\cdots\cup(A_1\cap f^{-1}(B_l)).$$

因 A_1 为 α_k - 连通分支, 必存在 j_1, j_2 使得

$$\mathrm{dist}(A_1\cap f^{-1}(B_{j_1}),A_1\cap f^{-1}(B_{j_2}))\leq\alpha_k.$$

从而存在

$$x\in A_1\cap f^{-1}(B_{j_1}),\quad y\in A_1\cap f^{-1}(B_{j_2})$$

使得 $|x-y|\leq\alpha_k$. 因 B_{j_1}, B_{j_2} 为 B 的 β - 连通分支, 结合式 (2.1), 我们有

$$\beta<\mathrm{dist}(B_{j_1},B_{j_2})\leq|f(x)-f(y)|\leq c|x-y|^{\gamma}\leq c\alpha_k^{\gamma}.$$

上面的推理对任意 $\beta\in[\beta_{k+1},\beta_k)$ 都成立, 故有 $\beta_k\leq c\alpha_k^{\gamma}$. 又因 A 和 B 完全不连通, 当 $k\to\infty$ 时, 间隔序列 α_k, β_k 都趋向于 0, 从而可得

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{\log\beta_k}{\log\alpha_k}>0.$$

由对称性, 同理可得 $\limsup\limits_{k\to\infty}\log\beta_k/\log\alpha_k<\infty$. 故定理 1.1 成立.

参 考 文 献

[1] Tukia P, Väisälä J. Quasisymmetric embeddings of metric spaces[J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math., 1980, 5(1): 97–114.

[2] Heinonen J. Lectures on analysis on metric spaces[M]. Universitext, New York: Springer-Verlag, 2001.

[3] Bishop C J. Quasiconformal mappings which increase dimension[J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 1999, 24(2): 397–407.

[4] Tyson J T. Sets of minimal Hausdorff dimension for quasiconformal maps[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2000, 128(11): 3361–3367.

[5] Kovalev L V. Conformal dimension does not assume values between zero and one[J]. Duke Math. J., 2006, 134(1): 1–13.

[6] Gehring F W. The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping[J]. Acta Math., 1973, 130: 265–277.

[7] Gehring F W, Väisälä J. Hausdorff dimension and quasiconformal mappings[J]. J. London Math. Soc. (2), 1973, 6: 504–512.

[8] Tukia P. Hausdorff dimension and quasisymmetric mappings[J]. Math. Scand., 1989, 65(1): 152–160.

[9] Besicovitch A S and Taylor S J. On the complementary intervals of a linear closed set of zero Lebesgue measure[J]. J. London Math. Soc., 1954, 29: 449–459.

[10] Rao H, Ruan H J, Yang Y M. Gap sequence, Lipschitz equivalence and box dimension of fractal sets[J]. Nonlinearity, 2008, 21(6): 1339–1347.

GAP SEQUENCE AND QUASISYMMETRIC MAPPING

LOU Man-Li

(*Dpt. of Comput. Sci., Guangdong Polytechnic Normal University, Guangzhou 510665, China*)

Abstract: In this paper we study the problem of invariants of quasisymmetric mappings on the Euclidean spaces. By making use of the definition of gap sequence of sets, we obtain a new invariant of d-dimensional quasisymmetric mapping. This result is a complement of a similar result on the study of Lipschitz invariants.

Keywords: fractals; gap sequence; quasisymmetric mapping

2010 MR Subject Classification: 28A80