

半无限规划离散化问题一个两阶段序列二次规划算法

徐庆娟^{1,2}, 简金宝³

(1. 上海大学数学系, 上海 200444)

(2. 广西师范学院数学科学学院, 广西南宁 530023)

(3. 玉林师范学院数学与信息科学学院, 广西玉林 537000)

摘要: 本文研究了求解半无限规划离散化问题 (P) 的一个新的算法. 利用序列二次规划 (SQP) 两阶段方法和约束指标集的修正技术, 提出了求解 (P) 的一个两阶段 SQP 算法. 算法结构简单, 搜索方向的计算成本较低. 在适当的条件下, 证明了算法具有全局收敛性. 数值试验结果表明算法是有效的. 推广了文献 [4] 中求解 (P) 的算法.

关键词: 半无限规划; 离散化问题; 两阶段; 序列二次规划; 全局收敛

MR(2010) 主题分类号: 90C34; 65K05 中图分类号: O221.2

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2014)06-1155-08

1 引言

本文研究如下形式的半无限规划离散化问题:

$$(P) \quad \min f(x) \text{ s.t. } x \in X = \{x \in R^n \mid g(x, t) \leq 0, \forall t \in T\}.$$

其中 $f: R^n \rightarrow R$ 连续可微, $g: R^n \times T \rightarrow R$ 关于变量 x 连续可微, T 为区间 $[a, b]$ 的有限离散子集, 其形式如下:

$$T = \{t \mid t = a + i \cdot \frac{b-a}{l}, i = 0, 1, 2, \dots, l\},$$

其中 l 为正整数 (视 $[a, b]$ 的长度而定, ≥ 100), 表示其离散水平. 半无限规划离散化问题在工程设计、优化控制和半无限规划算法设计 (作为子问题) 中具有重要应用, 如文献 [1-3]. 许多学者对此作了研究, 如文献 [4-10].

基于标准非线性规划中经典的序列二次规划 (SQP) 算法, Panier 和 Tits 在文献 [4] 中对问题 (P) 构建了一个二次规划 (QP) 子问题, 对其约束指标集进行了修正, 线搜索采用两阶段方法^[11], 算法结构简单, 在一定条件下可证明算法具有全局收敛性. 然而, 该 QP 子问题目标函数中不含有二阶导数逼近信息, 算法达不到超线性收敛. 为进一步向超线性收敛分析靠拢, 本文对文 [4] 中求解问题 (P) 的算法进行改进: 在 QP 子问题目标函数中引进 Lagrange 函数 Hesse 阵的正定近似阵 H_k ; 约束指标集修正技术中进一步包含 H_k 的校正信息^[5]; 线搜索构建中包含 H_k 信息. 改进后, 从另一角度论证算法的全局收敛性.

*收稿日期: 2013-10-10 接收日期: 2014-04-10

基金项目: 国家自然科学基金 (11271086) 和广西自然科学基金 (2014GXNSFBA118002) 资助.

作者简介: 徐庆娟 (1979-), 女, 山东成武, 副教授, 主要研究方向: 最优化理论与方法.

通讯作者: 简金宝

2 算法的描述

对于任意的 $x \in R^n$, 本节使用如下记号:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \max\{0, g(x, t), t \in T\}, \\ T_0(x) &= \{t \in T \mid g(x, t) = \varphi(x)\}, T_0^+(x) = \{t \in T \mid g(x, t) = \varphi(x), \varphi(x) > 0\}.\end{aligned}$$

无特殊说明, 以下假设均成立.

假设 2.1 函数 $f: R^n \rightarrow R$ 与 $g(\cdot, t): R^n \times T \rightarrow R$ 均一阶连续可微.

设 $x^k \in R^n, T_k \subseteq T$, 定义 $\varphi_k = \max\{0, g(x^k, t), t \in T_k\}, \phi(x^k) = \max_{t \in T_k} g(x^k, t)$. 如果 $T_0(x^k) \subseteq T_k \subseteq T$, 则 $\varphi_k = \varphi(x^k)$. 为计算搜索方向, 考虑如下 QP 子问题

$$\begin{aligned}\text{QP}(x^k, H_k, T_k) \quad & \min \quad z + \frac{1}{2}d^T H_k d, \\ & \text{s.t.} \quad \nabla f(x^k)^T d \leq z + \gamma \varphi_k, \\ & \quad g(x^k, t) + \nabla_x g(x^k, t)^T d \leq z + \varphi_k, \quad t \in T_k,\end{aligned} \quad (2.1)$$

其中 γ 为正常数, H_k 对称正定.

引理 2.1 若 $x^k \in R^n$, 则问题 (2.1) 有唯一最优解, 且等价于其 KKT 点.

参考文献 [7, 引理 2.1] 可完成引理 2.1 的证明. 其中有关特殊 QP 子问题解的唯一性证明见文献 [12]. 为方便起见, 记 (d^k, z_k) 为问题 (2.1) 的唯一最优解, 亦即 KKT 点, 则存在乘子 μ_k 与 $u^k = (u_t^k, t \in T_k)$ 使得

$$\begin{cases} H_k d^k + \mu_k \nabla f(x^k) + \sum_{t \in T_k} u_t^k \nabla_x g(x^k, t) = 0, & (2.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_k + \sum_{t \in T_k} u_t^k = 1, & (2.3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq \mu_k \perp (z_k + \gamma \varphi_k - \nabla f(x^k)^T d^k) \geq 0, & (2.4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq u_t^k \perp (z_k + \varphi_k - g(x^k, t) - \nabla_x g(x^k, t)^T d^k) \geq 0, t \in T_k, & (2.5) \end{cases}$$

其中 $x \perp y$ 表示 $x^T y = 0$.

假设 2.2 对任意 $x \in R^n$, Mangasarian-Fromovitz 约束规格 (简称 MFCQ) 成立, 即存在向量 $d \in R^n$ 使得 $\nabla_x g(x, t)^T d < 0$ 对于所有 $t \in T_0(x)$ 成立.

引理 2.2 假设 $T_k \subseteq T$ 使得 $T_0(x^k) \subseteq T_k$. 则 (i) $v^k \triangleq -(z_k + \frac{1}{2}(d^k)^T H_k d^k) \geq 0$, $z_k + (d^k)^T H_k d^k \leq 0$, $z_k \leq 0$; (ii) $z_k = 0 \Leftrightarrow d^k = 0 \Leftrightarrow x^k$ 是问题 (P) 的 KKT 点.

证 (i) 由 $(0, 0)^T$ 是问题 (2.1) 的可行解, 易知 $v^k \geq 0$. 由 KKT 条件 (2.2)–(2.5) 推导可知

$$\begin{aligned}(d^k)^T H_k d^k &= -\mu_k \nabla f(x^k)^T d^k - \sum_{t \in T_k} u_t^k \nabla_x g(x^k, t)^T d^k \\ &= -\mu_k z_k - \mu_k \gamma \varphi_k - \sum_{t \in T_k} u_t^k (z_k + \varphi_k - g(x^k, t)) \\ &= -z_k (1 - \sum_{t \in T_k} u_t^k) - \mu_k \gamma \varphi_k - \sum_{t \in T_k} u_t^k z_k + \sum_{t \in T_k} u_t^k (g(x^k, t) - \varphi_k) \\ &= -z_k - \mu_k \gamma \varphi_k + \sum_{t \in T_k} u_t^k (g(x^k, t) - \varphi_k) \\ &\leq -z_k,\end{aligned}$$

进而 $z_k \leq 0$.

(ii) 如果 x^k 是问题 (P) 的 KKT 点, 则存在乘子 $\lambda^k = (\lambda_t^k, t \in T)$ 使得

$$\nabla f(x^k) + \sum_{t \in T} \lambda_t^k \nabla_x g(x^k, t) = 0, \quad 0 \leq \lambda_t^k \perp g(x^k, t) \leq 0, \quad t \in T. \quad (2.6)$$

参考文 [7] 引理 2.2(ii) 可完成此结论证明.

算法 A

初始步 参数 $\alpha \in (0, \frac{1}{2}), \beta \in (0, 1), \gamma > 0, 0 < \varrho \ll 1$. 矩阵 $H_0 \in R^{n \times n}$ 对称正定, 指标集 $T_0 = T_0(x^0) \cup \{a\} \cup \{b\}$. 初始点 $x^0 \in R^n$, 令 $k := 0$.

步骤 1 求解 QP 子问题 (2.1) 得到 KKT 点 (d^k, z_k) , 乘子为 $(u_{T_k}^k, \mu_k)$. 如果 $z_k = 0$, 则 x^k 是问题 (P) 的一个 KKT 点, 停止. 否则, 进入步骤 2.

步骤 2 如果 $\varphi(x^k) > 0$ (阶段 I), 令 λ_k 为序列 $\{1, \beta, \beta^2, \dots\}$ 第一个满足式 (2.7) 或 (2.8) 的 λ 值.

$$\phi(x^k + \lambda d^k) - \phi(x^k) \leq -\alpha \lambda (d^k)^T H_k d^k, \quad (2.7)$$

$$\phi(x^k + \lambda d^k) \leq 0. \quad (2.8)$$

如果 $\varphi(x^k) = 0$ (阶段 II), 令 λ_k 为序列 $\{1, \beta, \beta^2, \dots\}$ 第一个满足下面不等式组的 λ 值:

$$\begin{cases} f(x^k + \lambda d^k) - f(x^k) \leq -\alpha \lambda (d^k)^T H_k d^k, \\ \phi(x^k + \lambda d^k) \leq 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

$$(2.10)$$

步骤 3 (i) 令 $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k$.

(ii) 选取 $T_{k+1} \supseteq T_0(x^{k+1}) \cup T_k^b$, 其中 $T_k^b = \{t \in T_k | u_t^k > 0\}$. 如果 $\lambda_k < 1$ 且 $\varphi(x^k) > 0$, 则 $T_{k+1} := T_{k+1} \cup T_0^+(x^{k+1})$, 其中 $\bar{x}^{k+1} = x^k + \frac{\lambda_k}{\beta} d^k$.

(iii) 如果 $\lambda_k \leq \varrho$, 且存在指标 $\bar{t}_k \in T_0^+(x^{k+1}) \setminus T_k$, 则 $H_{k+1} = H_k$. 否则计算一个新的对称正定阵 H_{k+1} .

(iv) 令 $k := k + 1$ 返回步骤 1.

引理 2.3 对于充分小的正数 λ , 式 (2.7)/(2.8), (2.9)-(2.10) 恒成立, 从而步骤 2 中的线搜索可以执行, 算法 A 是适定的.

证 由 $\phi(x^k)$ 的定义, 函数 g 与 f 在迭代点 $x^k + \lambda d^k$ 的泰勒展开, 问题 (2.1) 的约束条件及引理 2.2 可完成本引理的证明.

3 算法的全局收敛性

本节讨论算法 A 的全局收敛性, 为此需进一步假设:

假设 3.3 算法 A 产生的点列 $\{x^k\}$ 有界.

假设 3.4 矩阵序列 $\{H_k\}$ 一致正定, 即存在两个正整数 a 和 b , 使得 $a \|d\|^2 \leq d^T H_k d \leq b \|d\|^2, \forall d \in R^n, \forall k$.

引理 3.4 序列 $\{d^k\}, \{z_k\}$ 均有界, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k d^k = 0$.

证 由引理 2.2(i) 的结论, 式 (2.4) 及假设 2.1, 2.2, 3.3 及 3.4 可推得 $\{d^k\}$ 有界, 进而易证 $\{z_k\}$ 有界. 为证 $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k d^k = 0$, 下面分两种情形进行论证.

情形 I 如果 $\varphi(x^k) = 0$. 由式 (2.9) 和假设 3.4, 得

$$f(x^{k+1}) - f(x^k) \leq -\alpha\lambda_k(d^k)^T H_k d^k \leq -\alpha\lambda_k a \|d^k\|^2 \leq 0.$$

由假设 3.3 知, $\{f(x^k)\}$ 单调递减且有界, 故收敛. 进而由上式得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k d^k = 0$.

情形 II 如果 $\varphi(x^k) > 0$. 若线搜索 (2.7) 被满足, 则

$$\phi(x^k + \lambda d^k) - \phi(x^k) \leq -\alpha\lambda_k(d^k)^T H_k d^k \leq -\alpha\lambda_k a \|d^k\|^2 \leq 0,$$

故 $\{\phi(x^k)\}$ 单调有界故收敛, 从而 $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k d^k = 0$. 若线搜索 (2.8) 被满足, 则 $\phi(x^{k+1}) \leq 0$, 从而 $\varphi(x^{k+1}) = 0$. 故第 $k + 1$ 次迭代线搜索进入阶段 I, 分析同上情形 I. 证毕.

引理 3.5 乘子序列 $\{\mu_k\}$ 和 $\{u^k\}$ 有界.

证 参考文 [7] 引理 3.2 可完成此引理证明.

引理 3.6 (i) $d^k \xrightarrow{k \in K} 0 \Leftrightarrow z_k \xrightarrow{k \in K} 0$; (ii) $(d^k, z_k) \xrightarrow{k \in K} (0, 0) \Leftrightarrow v^k \xrightarrow{k \in K} 0$; (iii) 如果 $d^k \xrightarrow{k \in K} 0$, 则 $\{x^k\}_K$ 的任意聚点都是问题 (P) 的 KKT 点. 进而给定 $\{x^k\}_K$ 的聚点 x^* , 则存在无限指标集 $K' \subseteq K$ 使得 $\{(x^k, u^k/\mu_k)\}_{K'}$ 收敛到 KKT 点对 (x^*, ξ^*) , 且 $\lim_{k \in K'} \mu_k = \mu_* > 0$.

证 (i) 由引理 2.2(i) 及假设 3.4, 有 $0 \leq a \|d^k\|^2 \leq (d^k)^T H_k d^k \leq -z_k$. 若 $z_k \xrightarrow{k \in K} 0$, 则 $d^k \xrightarrow{k \in K} 0$. 反之, 若 $d^k \xrightarrow{k \in K} 0$, 往证 $z_k \xrightarrow{k \in K} 0$. 如果 $\varphi(x^k) = 0$, 则 $\varphi_k = 0$. 由 $\nabla f(x^k)^T d^k \leq z_k + \gamma\varphi_k$ 及 $z_k \leq 0$ (见引理 2.2(i)), 易证当 $d^k \xrightarrow{k \in K} 0$ 时, $z_k \xrightarrow{k \in K} 0$ 成立. 如果 $\varphi(x^k) > 0$, 由 $T_0(x^k) \subseteq T_k$ 可推得存在 $t_0 \in T_k$ 使得 $g(x^k, t_0) = \varphi_k$, 从而 $0 \geq z_k \geq \nabla_x g(x^k, t_0)^T d^k$. 显然, 若 $d^k \xrightarrow{k \in K} 0$, 则 $z_k \xrightarrow{k \in K} 0$.

(ii) 如果 $(d^k, z_k) \xrightarrow{k \in K} (0, 0)$, 由 v^k 的定义知 $v^k \xrightarrow{k \in K} 0$. 反之, 由引理 2.2(i) 可得

$$v^k \geq -\frac{1}{2}(d^k)^T H_k d^k + (d^k)^T H_k d^k \geq \frac{1}{2}a \|d^k\|^2 \geq 0.$$

显然, 若 $v^k \xrightarrow{k \in K} 0$, 则 $d^k \xrightarrow{k \in K} 0$. 进而由结论 (i) 知 $z_k \xrightarrow{k \in K} 0$, 于是 $(d^k, z_k) \xrightarrow{k \in K} (0, 0)$.

(iii) 设 x^* 是迭代点列 $\{x^k\}_K$ 任意给定的聚点. 记

$$L_0(x^k) = \{t \in T_k \mid g(x^k, t) + \nabla_x g(x^k, t)^T d^k = z_k + \varphi_k\}. \tag{3.1}$$

考虑到 T_k 与 $L_0(x^k)$ 是有限集 T 的子集, 以及引理 3.4 和 3.5, 不妨设存在无限子集 $K' \subseteq K$, 使得

$$(x^k, H_k, \eta_k, \varphi_k, \mu_k, u^k) \xrightarrow{k \in K'} (x^*, H_*, \eta_*, \varphi(x^*), \mu_*, u^*), T_k \equiv \hat{T}, L_0(x^k) \equiv L_0, \forall k \in K'.$$

因 $d^k \xrightarrow{k \in K'} 0$, 由结论 (i) 知 $z_k \xrightarrow{k \in K'} 0$, 根据 (3.1) 式可得 $L_0 \subseteq T_0(x^*)$. 进而对 KKT 条件 (2.2)–(2.5) 在 $k \in K'$ 中取极限, 得

$$\begin{cases} \mu_* \nabla f(x^*) + \sum_{t \in L_0} u_t^* \nabla_x g(x^*, t) = 0, & (3.2) \\ \varphi_* - g(x^*, t) = 0, t \in L_0, & (3.3) \\ \mu_* + \sum_{t \in L_0} u_t^* = 1, \mu_* \gamma \varphi(x^*) = 0, \mu_* \geq 0, u_t^* \geq 0, t \in \hat{T}. & (3.4) \end{cases}$$

由 (3.4) 式知 $(\mu_*, u^*) \neq 0$. 由 (3.2) 式和假设 2.2 (在 x^* 处) 可证得 $\mu_* > 0$. 进而由 (3.4) 式知 $\varphi(x^*) = 0$, 从而 $x^* \in X$. 令 $u_t^* = 0, t \in T_q \setminus \hat{T}$, 从 (3.2)–(3.4) 式可知 x^* 是问题 (P) 的 KKT 点, 乘子 $\{u^k/\mu_k, k \in K'\}$ 收敛到乘子 $\xi^* \triangleq u^*/\mu_*$, 且 $\lim_{k \in K'} \mu_k = \mu_* > 0$. 证毕.

引理 3.7 如果存在无穷迭代指标集 K 使得

$$(x^k, H_k, d^k, z_k) \xrightarrow{k \in K} (x^*, H_*, d^*, z_*), T_k \equiv T_*, \forall k \in K, \quad (3.5)$$

则 (d^*, z_*) 是问题 $\text{QP}(x^*, H_*, T_*)$ 的唯一最优解.

证 根据乘子 $\{(\mu_k, u^k)\}_K$ 的有界性, 在 K 的一个子列中对 KKT 条件 (2.2)–(2.5) 取极限, 结合引理 2.1 可证.

引理 3.8 如果无穷迭代指标集 K 满足 (3.5) 式, 且 $d^* \neq 0$. 则存在 $\underline{\lambda} > 0$, 使得式 (2.7) 和 (2.9), 以及当 $\varphi(x^k) = 0$ 时,

$$g(x^k + \lambda d^k, t) \leq 0, t \in T_* \quad (3.6)$$

对所有 $\lambda \in [0, \underline{\lambda}]$ 和充分大的 $k \in K$ 成立.

证 由于 $\lim_{k \in K} d^k = d^* \neq 0$ 及 $d^k \neq 0$, 存在 $\delta_0 > 0$, 使得 $\|d^k\| \geq \delta_0, \forall k \in K$. 由引理 2.2(i) 和假设 3.4 知

$$z_k \leq -(d^k)^T H_k d^k \leq -a\|d^k\|^2 \leq -a\delta_0^2, k \in K. \quad (3.7)$$

分析 (2.7): 注意到当 $\varphi(x^k) > 0$ 时, $\phi(x^k) = \varphi(x^k) = \varphi_k$. 利用 $\{(x^k, d^k)\}$ 的有界性, 泰勒展开, (2.5) 式及假设 3.4 可知

$$\begin{aligned} & \phi(x^k + \lambda d^k) - \phi(x^k) + \alpha\lambda(d^k)^T H_k d^k \\ &= \max\{g(x^k + \lambda d^k, t), t \in T_k\} - \phi(x^k) + \alpha\lambda(d^k)^T H_k d^k \\ &= \max\{g(x^k, t) + \lambda\nabla_x g(x^k, t)^T d^k, t \in T_k\} - \phi(x^k) + \alpha\lambda(d^k)^T H_k d^k + o(\lambda) \\ &\leq \max\{g(x^k, t) + \lambda(z_k + \varphi_k - g(x^k, t)), t \in T_k\} - \phi(x^k) + \alpha\lambda(d^k)^T H_k d^k + o(\lambda) \\ &\leq (1 - \lambda)\max\{g(x^k, t), t \in T_k\} + \lambda(z_k + \varphi_k) - \phi(x^k) - \alpha\lambda z_k + o(\lambda) \\ &= (1 - \lambda)\phi(x^k) + \lambda(z_k + \varphi_k) - \phi(x^k) - \alpha\lambda z_k + o(\lambda) \\ &= (1 - \alpha)\lambda z_k + o(\lambda) \\ &\leq (1 - \alpha)\lambda a\delta_0^2 + o(\lambda) \leq 0, \end{aligned}$$

对 $k \in K$ 和充分小的 $\lambda > 0$ 成立.

分析 (2.9): 注意到, 此时 $\varphi(x^k) = 0$, 即 $\varphi_k = 0$. 由 $\{(x^k, d^k)\}$ 的有界性, 利用泰勒展开, 引理 2.2(i) 及假设 3.4 可知, 对 $k \in K$ 和充分小的 $\lambda > 0$, 有

$$\begin{aligned} & f(x^k + \lambda d^k) - f(x^k) + \alpha\lambda(d^k)^T H_k d^k \\ &= t\nabla f(x^k)^T d^k + \alpha\lambda(d^k)^T H_k d^k + o(\lambda) \\ &\leq \lambda(z_k + \gamma\varphi_k) - \alpha\lambda z_k + o(\lambda) \\ &\leq (1 - \alpha)\lambda z_k + o(\lambda) \\ &\leq -(1 - \alpha)\lambda a\delta_0^2 \leq 0. \end{aligned}$$

同理, 可分析 (3.6) 式成立. 综上所述, 存在 $\underline{\lambda} > 0$ 使得式 (2.7) 和 (2.9) 及 (3.6) 对所有 $\lambda \in [0, \underline{\lambda}]$ 和充分大的 $k \in K$ 成立. 证毕.

引理 3.9 $\liminf_k v^k = 0$.

证 反证法. 假设 $v^* \triangleq \liminf_k v^k > 0$. 由引理 3.4 和 3.5, 假设 2.1, 3.3 和 3.4, 不失一般性, 假设存在无限子集 K 使得

$$\begin{aligned} (x^k, d^k, z_k, \varphi_k, H_k, v^k; d^{k+1}, z_{k+1}, v^{k+1}) &\xrightarrow{K} (x^*, d^*, z_*, \varphi_*, H_*, v^*; d_+, z_+, v_+^*), \\ T_k &\equiv \hat{T}, T_k^b \equiv \hat{T}^b, T_{k+1} \equiv \hat{T}_+, \forall k \in K. \end{aligned}$$

由 T_k^b 的定义知 $T_k^b \subseteq T_k$, 结合 KKT 条件 (2.2)–(2.5) 可知, $\text{QP}(x^k, H_k, T_k)$ 的解 (d^k, z_k) 也是 $\text{QP}(x^k, H_k, T_k^b)$ 的 KKT 点. 进一步由引理 2.1 解的唯一性和引理 3.7 可得, (d^*, z_*) 是 $\text{QP}(x^*, H_*, \hat{T}^b)$ 的唯一解.

由 $v^k \xrightarrow{K} v^* > 0$, 引理 2.2(i) 及 $z_k \leq 0$ 可知, $d^* \neq 0, z_* < 0$. 根据引理 3.4(ii) 及 $d^* \neq 0$, 有 $\lambda_k \xrightarrow{k \in K} 0$. 不失一般性, 假设对所有的 $k \in K$, 有 $\lambda_k < \beta \min\{\varrho, \underline{\lambda}\}$, 其中 ϱ, β 见算法 A, $\underline{\lambda}$ 见引理 3.8. $\lambda_k < \varrho < 1$ 说明算法 A 步骤 2 中的线搜索在点 $\bar{x}^{k+1} = x^k + \frac{\lambda_k}{\beta} d^k$ 不能完全满足. 又 $d^* \neq 0$, 由引理 3.8 可知 (2.7) 和 (2.9) 式在点 \bar{x}^{k+1} 对充分大的 $k \in K$ 总成立. 因此, 对充分大的 $k \in K$, 线搜索 (2.10) 在点 \bar{x}^{k+1} 被违背. 不失一般性, 不妨设存在指标 $\bar{t}_k \in T_0^+(\bar{x}_{k+1})$, 使得 $g(\bar{x}^{k+1}, \bar{t}_k) > 0, \bar{t}_k \equiv \bar{t}, \forall k \in K$.

注意到 $d^* \neq 0$ 和 $\lambda_k/\beta < \underline{\lambda}$, 由引理 3.8 知 $\bar{t} \notin \hat{T} \supseteq \hat{T}^b$. 又 $\lambda_k < \varrho \ll 1$, 由算法步骤 3(iii) 得 $H_{k+1} = H_k$. 因此 (d^{k+1}, z_{k+1}) 是 $\text{QP}(x^{k+1}, H_k, T_{k+1})$ 的解. 由算法步骤 3(ii) 知, $\hat{T}_+ \supseteq \hat{T}^b \cup \{\bar{t}\} \supset \hat{T}^b$. 由引理 3.4(ii), 可知 $x^{k+1} \xrightarrow{K} x^*$, 易推得 (d_+, z_+^*) 是 $\text{QP}(x^*, H_*, \hat{T}_+)$ 的最优解. 既然 $g(\bar{x}^{k+1}, \bar{t}) > 0$ 和 $g(x^{k+1}, \bar{t}) \leq 0$, 由泰勒展开可得

$$0 < g(\bar{x}^{k+1}, \bar{t}) - g(x^{k+1}, \bar{t}) = \lambda_k \left(\frac{1}{\beta} - 1 \right) \nabla_x g(x^k, \bar{t})^T d^k + o(\lambda_k), k \in K.$$

考虑到 $\beta \in (0, 1)$ 和 $\lambda_k > 0$, 不等式两边同除以 λ_k , 在 $k \in K$ 中取极限可得, $\nabla_x g(x^*, \bar{t})^T d^* \geq 0$. 由引理 3.4(ii) 知 $(x^{k+1}, \bar{x}^{k+1}) \xrightarrow{k \in K} (x^*, x^*)$. 注意到 $\lambda_k \xrightarrow{k \in K} 0$, 对 $g(\bar{x}^{k+1}, \bar{t}) > 0$ 和 $g(x^{k+1}, \bar{t}) \leq 0$ 分别取极限可得 $g(x^*, \bar{t}) = 0$. 又 $z_* < 0, \varphi(x^*) = 0$, 故 (d^*, z_*) 对 $\text{QP}(x^*, H_*, \hat{T}_+)$ 是不可行的. 又知 (d^*, z_*) 和 (d_+, z_+^*) 分别是 $\text{QP}(x^*, H_*, \hat{T}^b)$ 和 $\text{QP}(x^*, H_*, \hat{T}_+)$ 的最优解, $\hat{T}^b \subset \hat{T}_+$, 由引理 2.1(i) 及 v^k 的定义可知 $v_+^* < v^*$, 这与 $v^* = \liminf_k v^k$ 及 $v^{k+1} \xrightarrow{k \in K} v_+^*$ 矛盾. 证毕.

定理 3.1 存在 $\{x^k\}$ 的聚点 x^* 是问题 $\text{SIP}_q(\text{P})$ 的 KKT 点. 称算法 A 具有弱全局收敛性.

证 由引理 3.9 知 $\liminf_k v^k = 0$, 从而存在 K 使得 $v^k \xrightarrow{K} 0$, 进而由引理 3.6(ii) 有 $d^k \xrightarrow{K} 0$, 于是由引理 3.6(iii) 知 $\{x^k\}_K$ 的任意聚点都是问题 (P) 的 KKT 点. 证毕.

4 数值试验

本节利用文献 [13] 中的算例 oet_1, oet_2, oet_3, het_z 及文献 [14] 中的 cw_2, cw_3 及 cw_5 来验证算法 A 的数值效果. 数值代码由 MATLAB 2009A 编写执行. 在测试中, 取 $l = 100$, 故 $|T| = 101$. 置初始阵 H_0 为单位阵, H_k 的修正公式见文献 [16] 中的 BFGS 公式.

算法中的各参数设置为: $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.6$, $\gamma = 2$, $\rho = 10^{-3}$. 算法终止准则为 $\|d^k\| \leq 10^{-4}$ 或 $|z_k| \leq 10^{-4}$. 表 4.1 中 Ni 表示算法的迭代次数 (若初始点不可行, 则该行前面一个加数表示可行域外的迭代次数, 后面一个加数表示可行域内的迭代次数); x^* 和 $f(x^*)$ 为算法终止时的 T_k 中的近似最优解及其目标函数值; **objective** 表示文献 [15] 中相应问题的最优目标值. 数值试验结果表明算法 A 是有效的.

表 4.1: 算法 A 的数值结果

Prob	x^0	Ni	x^*	z_k	$f(x^*)$	objective
oet_1	(1,1,6)	7+5	(0.1925,0.4163,0.5381)	-5.2191e-10	0.53819574	0.5381957
oet_2	(1,-1,1)	3+4	(1.0528,-1.1941,0.0871)	-6.5816e-06	0.08717180	0.08715336
oet_3	(1,1,1,3)	4+8	(-0.0045,1.0840,-0.2335,0.0045)	-7.7227e-09	0.00450484	0.00450481
cw_2	(-1,-2)	4	(-0.7571,-0.61803)	-2.5260e-06	0.19448342	0.19447
cw_3	(-1,-1.5,2)	5	(-0.2133,-1.3603,1.8543)	-2.1218e-05	5.33474335	5.33469
cw_5-3	(1,1,1)	4	(1.0064,-0.1254,-0.3810)	-1.5648e-006	4.30115788	4.30118
het_z	(0,1.5)	1	(0.0000,1.0001)	-3.3326e-005	1.00009998	1

参 考 文 献

- [1] Hettich R, Kortanek K O. Semi-infinite programming: theory, methods, and applications[J]. SIAM Rev., 1993, 35(3): 380-429.
- [2] Lopez M, Still G. Invited review semi-infinite programming[J]. Eur. J. Oper. Res., 2007, 180(2): 491-518.
- [3] Zhang L P, Fang S C, Wu S Y. An entropy based central cutting plane algorithm for convex min-max semi-infinite programming problems[J]. Sci. China Math., 2013, 56(1): 201-211.
- [4] Panier E R, Tits A L. A globally convergent algorithm with adaptively refined discretization for semi-infinite optimization problems arising in engineer design[J]. IEEE T. Automat. Contr., 1989, 34(8): 903-908.
- [5] Zhou J L, Tits A L. An SQP algorithm for finely discretized continuous minimaxing problems and other minimax problems with many objective functions[J]. SIAM J. Optimiz., 1996, 6: 461-487.
- [6] Lawrence C T, Tits A L. Feasible sequential quadratic programming for finely discretized problems from SIP[C]. Remtsen Rembert, Ruckmann J J. Semi-Infinite Programming, Boston: Kluwer Academic Publisher, 1998.
- [7] Jian J B, Xu Q J, Han D L. A norm-relaxed method of feasible directions for finely discretized problems from semi-infinite programming[J]. Eur. J. Oper. Res., 2008, 186(1): 41-62.
- [8] 徐庆娟, 简金宝. 半无限规划离散化问题一个强次可行模松弛 SQP 算法 [J]. 系统科学与数学, 2013, 33(4): 419-429.
- [9] Tong X J, Ling C, Wu S Y, Qi L Q. Semi-infinite programming method for optimal power flow with transient stability and variable clearing time of faults[J]. J. Global Optim., 2013, 55(4): 813-830.
- [10] Xu Q J, Jian J B. A nonlinear norm-relaxed method for finely discretized semi-infinite optimization problems[J]. Nonlinear Dynam., 2013, 73(1-2): 85-92.
- [11] Polak E, Trahan R, Mayne D Q. Combined phase I- phase II methods of feasible directions[J]. Math. Program., 1979, 17(1): 61-73.
- [12] Jian J B, Ma P F, Xu Q J. Properties of optimal solutions for a special kind of quadratic programming[J]. J. Math., 2013, 33(1): 15-19.

- [13] Oettershagen K. Ein superlinear konvergenter Algorithmus zur Lösung semi-infiniten Optimierungprobleme[D]. Bonn: Universität Bonn, 1982.
- [14] Coope I D, Watson G A. A projected lagrangian algorithm for semi-infinite programming[J]. Math. Prog., 1985, 32(3): 337–356.
- [15] 谭英谊. 半无限非线性规划的杂交化方法的研究 [D]. 北京: 中国科学院, 2000.
- [16] Powell M J D. A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations[R]. Matson G A (ed), Numerical Analysis, Berlin: Springer-Verlag, 1978, 630: 144–157.

A TWO PHASE SQP ALGORITHM FOR THE DISCRETIZED PROBLEMS FROM SEMI-INFINITE PROGRAMMING

XU Qing-juan^{1,2}, JIAN Jin-bao³

(1. Department of Math. Science, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

(2. College of Math. Science, Guangxi Teachers Education University, Nanning 530023, China)

(3. College of Math. and Infor. Science, Yulin Normal University, Yulin 537000, China)

Abstract: In this paper, we study a new algorithm for the discretized problem (P) from semi-infinite programming. Using sequential quadratic programming (SQP), two phase method and the technique of updating constraint index set, we present a new two phase SQP algorithm. The structure is simple, and the computation cost of search direction is low. Under some proper conditions, the global convergence is proved. Numerical experiments results show that the proposed algorithm is effective.

Keywords: semi-infinite programming; discretized problems; two phase; SQP; global convergence

2010 MR Subject Classification: 90C34; 65K05