Vol. 34 (2014)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

单位球中完备超曲面的一个刚性定理

张士诚
(江苏师范大学数学科学学院, 江苏 徐州 221116)

摘 要: 本文研究了单位球中的数量曲率满足 $r = aH + b$ 的完备超曲面的问题. 利用极值原理的方法, 获得了超曲面的一个刚性结果, 推广了这一类具有常中曲率或者常数量曲率超曲面的结果.

关键词: 单位球; 数量曲率; 全脐超曲面
MR(2010) **主题分类号**: 53C42; 53C24 **中图分类号**: O186.12
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2014)04-0804-05

1 引言

关于单位球面 $S^{n+1}(1)$ 中具有常平均曲率或者常数量曲率超曲面的研究内容非常丰富. 1969 年 Nomizu-Smyth 证明了球中具有非负紧致子流形是标准球或者是两个球的乘积; Yano 和 Ishihara [1], Smyth [2] 和 Yau [3] 分别推广了这个结果. 为了更好的研究常数量曲率超曲面, Cheng-Yau [4] 引入了一个新的自伴随微分算子 $\square$. 最近, Liu [5] 与 Li [6] 分别利用自伴随算子 $\square$ 研究了单位球面上的超曲面. 在本文, 我们以 Cheng-Yau 的算子 $\square$ 为基础, 改进了算子 $\square$, 研究了单位球面 $S^{n+1}(1)$ 上的完备超曲面, 得到如下结论:

定理 设 M 是单位球面 $S^{n+1}(1)$ 上 n - 维完备超曲面, 其标准数量曲率 r 与平均曲率 H 满足 $r = aH + b$, $a \le 0$ 且 $(n-1)a^2 - 4n + 4nb \ge 0$. 如果第二基本形式模长平方满足 $\sup S < 2\sqrt{n-1}$, 那么 M 是全脐超曲面.

注 1 定理条件修改了一般研究球面上超曲面具有常数量曲率或者常中曲率这个条件.

注 2 定理中, 若 $a = 0$, 球面上超曲面则是具有常数量曲率超曲面.

2 准备知识

设 M 是单位球 $S^{n+1}(1)$ 中 n - 维超曲面, 对任意点 $x \in M$, 在单位球 $S^{n+1}(1)$ 中选取正交标架场 $\{e_1, e_2, \cdots, e_{n+1}\}$, 使限制在 M 上时, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 M 切向量场, e_{n+1} 是其法向量. 设 $\{\omega^1,\ \omega^2,\ \cdots, \omega^{n+1}\}M$ 是对偶标架场. 为了方便, 对指标的范围使用下列约定:

$$1 \le A, B, C, \cdots \le n+1, \quad 1 \le i, j, k, \cdots \le n.$$

对于单位球 $S^{n+1}(1)$ 中的超曲面 M, 其结构方程为

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\omega^k \wedge \omega^l,$$
$$R_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} + h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}.$$

*收稿日期: 2012-10-25 接收日期: 2013-01-22
基金项目: 国家自然基金资助 (61271002).
作者简介: 张士诚 (1974–), 男, 江苏徐州, 副教授, 主要研究方向: 微分几何与信息几何.

故有

$$n(n-1)(r-1)=n^2H^2-S, \tag{2.1}$$

其中 R_{ijkl} 是 M 的黎曼曲率分量, $h=h_{ij}$ 为第二基本形式, $S=\sum\limits_{i,j=1}^{n}(h_{ij})^2$ 为第二基本形式 h 模长平方, $H=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}h_{ii}e_{n+1}$ 为平均曲率.

分别用 h_{ijk} 和 h_{ijkl} 表示 h_{ij} 一阶与二阶协变微分, 得

$$\sum_k h_{ijk}\omega_k = dh_{ij}+\sum_k h_{ik}\omega_{kj}+\sum_k h_{kj}\omega_{ki}, \tag{2.2}$$

$$\sum_i h_{ijkl}\omega_l = dh_{ijk}+\sum_m h_{mjk}\omega_{mi}+\sum_m h_{imk}\omega_{mj}+\sum_m h_{ijm}\omega_{mk}.$$

故 Ricci 恒等式为 $h_{ijkl}-h_{ijlk}=\sum\limits_m h_{mj}R_{mikl}+\sum\limits_m h_{im}R_{mjkl}$.

超曲面 M 的第二基本形式 h_{ij} 的 Laplacian 定义为 $\Delta h_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}h_{ijkk}$.

选择局部标架场 $\{e_i\}$ 使得 $h_{ij}=\lambda_i\delta_{ij}$, 则

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S &= \frac{1}{2}\Delta(\sum_{i,j}h_{ij}^2)=\sum_{i,j,k}h_{ijk}^2+\sum_{i,j,k}h_{ijkk}h_{ij}\\ &= \sum_{i,j,k}h_{ijk}^2+\sum_i\lambda_i(nH)_{ii}+\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i-\lambda_j)^2R_{ijij}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

根据文献 [4], 我们修改了 Cheng-Yau 提出的算子 $\Box$, 并将其作用在 M 上的一个 C^2 - 函数 f

$$\Box f=\sum_{i,j}(nH\delta_{ij}-h_{ij})f_{ij}-\frac{n-1}{2}a\Delta f. \tag{2.4}$$

故在 x 点处, 有

$$\begin{aligned}\Box(nH) &= nH\Delta(nH)-\sum_i\lambda_i(nH)_{ii}-\frac{n-1}{2}a\Delta(nH)\\ &= \frac{1}{2}\Delta(nH)^2-\sum_i(nH)_i^2-\sum_i\lambda_i(nH)_{ii}-\frac{1}{2}\Delta(n(n-1)r)\\ &= \frac{1}{2}\Delta S-n^2|\nabla H|^2-\sum_i\lambda_i(nH)_{ii}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

将 (2.3) 式代入 (2.5) 式得

$$\Box(nH) = |\nabla h|^2-n^2|\nabla H|^2+\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i-\lambda_j)^2R_{ijij}. \tag{2.6}$$

由 Gauss 方程, 有 $R_{ijij}=1+\lambda_i\lambda_j$, 并将其代入 (2.6) 式得

$$\Box(nH)=|\nabla h|^2-n^2|\nabla H|^2+nS-n^2H^2-S^2+nH\sum_i\lambda_i^3. \tag{2.7}$$

由第二基本形式模长平方的定义, 可以得到 $S=\sum\limits_i\lambda_i^2$. 设 $\mu_j=H-\lambda_j$, 我们可以得到

$$\sum_j\mu_j=0,\quad |\phi|^2=\sum_j\mu_j^2=S-nH^2, \tag{2.8}$$

$$\sum_i\lambda_i^3=nH^3+3H\sum_i\mu_i^2-\sum_i\mu_i^3. \tag{2.9}$$

引理 2.1 [7] 设 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 是满足 $\sum\limits_i\mu_i=0$ 的实数, 且 $\sum\limits_i\mu_i^2=B$ (B 为大于零常数), 则有 $|\sum\limits_i\mu_i^3|\le\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}B^{\frac32}$ 成立, 其中等号成立当且仅当

$$\mu_1=\cdots=\mu_{n-1}=-\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}B},\ \mu_n=\sqrt{\frac{n-1}{n}B}.$$

由引理 2.1, 可以得到

$$\begin{aligned} nH\sum_i\lambda_i^3 &= nH(nH^3+3H\sum_i\mu_i^2-\sum_i\mu_i^3)\\ &\ge 3nH^2|\phi|^2+n^2H^4-n|H|\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\phi|^3. \end{aligned} \tag{2.10}$$

为了证明定理, 我们还需要下列引理.

引理 2.2 [6] 设 M 是单位球 $S^{n+1}(1)$ 上超曲面, $r=aH+b$, $(n-1)a^2-4n+4nb\ge0$. 则

$$|\nabla h|^2\ge n^2|\nabla H|^2, \tag{2.11}$$

其中 $n(n-1)r$ 是 M 的数量曲率, H 是平均曲率.

故由 (2.7), (2.10) 式和引理 2.2, 得

$$\Box(nH)\ge|\phi|^2\left[n-|\phi|^2-n|H|\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\phi|+nH^2\right]. \tag{2.12}$$

引理 2.3 [8] 设 M 是截曲率有下界的 n - 维完备黎曼流形, $f:M\to\mathbb{R}$ 是 M 上有上界的光滑函数. 则 M 上存在一个点列 $\{p_k\}$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}f(p_k)=\sup f$; $\lim\limits_{k\to\infty}|\nabla f(p_k)|=0$; $\lim\limits_{k\to\infty}\sup(\triangle f(p_k))\le0$.

3 定理的证明

下面是一个证明定理的关键引理.

引理 3.1 设 M 是单位球 $S^{n+1}(1)$ 上具有有界平均曲率的超曲面. 若 $r=aH+b$, $a\le0$, $(n-1)a^2-4n+4nb\ge0$, 则 M 上存在一个点列 $\{p_k\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}nH(p_k)=n\sup H;\ \lim_{k\to\infty}|\nabla nH(p_k)|=0;\ \lim_{k\to\infty}\sup(\Box(nH)(p_k))\le0.$$

证 在 M 上 p 点, 选择适当的局部正交标架场 $\{e_1,\cdots,e_n\}$, 使得 $h_{ij}^{n+1}=\lambda_i^{n+1}\delta_{ij}$. 故

$$\Box(nH)=\sum_i\left((nH-\lambda_i^{n+1})-\frac{n-1}{2}a\right)(nH)_{ii}.$$

若 $H=0$, 引理显然成立. 这里不访假设 $H>0$, 由

$$
\begin{aligned}
(\lambda_i^{n+1})^2 &\leq S=n^2H^2+n(n-1)(1-aH-b)\\
&= (nH)^2-(n-1)a(nH)+n(n-1)(1-b)\\
&= (nH-\frac{1}{2}(n-1)a)^2-\frac{1}{4}(n-1)((n-1)a^2+4nb-4n)\leq(nH-\frac{1}{2}(n-1)a)^2,
\end{aligned}
$$

得

$$
|\lambda_i^{n+1}|\leq|nH-\frac{1}{2}(n-1)a|. \tag{3.1}
$$

故

$$
R_{ijij}=1+h_{ii}^{n+1}h_{jj}^{n+1}-(h_{ij}^{n+1})^2\geq 1-\left(nH-\frac{1}{2}(n-1)a\right)^2. \tag{3.2}
$$

又因为 H 有界, 由 (3.2) 式可知截曲率是有下界的. 应用引理 2.3, 可以得到 M 上存在一个点列 $\{p_k\}$, 使得

$$
\lim_{k\to\infty}nH(p_k)=n\sup H;\ \lim_{k\to\infty}|\nabla nH(p_k)|=0;\ \lim_{k\to\infty}\sup((nH)_{ii}(p_k))\leq 0. \tag{3.3}
$$

由于 H 有界, 选取满足上式的点列 $\{p_k\}$, 且有 $H(p_k)\geq 0$. 又因为 $a\leq 0$, 故由 (3.1) 式, 可以得到

$$
\begin{aligned}
0 &\leq nH(p_k)-\frac{1}{2}(n-1)a-|\lambda_i^{n+1}|\leq nH(p_k)-\frac{1}{2}(n-1)a-\lambda_i^{n+1}\\
&\leq nH(p_k)-\frac{1}{2}(n-1)a+|\lambda_i^{n+1}|\leq 2nH(p_k)-(n-1)a.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

由 (3.4) 式, 可以得到 $nH(p_k)-\frac{1}{2}(n-1)a-\lambda_i^{n+1}$ 是非负有界的. 在点 p_k 应用 $\Box(nH)$, 取极限应用方程 (3.3) 和 (3.4), 可以得到

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\sup(\Box(nH)(p_k)) &\leq \sum_i\lim_{k\to\infty}\sup[(nH)(p_k)-\frac{1}{2}(n-1)a)-\lambda_i^{n+1}](nH)_{ii}(p_k)\\
&\leq 0.
\end{aligned}
$$

设 M 是单位球面 $S^{n+1}(1)$ 上完备超曲面, 考虑二次型 $Q(u,t)=u^2-\frac{n-2}{\sqrt{n-1}}ut-t^2$. 由下面正交变换

$$
\begin{aligned}
\widetilde{u}&=\frac{1}{\sqrt{2n}}((1+\sqrt{n-1})u+(1-\sqrt{n-1})t),\\
\widetilde{t}&=\frac{1}{\sqrt{2n}}((-1+\sqrt{n-1})u+(1+\sqrt{n-1})t),
\end{aligned}
$$

得

$$
Q(u,t)=\frac{n}{2\sqrt{n-1}}(\widetilde{u}^2-\widetilde{t}^2)=\frac{n}{2\sqrt{n-1}}(2\widetilde{u}^2-S).
$$

在二次型 $Q(u,t)$ 中, 令 $t=|\phi|$ 和 $u=\sqrt{n}H$, 并将其代入 (2.12) 式, 得

$$\square(nH)\geq|\phi|^2(n-\frac{n}{2\sqrt{n-1}}S). \tag{3.5}$$

根据定理条件 $\sup S<2\sqrt{n-1}$, 由方程 (3.5), 应用引理 3.1, 得

$$0\leq\sup|\phi|^2(n-\frac{n}{2\sqrt{n-1}}\sup S)\leq 0. \tag{3.6}$$

即 $\sup|\phi|^2=0$, 从而可得 $|\phi|^2=0$, 故可以得到 $S=nH^2$, 即 M 是全脐超曲面.

参 考 文 献

[1] Yano K, Ishihara S. Submanifolds with parallel constant mean curvature vector [J]. J. Differential Geom., 1971, 6: 95–118.

[2] Smyth B. Submanifolds of constant mean curvature [J]. Math. Ann., 1973, 205: 265–280.

[3] Yau S T. Harmonic functions on complete Riemsnnian manifolds [J]. Commun. Pure Appl. Math., 1975, 97: 76–100.

[4] Cheng S Y, Yau S T. Hypersurfaces with constant scalar curvature [J]. Math. Ann., 1977, 225: 195–204.

[5] Liu X, Li H. Complete hypersurfaces with constant scalar curvature in a sphere [J]. Comment. Math. Univ. Carolinae, 2005, 46(3): 567–575.

[6] Li H, Suh Y J, Wei G. Linear Weingarten hypersurfaces in a sphere [J]. Bull. Korean Math. Soc., 2009, 46(2): 321–329.

[7] Liu X. Complete space-like hypersurfaces with constant scalar curvature [J]. Manuscripta Math., 2001, 105(2): 367–378.

[8] Omori H. Isometricimmersions of Riemannian manifolds [J]. J. Math. Soc. Japan, 1967, 19: 205–214.

RIGIDITY THEOREM FOR COMPLETE HYPERSURFACES IN UNIT SPHERE

ZHANG Shi-cheng

(*School of Mathematical Sciences, Jiangsu Normal University, Xuzhou 221116, China*)

Abstract: In this paper, the complete hypersurfaces with scalar curvature r satisfying $r=aH+b$ is discussed in unit sphere $S^{n+1}(1)$, the maximum principle can be applied and a rigidity theorem is obtained for these hypersurfaces. The result is the generalization of several results for the hypersurface with constant mean curvature or constant scalar curvature.

Keywords: unit sphere; scalar curvature; totally umbilical hypersurface

2010 MR Subject Classification: 53C42; 53C24