Vol. 34 (2014)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

常曲率平面上一域包含另一域的充分条件

陈 明, 何 刚
(遵义师范学院数学与计算科学学院, 贵州 遵义 563002)

摘 要: 本文研究了常曲率平面 X^κ 中一域包含另一域的包含问题. 利用积分几何中包含测度理论及对称等周亏格, 得到了 X^κ 中一域包含另一域的充分条件, 并给出 X^κ 中等周不等式的一个简化证明.

关键词: 基本运动公式; 常曲率平面; 等周亏格; 等周不等式
MR(2010) **主题分类号**: 52A10; 52A22 **中图分类号**: O186.5
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2014)04-0793-04

1 引言

设 X^κ 为 Gauss 曲率 κ 为常数的常曲率平面, 即 $\kappa=0$ 时为欧氏平面 $\mathbb{R}^2$; $\kappa>0$ 时为射影平面 $\mathbb{RP}^2$ 及 $\kappa<0$ 时为双曲平面 $\mathbb{H}^2$. 对于 X^κ 中面积与周长分别为 F_i 与 L_i 的有非空内点的连通区域 D_i $(i=0,1)$, 其等周亏格定义为

$$\Delta(D_i)=L_i^2-4\pi F_i+\kappa\ F_i^2. \tag{1.1}$$

$\Delta(D_i)$ 是刻划域 D_i 与测地圆盘差别程度的几何不变量. 一个能刻划两域 D_0 与 D_1 差别程度的几何不变量, 即对称等周亏格, 被周家足等定义为

$$\sigma(D_0,D_1)=\Delta(D_0)+\Delta(D_1)-\kappa(F_0-F_1)^2. \tag{1.2}$$

等周亏格与等周不等式联系紧密. 经典的等周不等式是最古老的几何不等式, 即欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 上固定周长的简单闭曲线中圆所围成的面积最大. 它的数学表述为 $\mathbb{R}^2$ 中域 D 的面积 F 和周长 L 满足

$$L^2-4\pi F\geq 0, \tag{1.3}$$

等号成立的充分必要条件是 D 为圆盘.

经典的等周不等式有很多优美的证明及推广形式 (参见文献 [1–6]), 在常曲率平面的推广为 (参见文献 [4, 7–11]): 设 D 为 X^κ 中面积为 F 周长为 L 的域, 则有

$$L^2-4\pi F+\kappa\ F^2\geq 0, \tag{1.4}$$

等号成立的充分必要条件是 D 为测地圆盘.

等周不等式 (1.4) 蕴涵了等周亏格 (1.1) 非负, 即 $\Delta(D)\geq 0$.

*收稿日期: 2013-12-21 接收日期: 2014-04-11
基金项目: 贵州省科学技术基金项目 (黔科合 J 字 LKZS[2012]12 号).
作者简介: 陈明 (1961–), 男, 福建顺昌, 副教授, 主要研究方向: 随机概率与几何概率.

积分几何中与等周亏格密切相关的一个著名问题是包含问题: 设 g 是 X^κ 中的等距运动, 对两给定的域 D_i $(i=0,1)$, 使得 $D_0 \subset gD_1$ 或 $D_0 \supset gD_1$ 的条件是什么? 人们希望用 D_i $(i=0,1)$ 的周长 L_i 与面积 F_i 刻划包含条件. 1942 年, Hadwiger 首次给出 X^κ 上的两域 D_i 包含条件 (参见文献 [4, 12]), 任德麟利用 $\Delta(D_i)$ 得到了 $\mathbb{R}^2$ 上等价于 Hadwiger 条件的包含条件 (参见文献 [3]). 而高维空间 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ 中的包含条件直到上世纪八九十年代才被张高勇、周家足陆续解决 (参见文献 [13–15]).

本文中, 我们研究 X^κ 中两域的包含问题. 利用 $\sigma(D_0, D_1)$ 等不变量, 我们建立了常曲率平面上一域包含另一域的充分条件. 等周不等式 (1.4) 与 $\mathbb{R}^2$ 中的任德麟包含条件为其推论.

2 运动公式与主要定理

设 G 为 X^κ 中的等距群, dg 为 G 上的 Haar 测度. 积分几何中称 dg 为 G 的不变运动密度. 令 $\chi(D)$ 为域 D 的 Euler-Poincaré 示性数. 设 D_i $(i=0,1)$ 是 X^κ 中面积为 F_i 周长为 L_i 且有非空内点的连通区域, 并令 D_0 为 X^κ 中的定区域, 而 gD_1 为 D_1 经运动 $g(\in G)$ 而来的动区域. X^κ 中著名的 Blaschke 基本运动公式为 (参见文献 [3, 6])

$$\int_{\{g|D_0\cap gD_1\neq\emptyset\}} \chi(D_0\cap gD_1)dg = -\kappa\ F_0F_1 + 2\pi(F_0+F_1) + L_0L_1. \tag{2.1}$$

当 D_i 退化为 ∂D_i 时, 上式 (2.1) 为经典的 Poincaré 基本运动公式为 (参见文献 [3, 6])

$$\int_{\{g|\partial D_0\cap\partial(gD_1)\neq\emptyset\}} \sharp(\partial D_0\cap\partial(gD_1))dg = 4L_0L_1, \tag{2.2}$$

其中 $\sharp(\partial D_0\cap\partial(gD_1))$ 为 $\partial D_0\cap\partial(gD_1)$ 的交点个数. 因 D_i $(i=0,1)$ 为连通区域, 故 $\chi(D_0\cap gD_1)=e(g)$ 为 $D_0\cap gD_1$ 相交的块数. 故 Blaschke 基本运动公式 (2.1) 可改写为

$$\int_{\{g|D_0\cap gD_1\neq\emptyset\}} e(g)dg = -\kappa F_0F_1 + 2\pi(F_0+F_1) + L_0L_1. \tag{2.3}$$

记 μ 所有 $D_0\subset gD_1$ 与 $D_0\supset gD_1$ 的 g 的集合, 则上式 (2.3) 可进一步改写为

$$\int_\mu dg + \int_{\{g|\partial D_0\cap\partial(gD_1)\neq\emptyset\}} e(g)dg = -\kappa F_0F_1 + 2\pi(F_0+F_1) + L_0L_1. \tag{2.4}$$

当 $\partial D_0\cap\partial(gD_1)\neq\emptyset$ 时, $D_0\cap gD_1$ 至少由 ∂D_0 与 $\partial(gD_1)$ 的各一段弧组成, 因而有 $e(g)\leq \frac{\sharp(\partial D_0\cap\partial(gD_1))}{2}$. 由 (2.2) 及 (2.4) 式可得

$$\int_\mu dg \geq 2\pi(F_0+F_1) - L_0L_1 - \kappa F_0F_1. \tag{2.5}$$

如果取 $D_0\equiv D_1\equiv D$, 则 D 不能包含本身 D, 故 $\int_\mu dg = 0$, 进而由 (2.5) 式可得等周不等式 (1.4). 此外, 由公式 (2.5) 立即可得以下包含条件.

定理 1 X^κ 中的域 D_i $(i=0,1)$ 满足 $D_0\subset gD_1$ 或 $D_0\supset gD_1$ 的一个充分条件是

$$2\pi(F_0+F_1) - L_0L_1 - \kappa F_0F_1 > 0. \tag{2.6}$$

若 $F_0 \geq (\leq) F_1$, 则 $D_0 \supset (\subset) gD_1$.

利用 $\sigma(D_0, D_1)$ 及定理 1, 我们还得到另一包含条件.

定理 2 X^κ 中的域 D_i $(i=0,1)$ 满足 $D_0 \supset gD_1$ 与 $D_0 \subset gD_1$ 的充分条件分别为

$$L_0 - L_1 > \sqrt{\sigma(D_0, D_1)} \tag{2.7}$$

与

$$L_1 - L_0 > \sqrt{\sigma(D_0, D_1)}. \tag{2.8}$$

证 由 (2.7) 式易知 $L_0 - L_1 > 0$. 两边同时平方 (2.7) 式可得 (2.6) 式. 而 (2.6) 式等价于

$$2\pi(F_0 - F_1) > L_0 L_1 - 4\pi F_1 + \kappa F_0 F_1. \tag{2.9}$$

再由 $L_0 - L_1 > 0$ 可得

$$L_0 L_1 - 4\pi F_1 + \kappa F_0 F_1 \geq L_1^2 - 4\pi F_1 + \kappa F_0 F_1 = \Delta(D_1) - \kappa F_1^2 + \kappa F_0 F_1. \tag{2.10}$$

等周不等式 (1.4) 蕴涵着 (2.10) 式右边的最小值为 $-\kappa F_1^2 + \kappa F_0 F_1$. 继而结合 (2.9) 与 (2.10) 式可得

$$2\pi(F_0 - F_1) > \kappa F_1 (F_0 - F_1).$$

假设 $F_0 < F_1$, 则上式为 $2\pi < \kappa F_1$, 这蕴涵了 $\kappa > 0$ 及 $F_1 > \frac{2\pi}{\kappa}$. 这与射影平面的面积为 $\frac{2\pi}{\kappa}$ 矛盾. 因此 $F_0 \geq F_1$. 则由定理 1 立即可得 (2.7) 式. 类似可证 (2.8) 式. 证毕.

当 $\kappa = 0$ 时, 即在欧氏平面上, 由定理 2 立即可得任德麟包含条件 (参见文献 [3]).

推论 1 记 $\mathbb{R}^2$ 中域 D_i $(i=0,1)$ 的等周亏格为 $\Delta(D_i) = L_i^2 - 4\pi F_i$. 则使得 $D_0 \supset gD_1$ 及 $D_0 \subset gD_1$ 的充分条件分别为

$$L_0 - L_1 > \sqrt{\Delta(D_0) + \Delta(D_1)} \quad \text{与} \quad L_1 - L_0 > \sqrt{\Delta(D_0) + \Delta(D_1)}.$$

3 注记

定理 1 与定理 2 中的包含条件不是必要的. 高维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ 中包含的充分条件由周家足 (参见文献 [13, 14]) 与张高勇 (参见文献 [15]) 利用积分几何的方法得到, 它们涉及域的体积、表面积、曲率积分等许多几何量. 然而, 高维射影空间与双曲空间中的包含问题还未解决. 更多资料参考文献 [5, 7, 10 ,11, 16–19] .

参 考 文 献

[1] Burago Y D, Zalgaller V A. Geometric inequalities [M]. Springer-Verlag, 1988.

[2] Osserman R. The isoperimetric inequality [J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1978, 84: 1182–1138.

[3] Ren D. Topics in integral geometry [M]. Beijing: World Scientific International Publisher, 1992.

[4] Santaló L. Integral geometry and geometric probability [M]. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1976.

[5] 周家足, 任德麟. 从积分几何的观点看几何不等式 [J]. 数学物理学报, 2010, 30A(5): 1322–1339.

[6] 周家足. 平面 Bonnessn 型不等式 [J]. 数学学报, 2007, 50 (6) : 1397–1402.

[7] Osserman R. Bonnesen-style isoperimetric inequality [J]. Amer. Math. Monthly, 1979, 86: 1–29.

[8] Klain D. Bonnesen-type inequalities for surfaces of constant curvature [J]. Adv. Appl. Math., 2007, 39 (2): 143–154.

[9] Santaló L. Integral geometry on surfaces of constant negative curvature [J]. Duke J. Math., 1943, 10: 687–709.

[10] Li M, Zhou J. An upper limit for the isoperimetric deficit of convex set in a plane of constant curvature [J]. Sci. in China, 2010, 53 (8): 1941–1946.

[11] Zhou J, Chen F. The Bonnesen-type inequalities in a plane of constant curvature [J]. J. Korean Math. Soc., 2007, 44 (6): 1–10.

[12] Hadwiger H. Gegenseitige bedeckbarkeit zweier eibereiche und isoperimetrie [J]. Vierteljschr Naturforsch Gesellsch Zürich, 1945, 18: 59–72.

[13] Zhou J. The sufficient condition for a convex body to fit another in R^4 [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1994, 121 (3): 907–913.

[14] Zhou J. Kinematic formulas for mean curvature powers of hypersurfaces and Hadwiger's theorem in R^{2n} [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1994, 345: 243–262.

[15] Zhang G. The sufficient condition for one convex body containing another [J]. Chin. Ann. Math., 1988, 4: 447–451.

[16] Zhou J. Sufficient conditions for one domain to contain another in a space of constant curvature [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1998, 126: 2797–2803.

[17] Zhou J, Du Y, Cheng F. Some Bonnesen-style inequalities for higher dimensions [J]. Acta Math. Sinica, 2012, 28 (12): 2561–2568.

[18] Xia Y, Xu W, Zhou J, Zhu B. The reverse Bonnesen style inequalities in a surface $\mathbb{X}_\kappa^2$ of constant curvature [J]. Sci. in China, 2013, 56 (6): 1145–1154.

[19] Zhou J. A Kinematic formula and analogues of Hadwiger's theorem in space [J]. Contemporary Math., 1992, 140: 159–167.

SUFFICIENT CONDITIONS FOR A DOMAIN TO CONTAIN ANOTHER DOMAIN IN A SURFACE OF CONSTANT CURVATURE

CHEN Ming, HE Gang

(*School of Mathematics and Computing Science, Zunyi Normal College, Zunyi 563002, China*)

Abstract: In this paper, we investigate the containment problem in a surface X^κ of constant curvature κ. Using the symmetric isoperimetric deficit and following the idea of containment measure in integral geometry, we establish some sufficient conditions for $D_0 \subset gD_1$ or $D_0 \supset gD_1$ and give an simplified proof of the isoperimetric inequality in X^κ.

Keywords: kinematic fundamental formula; surface of constant curvature; isoperimetric deficit; isoperimetric inequality

2010 MR Subject Classification: 52A10; 52A22