

随机集的极限性质

陆健华

(湖北经济学院统计学院, 湖北 武汉 430205)

摘要: 本文研究了 Banach 空间随机紧集的极限性质. 利用嵌入定理, 得到了 Banach 中独立同分布随机紧集的 Minkowski 和的中偏差原理.

关键词: 随机集; 极限定理

MR(2010) 主题分类号: 60F10; 60D05

中图分类号: O211.4

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)04-0787-06

1 引言

设 $(F, \|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间, $\mathcal{K}(F)$ 表示 F 中所有非空紧集的集合. 若 $A \in \mathcal{K}(F)$, 定义 $\text{co}(A)$ 为 A 的闭核. 由 Mazur's 定理^[1], 我们知道 $\text{co}(A) \in \text{co}(\mathcal{K}(F))$, 这里 $\text{co}(\mathcal{K}(F))$ 表示 F 的非空紧凸子集的集合. 空间 $\mathcal{K}(F)$ 赋予 Minkowski 加法和数乘运算: 对于 $A_1, A_2 \in \mathcal{K}(F)$, 和任意实数 λ ,

$$A_1 + A_2 = \{a_1 + a_2 : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}, \quad \lambda A_1 = \{\lambda a_1 : a_1 \in A_1\}.$$

在 Hausdorff 距离下

$$d(A_1, A_2) = \max \left\{ \sup_{a_1 \in A_1} \inf_{a_2 \in A_2} \|a_1 - a_2\|, \sup_{a_2 \in A_2} \inf_{a_1 \in A_1} \|a_2 - a_1\| \right\},$$

$(\mathcal{K}(F), d)$ 是一个完备可分度量空间. 在 $\mathcal{K}(F)$ 上赋予 Hausdorff 拓扑下的 Borel σ - 域. 若 $A \in \mathcal{K}(F)$, 则 $\|A\| = d(A, \{0\}) = \sup_{a \in A} \|a\|$.

设 F^* 是 F 的拓扑对偶, B^* 为 F^* 的单位球. 由 Banach-Alaoglu 定理可知, B^* 被赋予弱*拓扑 ω^* 是紧的^[2]. 此外, 空间 $(B^*; \omega^*)$ 是可分的和可度量的. 令 $M(B^*)$ 表示 B^* 上的 Borel 符号测度. 设 $(\Omega; \mathcal{F}; \mathbb{P})$ 是一个概率空间. F 上的随机紧集是一个从 Ω 到 $\mathcal{K}(F)$ 上的可测函数, i.e., 取值为 $\mathcal{K}(F)$ 的随机变量. 若 A 是一个随机紧凸集 (i.e., $\text{co}(\mathcal{K}(F))$ -值的随机变量), 则 $\mathbb{E}A$ 被定义为

$$\mathbb{E}A = \{\mathbb{E}f | f \in L^1(\Omega; \mathcal{F}; \mathbb{P}), f(\omega) \in A \text{ a.s.}\},$$

这里 $f: \Omega \rightarrow F$ 是 A 的一个选择, $\mathbb{E}f$ 表示 Bochner 积分意义下的期望. 一般来说, $\mathbb{E}A$ 是空的, 但是如果 $\mathbb{E}\|A\| < \infty$, 则 $\mathbb{E}A \in \text{co}(\mathcal{K}(F))$. 如果 A 是一个随机紧集, 则

$$\mathbb{E}A = \mathbb{E}(\overline{\text{co}}(A))$$

*收稿日期: 2013-08-30

接收日期: 2013-12-20

作者简介: 陆健华 (1968-), 女, 湖北武汉, 副教授, 主要研究方向: 概率统计.

且 $\mathbb{E}A \in \text{co}(\mathcal{K}(F))$. 这里 $\text{co}(A)$ 表示 A 的闭凸核.

假设 F 是 p 型 ($p > 1$), i.e., 存在常数 c 使得对任意取值为 F , 且期望为 0 的独立随机变量 f_1, \dots, f_n , 有

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\|^p \leq c \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \|f_i\|^p. \quad (1.1)$$

每一个 Hilbert 空间是 2 型空间; L^p ($1 < p < \infty$) 空间是 $\min(p, 2)$ 型空间. 然而, $[0, 1]$ 上连续函数空间赋予上确界范数则是 1 型空间, 但对任意 $p > 1$, 却不是 p 型空间.

令 \mathbb{N}^* 表示正整数集.

定理 1.1 (1) 设 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ 是一列 i.i.d. F 上的随机紧凸集, 假设存在一个正常数 $\delta > 0$, 使得

$$\mathbb{E} \exp(\delta \|A_1\|) = \mathbb{E} \exp\left(\delta \sup_{a \in A_1} \|a\|\right) < \infty.$$

对任意 $M(B^*)$ 上一个测度 λ , 设

$$\Lambda(\lambda) = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(\int_{B^*} \sup_{a \in A_1} x^*(a) d\lambda(x^*) \right)^2 \quad (1.2)$$

且对任意 $U \in \text{co}(\mathcal{K}(F))$,

$$\Lambda^*(U) = \sup_{\lambda \in M(B^*)} \left(\int_{B^*} \sup_{x \in U} x^*(x) d\lambda(x^*) - \Lambda(\lambda) \right). \quad (1.3)$$

对 $\mathcal{K}(F)$ 上的一个非凸集 U , 设 $\Lambda^*(U) = +\infty$. 此外, 设 (b_n) 是一列正数满足 $1 \ll b_n \ll n$, i.e., 当 $n \rightarrow \infty$,

$$b_n \rightarrow \infty; \quad \frac{b_n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0,$$

和

$$S_n := \frac{\sum_{i=1}^n (A_i - \mathbb{E}A_i)}{b_n \sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

(2) 设 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ 是一列 F 上 i.i.d. 随机紧集, 假设存在正数 $\delta > 0$ 和 $\delta_0 > 0$, 使得

$$\mathbb{E} \exp\left(\delta \sup_{a \in A_1} \|a\|^{1+\delta_0}\right) < \infty.$$

假设当 $n \rightarrow \infty$, (b_n) 满足

$$b_n \rightarrow \infty; \quad \frac{b_n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0, \quad \frac{\log n}{b_n^2} \rightarrow 0, \quad \frac{b_n^{2+(1-\frac{2}{1+\delta_0})p}}{n^{1-p/2}} \rightarrow \infty. \quad (1.4)$$

若 (1) 或 (2) 成立, 则对任意 $\mathcal{U} \in \mathcal{K}(F)$,

$$-\inf_{\mathcal{U} \in \mathcal{U}^o} \Lambda^*(U) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}(S_n \in \mathcal{U}) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}(S_n \in \mathcal{U}) \leq -\inf_{U \in \bar{\mathcal{U}}} \Lambda^*(U),$$

这里 \mathcal{U}^o 和 $\bar{\mathcal{U}}$ 分别表示关于 Hausdorff 拓扑的内部和闭包.

2 定理的证明

不妨设 $S_n = A_1 + \cdots + A_n$ 且 $\mathbb{E}A_1 = 0$. 我们首先给出几个已有的结果.

嵌入定理 (见文献 [3]) 对 F 中的紧凸子集 A , 其支撑函数 $s_A: B^* \rightarrow \mathbb{R}$ 被定义为

$$\forall x^* \in B^*, \quad s_A(x^*) = \sup\{x^*(x) : x \in A\}.$$

令 $C(B^*, \omega^*)$ 表示在弱*拓扑下连续函数全体. 在一致范数下 $\|\cdot\|_\infty$, $C(B^*, \omega^*)$ 是一个可分的 Banach 空间. 当 A 是紧的, 则 $s_A \in C(B^*, \omega^*)$. 映射 $s: \text{co}(\mathcal{K}(F)) \rightarrow C(B^*, \omega^*)$ 有下面性质. 对任意 $A_1, A_2 \in \text{co}(\mathcal{K}(F))$ 和 $t \in \mathbb{R}^+$,

$$s_{A_1} = s_{A_2} \Leftrightarrow A_1 = A_2, \quad A_1 \subset A_2 \Leftrightarrow s_{A_1} \leq s_{A_2},$$

$$s_{A_1+A_2} = s_{A_1} + s_{A_2}, \quad s_{tA_1} = ts_{A_1}$$

和 $d(A_2, A_1) = \|s_{A_2} - s_{A_1}\|_\infty$. 所以 $\text{co}(\mathcal{K}(F))$ 是一个代数和拓扑同构的.

Banach 空间上的中偏差原理 (见文献 [4, 5]) 设 E 是一个 Banach 空间, E_1 是 E 的一个闭凸子集, E^* 表示 E 的拓扑对偶. 给定 E_1 值随机变量 X , 若 $X \in WM_0^2$ 表示满足 $\mathbb{E}\lambda(X) = 0$ 和 $\mathbb{E}\lambda^2(X) < \infty$ 对任意 $\lambda \in E^*$. 设 $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ 是一列定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上取值为 E_1 的 i.i.d. 随机变量 $X_1 \in WM_0^2$, 设 $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/(b_n\sqrt{n})$. 假设存在 $\delta > 0$, 使得

$$\mathbb{E} \exp(\delta \|X_1\|) < \infty$$

和

$$S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

则对任意 $U \subset E$,

$$-\inf_{x \in U^\circ} \Lambda_E^*(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}(S_n \in U) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}(S_n \in U) \leq -\inf_{x \in \bar{U}} \Lambda_E^*(x),$$

这里

$$\Lambda_E^*(x) = \sup_{\lambda \in E^*} \{\lambda(x) - \Lambda_E(\lambda)\}$$

和

$$\Lambda_E(\lambda) = \frac{1}{2} \mathbb{E}\lambda^2(X_1).$$

凸核的距离 (见文献 [3, 6]) 设 $A \in \mathcal{K}(F)$, 其内半径为

$$r(A) = \sup_{a \in \text{co}(A)} \inf\{R : \exists a_1, \dots, a_s \in A, a \in \text{co}(a_1, \dots, a_s), \|a - a_i\| \leq R, 1 \leq i \leq s\}.$$

显然, $r(A) = 0$ 当且仅当 A 是凸的. 对任意 A , $r(A) \leq 2\|A\| = 2\sup_{a \in A} \|a\|$. 对任意 $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{K}(F)$,

$$d(A_1 + \cdots + A_n, \text{co}(A_1) + \cdots + \text{co}(A_n)) \leq c^{1/p}(r(A_1)^p + \cdots + r(A_n)^p)^{1/p}. \quad (2.1)$$

这里 p 与 p 型空间 F 有关, 常数 c 定义在 (1.1) 式.

定理 1.1 的证明 证明分为三步.

第一步 设 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ 是凸的. 设 $E = C(B^*, \omega^*)$, $E_1 = s(\text{co}(\mathcal{K}(F)))$ 和随机函数 $(s_{A_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$. 由 Riesz 表示定理 [7], E 的拓扑对偶是 (B^*, ω^*) 上的符号测度集. 有定理 1.1 的条件, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\mathbb{E} \exp(\delta \|s_{A_1}\|_\infty) = E \exp\left(\delta \sup_{a \in A_1} \|a\|\right) < \infty.$$

由于 s 的同构性, 对任意 $U \in \text{co}(\mathcal{K}(F))$, $\Lambda^*(U) = \Lambda_E^*(s_U)$, 有

$$-\inf_{U \in \mathcal{U}_{\text{co}}} \Lambda^*(U) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}(S_n \in \mathcal{U}) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}(S_n \in \mathcal{U}) \leq -\inf_{U \in \overline{\mathcal{U}}_{\text{co}}} \Lambda^*(U).$$

第二步 设 $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ 不必凸, 令 $S_n = (A_1 + \cdots + A_n)/(b_n \sqrt{n})$ 和 $S^{\text{co}} = (\text{co}(A_1) + \cdots + \text{co}(A_n))/(b_n \sqrt{n})$. 下面证明

对任意 $r > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}(d(S_n, S_n^{\text{co}}) \geq r) = -\infty. \quad (2.2)$$

应用不等式 (1.4),

$$\mathbb{P}(d(S_n, S_n^{\text{co}}) \geq r) \leq \mathbb{P}(c^{1/p}(r(A_1)^p + \cdots + r(A_n)^p)^{1/p} \geq r b_n \sqrt{n}),$$

由条件 (1.4), 存在递增正序列 a_n 和一个正常数 β , 使得

$$p - \beta = 1 + \delta_0, \quad b_n^{\frac{2p}{1+\delta_0}-2} \ll a_n \ll b_n^2 n^{p/2-1},$$

即

$$b_n^{2\beta/(p-\beta)} \ll a_n \ll b_n^2 n^{p/2-1}, \quad (2.3)$$

所以有

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(c^{1/p}(r(A_1)^p + \cdots + r(A_n)^p)^{1/p} \geq r b_n \sqrt{n}) \\ &= \mathbb{P}(r(A_1)^p + \cdots + r(A_n)^p \geq (r b_n \sqrt{n})^p / c) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} r(A_i)^\beta [r(A_1)^{p-\beta} + \cdots + r(A_n)^{p-\beta}] \geq (r b_n \sqrt{n})^p a_n / (c a_n)\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} r(A_i)^\beta \geq a_n \alpha\right) + \mathbb{P}\left(r(A_1)^{p-\beta} + \cdots + r(A_n)^{p-\beta} \geq \frac{(r b_n \sqrt{n})^p}{(\alpha c a_n)}\right) \\ &\leq n \mathbb{P}(r(A_1)^{p-\beta} \geq (a_n \alpha)^{(p-\beta)/\beta}) + \mathbb{P}\left(r(A_1)^{p-\beta} + \cdots + r(A_n)^{p-\beta} \geq \frac{(r b_n \sqrt{n})^p}{(\alpha c a_n)}\right). \end{aligned}$$

由于 $r(A_1) \leq 2\|A_1\| = 2 \sup_{a \in A_1} \|a\|$, 由 Markov's 不等式得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}(r(A_1)^{p-\beta} \geq (a_n \alpha)^{(p-\beta)/\beta}) \\ &\leq \frac{1}{b_n^2} \log \left(\exp\left(-\lambda (a_n \alpha)^{(p-\beta)/\beta}\right) \mathbb{E} \exp\left(2\lambda \sup_{a \in A_1} \|a\|\right) \right) \\ &\leq \frac{-\lambda (a_n \alpha)^{(p-\beta)/\beta}}{b_n^2} + \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{E} \exp\left(2\lambda \sup_{a \in A_1} \|a\|\right), \end{aligned}$$

这里 $\lambda > 0$, $2\lambda \leq \delta$. 因此, 从 (2.3) 式, 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log n \mathbb{P} (r(A_1)^{p-\beta} \geq (a_n \alpha)^{(p-\beta)/\beta}) = -\infty.$$

由 $A_i, i = 1, \dots, n$ 的独立性和 Markov's 不等式得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P} (r(A_1)^{p-\beta} + \dots + r(A_n)^{p-\beta} \geq (rb_n \sqrt{n})^p / (\alpha c a_n)) \\ & \leq \frac{n}{b_n^2} \log \mathbb{E} \exp \left(2\lambda \sup_{a \in A_1} \|a\|^{p-\beta} \right) - \frac{\lambda (rb_n \sqrt{n})^p}{b_n^2 a_n c \alpha}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

根据 (2.3) 式, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P} (r(A_1)^{p-\beta} + \dots + r(A_n)^{p-\beta} \geq (rb_n \sqrt{n})^p / (\alpha c a_n)) = -\infty. \quad (2.5)$$

由 (2.4) 和 (2.5) 式, 获得 (2.2) 式.

第三步 设 \mathcal{U} 是 $\mathcal{K}(F)$ 的一个子集. 设 $U \in \mathcal{U}^o$. 则存在 $\gamma > 0$ 使得

$$\{V \in \mathcal{K}(F) : d(U, V) < \gamma\} \subset \mathcal{U}.$$

所以有

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n \in \mathcal{U}) & \geq \mathbb{P}(d(S_n, U) < \gamma) \geq \mathbb{P}(d(S_n^{co}, U) < \gamma/2, d(S_n, S_n^{co}) < \gamma/2) \\ & \geq \mathbb{P}(d(S_n^{co}, U) < \gamma/2) - \mathbb{P}(d(S_n, S_n^{co}) \geq \gamma/2). \end{aligned}$$

利用 (2.2) 式和中偏差原理得

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}(S_n \in \mathcal{U}) \geq -\Lambda^*(U).$$

设 $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}(F)$. 对任意 $\gamma > 0$, 设 $\mathcal{U}^\gamma = \{A \in \mathcal{K}(F) : d(A, \mathcal{U}) \leq \gamma\}$. 所以

$$\mathbb{P}(S_n \in \mathcal{U}) \leq \mathbb{P}(S_n^{co} \in \mathcal{U}^\gamma) + \mathbb{P}(d(S_n, S_n^{co}) > \gamma).$$

利用 (2.2) 式和中偏差原理得

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n^2} \log \mathbb{P}(S_n \in \mathcal{U}) \leq -\inf\{\Lambda^*(U) : U \in \overline{\mathcal{U}^\gamma}^{co}\}.$$

由于 $\overline{\mathcal{U}^\gamma}^{co} = \mathcal{U}^\gamma \cap \text{co}(\mathcal{K}(F))$, $\bigcap_{\gamma > 0} \overline{\mathcal{U}^\gamma}^{co} = \overline{\mathcal{U}} \cap \text{co}(\mathcal{K}(F))$, 有

$$\liminf_{\gamma \rightarrow 0} \{\Lambda^*(U) : U \in \overline{\mathcal{U}^\gamma}^{co}\} = \inf\{\Lambda^*(U) : U \in \overline{\mathcal{U}} \cap \text{co}(\mathcal{K}(F))\}.$$

右边显然大于左边. 设 $(U_n)_{n \in N^*}$ 是一列满足对任意 n , $U_n \in \overline{\mathcal{U}^{1/n}}^{co}$ 成立的序列, $\Lambda^*(U_n)$ 收敛到左边. Λ^* 的水平集是紧的, 从 $(U_n)_{n \in N^*}$ 可以提取子列收敛于 U 且 $U \in \overline{\mathcal{U}} \cap \text{co}(\mathcal{K}(F))$. 由 Λ^* 的下半连续型, $\Lambda^*(U)$ 小于左边. 令 $\gamma \rightarrow 0$, 则可得到上界. 从上面的讨论, 定理可得.

参 考 文 献

- [1] Dunford N, Schwartz J T. Linear operators. Part i: general theory[M]. New York: John Wiley & Sons, 1958.
- [2] Rudin W. Functional analysis[M]. New York: McGraw-Hill, 1973.
- [3] Cerf R. Large deviations for sums of i.i.d. random compact sets[J]. Proc. Amer. Math. Soci., 1999, 127(8): 2431–2436.
- [4] Chen X. Probabilities of moderate deviations for independent random vectors in a Banach space[J]. Chinese J. Appl. Prob. Stat., 1991, 7: 24–32.
- [5] Chen X. Moderate deviations for m -dependent random variables with Banach space values[J]. Stat. Prob. Lett., 1997, 35: 123–134.
- [6] Puri M L, Ralescu D A. Limit theorems for random compact sets in Banach space[J]. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1985, 97: 151–158
- [7] Rudin W. Real and complex analysis[M]. New York: McGraw-Hill, 1966.

LIMITING BEHAVIOR OF RANDOM SETS

LU Jian-hua

(School of Statistics, Hubei University of Economics, Wuhan 430205, China)

Abstract: In this paper the limit theories of random impact sets in Banach space are studied. By using imbedding theorem, we prove a limiting theorem for Minkowski sums of i.i.d. random sets in Banach space.

Keywords: limiting theorem; random sets

2010 MR Subject Classification: 60F10; 60D05