

## 一类非线性 Klein-Gordon 方程的数值解

闵涛, 任菊成, 耿蓓

(西安理工大学理学院, 陕西 西安 710054)

**摘要:** 本文主要研究了一类非线性 Klein-Gordon 方程. 利用 Fourier 谱方法对一类非线性 Klein-Gordon 方程的求解, 给出了求解的离散过程, 并通过了数值模拟与文献结果进行了对比. 结果表明这种方法对于求解此类非线性 Klein-Gordon 方程具有很好的效果.

**关键词:** 非线性 Klein-Gordon 方程; Fourier 谱方法; 谱配置法

MR(2010) 主题分类号: 81Q05                      中图分类号: O241.8

文献标识码: A                      文章编号: 0255-7797(2014)04-0766-07

### 1 引言

Klein-Gordon 方程是由瑞典物理学家奥斯卡·克莱因和德国人沃尔特·高登于二三十年代分别独立推导得出的. Klein-Gordon 方程是相对论量子力学和量子场论中用于描述自旋为零的粒子的最基本方程式, 它是薛定谔方程的相对论形式, 具有深刻的实际背景和物理意义, 如在强耦合条件下, 考虑相对论时效时, 处于势场中运动的离子需要用 Klein-Gordon 方程或 Dirac 方程描述. 因此它受到了一些物理学家和数学家的高度关注. 通常求解低维 Klein-Gordon 方程的方法是利用它的 Backlund 变换 (BT) 和 Darboux 变换 (DT), 然而求 BT 和 DT 是很不容易的工作, 目前已有的一些文章如文献 [1-5] 对其进行了研究, 但效果并不十分理想. 此外, 文献 [6] 研究了在二维空间中研究了一类耦合非线性 Klein-Gordon 方程的初值问题, 证明了具有基态的驻波的存在性和不稳定性. 文献 [7] 利用直接截断法讨论了形如  $u_{tt} - u_{xx} + \alpha u - \beta u^3 = 0$  的 Klein-Gordon 方程的精确解. 文献 [8] 利用四阶龙格库塔方法数值模拟了一维 Klein-Gordon 晶格中非线性局域模的传播和碰撞. 文献 [9] 从量子力学的矩阵元计算出带电粒子在磁场中 Klein-Gordon 方程的精确波函数. 然而对于 Klein-Gordon 方程数值解的求解, 目前研究较少, 且其求解精度大都不太理想. 本文主要利用 Fourier 谱方法对形如 (1.1) 式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u|^\beta u = f \quad (1.1)$$

的 Klein-Gordon 方程在周期边界条件的数值求解进行了研究, 给出求解的离散过程并与文献 [10] 进行了比较.

### 2 Fourier 谱差分矩阵

\*收稿日期: 2012-06-08                      接收日期: 2012-10-25

基金项目: 国家自然科学基金重大项目 (51190093); 国家自然科学基金 (51179151).

作者简介: 闵涛 (1963-), 男, 陕西西安, 教授, 博士, 主要研究方向: 数学物理方程反问题, 科学与工程计算与计算机模拟等. E-mail: mintao2003@163.com.

对于周期问题, 这里选择用 Fourier 谱方法, 为了获得差分矩阵, 首先利用谱配置法, 它是一种基于权函数的插值, 形式如 (2.1) 式:

$$f(x) \approx p_{N-1}(x) = \sum_{j=1}^N \frac{\alpha(x)}{\alpha(x_j)} \phi_j(x) f_j, \quad (2.1)$$

其中  $\{x_j\}_{j=1}^N$  是插值节点的集合,  $\alpha(x)$  为权函数,  $f_j = f(x_j)$ , 插值函数  $\{\phi_j(x)\}_{j=1}^N$  满足  $\phi_j(x_k) = \delta_{jk}$ . 这也就是说  $p_{N-1}(x)$  作为  $f(x)$  的一种插值, 有 (2.2) 式成立.

$$f(x_k) = p_{N-1}(x_k), k = 1, 2, \dots, N, \quad (2.2)$$

对 (2.2) 式, 在各节点  $x_k$  处求  $n$  阶导数可得 (2.3) 式,

$$f^{(n)}(x) \approx \sum_{j=1}^N \frac{d^n}{dx^n} \left[ \frac{\alpha(x)}{\alpha(x_j)} \phi_j(x) \right]_{x=x_k} f_j, \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.3)$$

导数的求解用一个矩阵  $D^{(n)}$  表示, 则可推导出 (2.4) 式,

$$D_{k,j}^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n} \left[ \frac{\alpha(x)}{\alpha(x_j)} \phi_j(x) \right]_{x=x_k}. \quad (2.4)$$

因此有如下数值差分过程:

$$f^{(n)} = D^{(n)} f, \quad (2.5)$$

这里  $f$  为函数在各节点  $x_k$  处的函数值,  $f^{(n)}$  为函数在各节点  $x_k$  处近似得到的导数值. 求解微分方程时, 导数通过 (2.5) 的离散近似. 对于 Fourier 谱方法, 取  $x_k = (k-1)h$ , 这里  $h = \frac{2\pi}{N}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, N$ ,

$$p_N(x) = \sum_{j=1}^N \phi_j(x) f_j. \quad (2.6)$$

权函数  $\alpha(x) = 1$ , 这里

$$\begin{cases} \phi_j(x) = \frac{1}{N} \sin \frac{N}{2}(x-x_j) \cot \frac{1}{2}(x-x_j), & n \text{ 为偶数,} \\ \phi_j(x) = \frac{1}{N} \sin \frac{N}{2}(x-x_j) \csc \frac{1}{2}(x-x_j), & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

则对应的插值函数, 当  $N$  为偶数时为

$$p_N(x) = \frac{\sum_{j=1}^N (-1)^j f_j \cot \frac{1}{2}(x-x_j)}{\sum_{j=1}^N (-1)^j \cot \frac{1}{2}(x-x_j)};$$

当  $N$  为奇数时为

$$p_N(x) = \frac{\sum_{j=1}^N (-1)^j f_j \csc \frac{1}{2}(x-x_j)}{\sum_{j=1}^N (-1)^j \csc \frac{1}{2}(x-x_j)}. \quad (2.7)$$

故当  $N$  是偶数时,

$$\begin{aligned} D_{kj}^{(1)} &= \begin{cases} 0, & k = j, \\ \frac{1}{2}(-1)^{k-j} \cot \frac{(k-j)h}{2}, & k \neq j, \end{cases} \\ D_{kj}^{(2)} &= \begin{cases} -\frac{\pi^2}{3h^2} - \frac{1}{6}, & k = j, \\ -(-1)^{k-j} \frac{1}{2} \csc^2 \frac{(k-j)h}{2}, & k \neq j; \end{cases} \end{aligned} \quad (2.8)$$

当  $N$  是奇数时,

$$\begin{aligned} D_{kj}^{(1)} &= \begin{cases} 0, & k = j, \\ \frac{1}{2}(-1)^{k-j} \csc \frac{(k-j)h}{2}, & k \neq j, \end{cases} \\ D_{kj}^{(2)} &= \begin{cases} -\frac{\pi^2}{3h^2} - \frac{1}{12}, & k = j, \\ -(-1)^{k-j} \frac{1}{2} \csc \frac{(k-j)h}{2} \cot \frac{(k-j)h}{2}, & k \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

此外, 当  $N$  是奇数时有

$$D^{(\ell)} = (D^{(1)})^\ell;$$

当  $N$  是偶数时, 这个公式仅适用于  $\ell$  是奇数的情形. 可得  $N$  为偶数时,  $k = 1, \dots, N$ , 有

$$p_N(x_k) = \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} \alpha_j e^{ijx_k} \Rightarrow p_N^{(\ell)}(x_k) = \begin{cases} \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} (ij)^\ell \alpha_j e^{ijx_k}, & \ell \text{ 偶数}, \\ \sum_{j=-N/2+1}^{N/2-1} (ij)^\ell \alpha_j e^{ijx_k}, & \ell \text{ 奇数}; \end{cases}$$

当  $N$  是奇数时,  $k = 1, \dots, N$ , 有

$$p_N(x_k) = \sum_{j=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \alpha_j e^{ijx_k} \Rightarrow p_N^{(\ell)}(x_k) = \sum_{j=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} (ij)^\ell \alpha_j e^{ijx_k}.$$

### 3 离散过程

考虑如下非线性 Klein-Gordon 方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u|^\beta u = f, \\ u(x, 0) = g_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_1(x), \\ u(a, t) = u(b, t), \end{cases} \quad x \in [a, b], 0 < t, \quad (3.1)$$

其中  $\beta$  是参数,  $g_0(x)$ ,  $g_1(x)$  为初始条件.

由于变量  $x$  定义的区间为  $[a, b]$ , 先需要通过一个线性变换  $x \leftrightarrow a + \frac{1}{2\pi}(b-a)x$ , 将  $x$  变换到  $[0, 2\pi]$  上然后求解. 对 (3.1) 式其变形. 令  $\frac{\partial u}{\partial t} = v$ , 则该方程变为如下方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - |u|^\beta u + f, \\ u(x, 0) = g_0(x), \\ v(x, 0) = g_1(x), \\ u(a, t) = u(b, t), \end{cases} \quad x \in [a, b], 0 < t.$$

对空间变量  $x$  进行离散得二阶导数

$$\left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1, t), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_2, t), \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{n-1}, t), \frac{\partial^m u}{\partial x^m}(x_n, t) \right]^T \approx D^{(2)} \begin{bmatrix} u(x_1, t) \\ u(x_2, t) \\ \vdots \\ u(x_{n-1}, t) \\ u(x_n, t) \end{bmatrix},$$

其中  $D^{(2)}$  为二阶 Fourier 谱差分矩阵导数, 于是得如下式

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t), \frac{\partial u}{\partial t}(x_2, t), \dots, \frac{\partial u}{\partial t}(x_{n-1}, t), \frac{\partial u}{\partial t}(x_n, t) \right]^T \\ = & [v(x_1, t), v(x_2, t), \dots, v(x_{n-1}, t), v(x_n, t)]^T, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial t}(x_1, t) \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x_2, t) \\ \vdots \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x_{n-1}, t) \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x_n, t) \end{bmatrix} \approx D^{(2)} \begin{bmatrix} u(x_1, t) \\ u(x_2, t) \\ \vdots \\ u(x_{n-1}, t) \\ u(x_n, t) \end{bmatrix} \\ - & \begin{bmatrix} |u(x_1, t)|^\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |u(x_2, t)|^\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |u(x_n, t)|^\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x_1, t) \\ u(x_2, t) \\ \vdots \\ u(x_{n-1}, t) \\ u(x_n, t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(x_1, t) \\ f(x_2, t) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}, t) \\ f(x_n, t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

这样方程 (3.1) 变成了 (3.2) 和 (3.3) 式组成的常微分方程组

$$\frac{dY}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dU}{dt} \\ \frac{dV}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ D^{(2)}U - KU + F \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

其中

$$Y = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}, V = [v(x_1, t), v(x_2, t), \dots, v(x_{n-1}, t), v(x_n, t)]^T,$$

$$K = \begin{bmatrix} |u(x_1, t)|^\beta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |u(x_2, t)|^\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |u(x_n, t)|^\beta \end{bmatrix},$$

$$U = [u(x_1, t), u(x_2, t), \dots, u(x_{n-1}, t), u(x_n, t)]^T, F = [f(x_1, t), f(x_2, t), \dots, f(x_n, t)]^T.$$

对这个常微分方程可用经典 Runge-Kutta 算法进行求解. 为方便起见, 令右端项

$$\begin{bmatrix} V \\ D^{(2)}U - KU + F \end{bmatrix} = g(t, Y).$$

那么对于方程 (3.4) 有

$$\begin{aligned} Y_{k+1} &= Y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), k_1 = g(t_k, Y_k), \\ k_2 &= g(t_k + \frac{h}{2}, Y_k + \frac{h}{2}k_1), \quad k_3 = g(t_k + \frac{h}{2}, Y_k + \frac{h}{2}k_2), \quad k_4 = g(t_k + h, Y_k + hk_3), \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中  $h$  为时间步长,  $k$  为时间节点,  $Y_k = [Y(x_1, t_k), Y(x_2, t_k), \dots, Y(x_n, t_k)]^T$ . 这样我们便可以求出方程 (3.4) 的数值解.

#### 4 数值模拟

由于谱配置法对光滑性有很高的要求, 所以考虑如下非线性 Klein-Gordon 方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u|^\beta u = f, \\ u(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} |_{t=0} = \sin(\pi x), u(-1, t) = u(1, t) = 0, \end{cases} \quad x \in [-1, 1], t \in [0, 1], \quad (4.1)$$

其中

$$f = -2 \sin(\pi x) + |(t - t^2) \sin(\pi x)|^\beta (t - t^2) \sin(\pi x) + \pi^2 \sin(\pi x)(t - t^2)$$

真解为  $u(x, t) = (t - t^2) \sin(\pi x)$ .

采用 Fourier 谱方法, 由于方程对时间离散采用的是显式龙格库塔方法求解, 且离散过程中有一个是抛物型方程, 所以时间步长必须选取较小才能保证数值稳定性, 这里选取时间步长  $h = 0.001$ , 空间变量  $x$  节点数  $N = 20$ ,  $\beta$  取不同值时所得真解与近似解的误差, 所得结果如表 1 所示 (其中绝对误差为:  $\|uz - u\|_2$ , 相对误差:  $\frac{\|uz - u\|_2}{\|uz\|_2}$ ,  $uz$  为  $t$  个时间节点时  $u$  在 20 个空间节点处的真解构成的矩阵,  $u$  为  $t$  个时间节点时  $u$  在 20 个空间节点处的近似解构成的矩阵).

表 1: 真解与近似解的误差 (其中  $uz$  为真解,  $u$  为近似解)

$\beta$	绝对误差	相对误差	CPU 运行时间 (秒)
2	$2.236079911505856 \times 10^{-13}$	$1.224751407916525 \times 10^{-14}$	0.393626
3	$2.188729921386368 \times 10^{-13}$	$1.198816750230422 \times 10^{-14}$	0.376858
4	$2.208080992677081 \times 10^{-13}$	$1.209415768488241 \times 10^{-14}$	0.390962
5	$2.181900039231277 \times 10^{-13}$	$1.195075869708975 \times 10^{-14}$	0.352347
6	$2.262120941674216 \times 10^{-13}$	$1.239014667560416 \times 10^{-14}$	0.374995
7	$2.285368276389716 \times 10^{-13}$	$1.251747757185974 \times 10^{-14}$	0.393750
8	$2.188908576636602 \times 10^{-13}$	$1.198914603740992 \times 10^{-14}$	0.375321

表 2:  $u(1/2, 0.01)$  的真解与近似解以及误差 (时间步长  $h = 0.001$ ,  $\beta = 3$ )

$N$	真解	本文方法数值解	本文方法绝对误差	文献 [10] 数值解	文献 [10] 绝对误差
8	$9.9000000 \times 10^{-3}$	$9.9000000 \times 10^{-3}$	$1.1622647 \times 10^{-16}$	$9.91306 \times 10^{-3}$	$1.3096 \times 10^{-5}$
12	$9.9000000 \times 10^{-3}$	$9.9000000 \times 10^{-3}$	$1.1796120 \times 10^{-16}$	$9.900053 \times 10^{-3}$	$5.3 \times 10^{-8}$

采用 Fourier 谱方法, 取时间步长  $h = 0.001$ , 空间变量  $x$  节点数  $N = 12$ , 所得结果如图 1, 图 2 及图 3 所示, 其中图 1 为方程的近似解, 图 2 为方程的真解, 图 3 表示时间  $t = 0.01$  时各节点  $u$  在  $x$  各节点处解与真解的绝对误差.

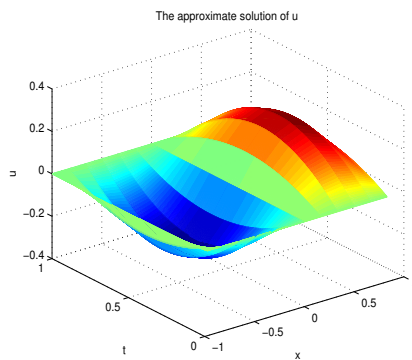


图 1: 方程的近似解

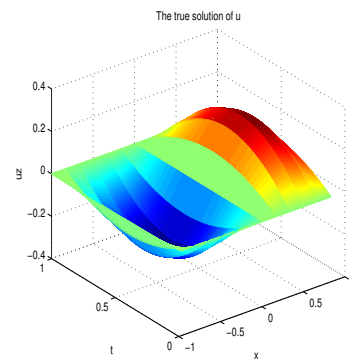


图 2: 方程的真解

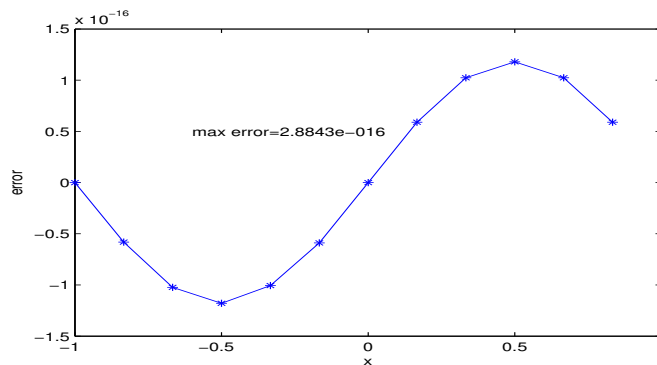


图 3: 时间  $t = 0.01$  时各节点  $u$  在  $x$  各节点处解与真解的绝对误差

取  $\beta = 3$ , 采用 Fourier 谱方法, 时间步长  $h = 0.001$ , 空间变量  $x$  节点数  $N = 8, 12$ , 所得  $u(1/2, 0.01)$  的结果与文献 [10] 相比较, 结果如表 2 所示.

通过比较我们可以发现本文方法比文献 [10] 中方法具有更高的精度.

## 5 结论

(1) 本文针对一类非线性 Klein-Gordon 方程, 给出了利用 Fourier 谱配置法求其数值解的推导过程并进行了数值模拟. 结果表明这种方法对于求解此类非线性 Klein-Gordon 方程具有较好的效果.

(2) 谱方法对解的光滑性一般要求很高, 本文仅对 Klein-Gordon 方程的光滑解进行了数值模拟, 另外, 此方法对时间步长的要求也较为严格, 本文分别取  $h = 0.01, 0.001$  时效果较好, 但对于大时间步长的情况还待进一步探讨和研究.

## 参 考 文 献

- [1] Nakao H, Pavel I N. Wave operators to a quadratic non linear Klein-Gordon equation in two space dimensions [J]. *Nonlinear Anal. TMA*, 2009, 71 (9): 3826–3833.
- [2] Han H D, Zhang Z W. An analysis of the finite-difference method for one-dimensional Klein-Gordon equation on unbounded domain [J]. *Appl. Numer. Math.*, 2009, 59 (7): 1568–1583.
- [3] Khalifa M E, Elgamal M. A numerical solution to Klein-Gordon equation with Dirichlet boundary condition [J]. *Appl. Math. Comput.*, 2005, 160 (2): 451–475.
- [4] Wang Q F, Cheng D Z. Numerical solution of damped-nonlinear Klein-Gordon equations using variational method and finite element approach [J]. *Appl. Math. Comput.*, 2005, 162 (1): 381–401.
- [5] 李保安, 李向正, 罗娜, 赵紫成, 王明亮.  $n$  维 Klein-Gordon 方程的一种解法 [J]. *河南科技大学学报 (自然科学版)*, 2004, 25(1): 78–81.
- [6] 甘在会, 张健. 一类耦合非线性 Klein-Gordon 方程组的驻波 [J]. *数学物理学报*, 2006, 26A(4): 559–569.
- [7] 董长紫. Klein-Gordon 方程的精确解 [J]. *商丘师范学院学报*, 2011, 27(1): 38–41.
- [8] 刘洋, 邓磊, 杨植宗, 谢艳丁. 一维 Klein-Gordon 晶格中非线性局域模稳定性研究 [J]. *空军雷达学院学报*, 2011, 25(3): 221–223.
- [9] 张治国, 吴闯. 磁场中的 Klein-Gordon 方程的量子与经典对应 [J]. *沈阳师范大学学报 (自然科学版)*, 2010, 28(3): 379–382.
- [10] Lee I J. Numerical solution for nonlinear Klein-Gordon equation by collocation method with respect to spectral method [J]. *J. Korean Math. Soc.*, 1995, 32(3): 541–551.

## THE NUMERICAL SOLUTION OF A CLASS OF NONLINEAR KLEIN-GORDON EQUATION

MIN Tao, REN Ju-cheng, GENG Bei

*(School of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)*

**Abstract:** This paper studies a class of nonlinear Klein-Gordon equation. By using Fourier spectral method, we conduct the research on its direct problem and give the discrete process of finding solutions as well as do the numerical simulation and compare it with the result of literature. The result shows that the method has better effect on solving this kind of nonlinear Klein-Gordon equation.

**Keywords:** nonlinear Klein-Gordon equation; Fourier spectral method; spectrum allocation method

**2010 MR Subject Classification:** 81Q05