Vol. 34 (2014)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

唯一 $g(x)$-clean 环

孙晓青, 李吉文, 沈晓芹
(西安理工大学理学院, 陕西 西安 710054)

摘 要: 本文研究了唯一 $g(x)$-clean 环的性质与结构. 利用 $g(x)$-clean 环的方法, 得到了唯一 $g(x)$-clean 环与 $g(x)$-clean 环的关系, 唯一 $g(x)$-clean 环与一类特殊的生成环的等价条件, 以及斜 Hurwitz 级数环的 $g(x)$-clean 性, 推广了 $g(x)$-clean 环的研究结果.

关键词: $g(x)$-clean 环; 唯一 clean 环; 斜 Hurwitz 级数
MR(2010) **主题分类号**: 16U99　　**中图分类号**: O153.3
文献标识码: A　　**文章编号**: 0255-7797(2014)04-0739-08

1 引言

如果环 R 中的每个元素都可以写成一个幂等元和一个可逆元的和, 那么称 R 为 clean 环 [1]. 如果 R 的每个元素的 clean 表示是唯一的, 那么称 R 为唯一 clean 环 [2]. 很多学者对这类环做了深刻的研究, 见文献 [3–6]. 设 $C=C(R)$ 为环 R 的中心, $g(x)$ 是 $C(R)[x]$ 中的多项式, 如果 R 的每个元素 r 可以表示为 $r=s+u$ 的形式, 其中 $g(s)=0, u\in U(R)$, Camillo-Simón 称满足此条件的环为 $g(x)$-clean 环 [7]. 类似于强 clean 环, Fan-Yang 研究了强 $g(x)$-clean 环 [8], 文献 [9–11] 还探讨了 clean 环与 $g(x)$-clean 环的关系. 本文定义了唯一 $g(x)$-clean 环, 研究了唯一 $g(x)$-clean 环结构和性质, 得到了唯一 $g(x)$-clean 环与 $g(x)$-clean 环的关系, 唯一 $g(x)$-clean 环与一类特殊的生成环的等价条件, 以及斜 Hurwitz 级数环的 $g(x)$-clean 性, 推广了 $g(x)$-clean 环的研究结果. 文中环是含单位元的结合环, $U(R)$ 是 R 的可逆元的集合, $J(R)$ 是 R 的 Jacobson 根, $E(R)$ 是 R 的幂等元的集合.

2 主要结果

定义 2.1 设 $g(x)$ 是 $C(R)[x]$ 上的给定多项式, $r\in R$. 如果 $r=s+u$, 满足 $g(s)=0, u\in U(R)$, 且此表示是唯一的, 那么称 r 是唯一 $g(x)$-clean 的. 如果环 R 的每一个元素都是唯一 $g(x)$-clean 的, 那么称 R 是唯一 $g(x)$-clean 环.

唯一 (x^2-x)-clean 环是一类特殊的唯一 clean 环, 存在是唯一 clean 环, 但不是唯一 $g(x)$-clean 环的例子, 如下:

例 2.2 设 R 是 Boolean 环. 其中元素个数 $|R|>2$, 取 $c\in R$ 且 $0\neq c\neq 1$. 令 $g(x)=(x+1)(x+c)$. 则由推论 2[2] 知 R 是唯一 clean 的, 但由例 2.3[8] 知 R 不是 $g(x)$-clean 的, 因此也不是唯一 $g(x)$-clean 的.

*收稿日期: 2013-09-10　　接收日期: 2013-12-17
基金项目: 国家自然科学青年基金资助项目 (NSFC 11101330); 陕西省青年科技新星计划 (2013KJXX-34); 西安市科技厅计划 (CXY1341(4)).
作者简介: 孙晓青 (1984–) 女, 河南郾城, 讲师, 研究方向: 环论.

然而, 在某些特定类型的多项式里, 唯一 clean 和唯一 $g(x)$-clean 是等价的. 如下:

定理 2.3 设 R 是环, $g(x)=(x-a)(x-b)\in C(R)[x]$, 其中 $a,b\in C(R)$. 则下列说法成立:

(1) R 是唯一 $(x-a)(x-b)$-clean 的, 当且仅当 R 是唯一 clean 的且 $b-a\in U(R)$;

(2) 若 R 是唯一 clean 的且 $b-a\in U(R)$, 则 R 是唯一 $g(x)$-clean 的.

证 (1) $\Leftarrow$ 设 $r\in R$. 由 R 是唯一 clean 的且 $(b-a)\in U(R)$ 知, 存在 $e\in E(R)$, $u\in U(R)$, 使得 $\frac{r-a}{b-a}=e+u$, 且此表示是唯一的. 因此 $r=[e(b-a)+a]+u(b-a)$, 易见 $u(b-a)\in U(R)$, $e(b-a)+a$ 是 $(x-a)(x-b)$ 的根. 故 r 是 $(x-a)(x-b)$-clean 的.

下面证唯一性, 若 r 还可以表示为 $r=s+v$, 其中 $(s-a)(s-b)=0, v\in U(R)$. 由此可得

$$\frac{r-a}{b-a}=\frac{s-a}{b-a}+\frac{v}{b-a},$$

由已知 $b-a\in U(R)$ 得 $\frac{v}{b-a}\in U(R)$, 且

$$(\frac{s-a}{b-a})^2=\frac{(s-a)(s-b+b-a)}{(b-a)^2}=\frac{(s-a)(b-a)}{(b-a)^2}=\frac{s-a}{b-a}.$$

再由 R 是唯一 clean 的可得 $e=\frac{s-a}{b-a}$, $u=\frac{v}{b-a}$, 从而 $s=e(b-a)+a$, $v=u(b-a)$. 综上, R 是唯一 $(x-a)(x-b)$-clean 的.

$\Rightarrow$ 因为 a 是唯一 $(x-a)(x-b)$-clean 的, 所以存在 $s_1\in R$, $u_1\in U(R)$ 使得 $a=s_1+u_1$, 其中 $(s_1-a)(s_1-b)=0$ 且此表示是唯一的. 易得 $s_1=b$, 从而 $(b-a)\in U(R)$. 取任意 $r\in R$. 因为 R 是唯一 $(x-a)(x-b)$-clean 的, 所以存在 $s\in R$, $u\in U(R)$ 使得 $r(b-a)+a=s+u$, 其中 $(s-a)(s-b)=0$. 因此 $r=\frac{s-a}{b-a}+\frac{u}{b-a}$, 易得 $\frac{s-a}{b-a}\in E(R)$, $\frac{u}{b-a}\in U(R)$. 故 r 是 clean 的. 若 r 还有 clean 表示 $r=e+v$, 其中 $e\in E(R)$, $v\in U(R)$. 因此 $r(b-a)+a=e(b-a)+a+v(b-a)$, 这里

$$v(b-a)\in U(R),\ [e(b-a)+a-a][e(b-a)+a-b]=0.$$

由已知 R 是唯一 $(x-a)(x-b)$-clean 的, 我们有 $e(b-a)+a=s$ 和 $v(b-a)=u$. 从而可得 $e=\frac{s-a}{b-a}$ 和 $v=\frac{u}{b-a}$. 故 R 是唯一 clean 的.

(2) 由 (1) 可以得证.

推论 2.4 设 R 是环. R 是唯一 clean 的当且仅当 R 是唯一 (x^2+x)-clean 的.

证 在定理 2.3 中令 $a=0$ 和 $b=-1$ 即可得证.

注 2.5 唯一 (x^2+x)-clean 环和唯一 clean 环是等价的, 此结论对环是成立的, 但对单个元素不成立. 设 $\mathbb{Z}$ 表示整数环, 例如 $1+1=2\in\mathbb{Z}$ 在环 $\mathbb{Z}$ 中是唯一 clean 元, 然而易验证 2 在环 $\mathbb{Z}$ 中并不是唯一 (x^2+x)-clean 元.

命题 2.6 设 $\mathbb{Z}$ 表示整数环. 令 $g(x)\in\mathbb{Z}[x]$ 且 $\{R_i\}_{i\in I}$ 是一组环. 则 Π_iR_i 是唯一 $g(x)$-clean 的当且仅当每一个 R_i, $i\in I$ 是唯一 $g(x)$-clean 的.

证 如果 Π_iR_i 是唯一 $g(x)$-clean 的, 那么由命题 2.7[8] 知对任意的 i, R_i 是 $g(x)$-clean 的. 设 $x_i\in R_i$ 且 $x_i=a_i+u_i=b_i+v_i$, 这里

$$g(a_i)=0=g(b_i),\ u_i,\ v_i\in U(R).$$

则由积的定义知 $(x_i)=(a_i)+(u_i)=(b_i)+(v_i)$, 且 $g((a_i))=0=g((b_i))$, (u_i), $(v_i)\in U(\Pi_iR_i)$. 因此 $(a_i)=(b_i)$, $(u_i)=(v_i)$. 故 $a_i=b_i, u_i=v_i$.

设对任意的 $i \in I$, R_i 是唯一 $g(x)$-clean 的, 则由命题 2.7[8] 知 $\Pi_i R_i$ 是 $g(x)$-clean 的. 设 $(x_i) \in \Pi_i R_i$, 其中 $x_i \in R_i$. 假设 $(x_i) = (a_i) + (u_i) = (b_i) + (v_i)$, 这里

$$g((a_i)) = 0 = g((b_i)),\ (u_i),\ (v_i) \in U(\Pi_i R_i).$$

则由积的定义知 $x_i = a_i + u_i = b_i + v_i$, 其中 $g(a_i) = 0 = g(b_i)$, $u_i, v_i \in U(R)$. 因此 $a_i = b_i$, $u_i = v_i$. 故 $(a_i) = (b_i)$, $(u_i) = (v_i)$.

命题 2.7 设 R 是环, $I \subseteq J(R)$ 是 R 的理想. 对于任意的 $g(x) \in C(R)[x]$, $\bar{g}(x) \in C(R/I)[x]$ 的根提升模 I, 如果 R 是唯一 $g(x)$-clean 的, 那么 R/I 是唯一 $\bar{g}(x)$-clean 的.

证 设 $\bar{R} = R/I$. 由推论 2.5[8] 知 $\bar{R}$ 是 $\bar{g}(x)$-clean 的. 对任意的 $\bar{r} \in \bar{R}$, 设

$$\bar{r} = \bar{s_1} + \bar{u_1} = \bar{s_2} + \bar{u_2},$$

其中 $\bar{s_1}$, $\bar{s_2}$ 是 $\bar{g}(x)$ 的根, $\bar{u_1}$, $\bar{u_2} \in U(\bar{R})$. 因为 $\bar{g}(x)$ 的根提升模 I, 所以 s_1, $s_2 \in R$ 且 $g(s_1) = g(s_2) = 0$. 因为 $J(R) = \{r \in R \mid$ 对任意可逆元 $a \in R$ 有 $r + a$ 仍是可逆元 $\}$, 所以存在 a, $b \in I$ 使得 $u = u_1 + a$, $v = u_2 + b \in U(R)$. 故 $r = s_1 + u = s_2 + v$. 由 R 的唯一性可知 $s_1 = s_2$, $u_1 = u_2$. 由此可得 $\bar{s_1} = \bar{s_2}$ 和 $\bar{u_1} = \bar{u_2}$.

文献 [2, 4] 证明了环 R 是唯一 clean 的, 且 $e \in E(R)$, 则 eRe 也是唯一 clean 的. 对唯一 $g(x)$-clean 环, 有下面结论:

定理 2.8 设 R 是唯一 $(x-a)(x-b)$-clean 环, 其中 a, $b \in C(R)$. 则对意的 $e \in E(R)$, eRe 是唯一 $(x-ea)(x-eb)$-clean 的. 特别的, 如果 $g(x) \in (x-ea)(x-eb)C(R)[x]$ 且 R 是唯一 $(x-a)(x-b)$-clean 的, 那么 eRe 是唯一 $g(x)$-clean 的.

证 由定理 2.3, R 是唯一 $(x-a)(x-b)$-clean 的当且仅当 R 是唯一 clean 的且 $b - a \in U(R)$. 由推论 5[2] 知, 若 R 是唯一 clean 的, 则 eRe 唯一 clean 的. 再利用定理 2.3, eRe 是唯一 $(x-ea)(x-eb)$-clean 的.

为了找到非交换的唯一 clean 环, 我们做了下面的工作. 设 R 是环, ${}_RV_R$ 是 R-R- 双模, 它也是一个一般环. 对于所有的 v, $w \in V$ 和 $r \in R$ 有

$$(vw)r = v(wr),\ (vr)w = v(rw),\ (rv)w = r(vw).$$

则 R 的理想扩张为 $I(R;V) = R \oplus V$, 其中乘法运算为 $(r,v)(s,w) = (rs, rw + vs + vw)$. 注意, 如果 S 是环且 $S = R \oplus A$, 其中 R 是子环且 $A \triangleleft S$, 那么 $S \simeq I(R;A)$.

命题 2.9 理想扩张 $S = I(R;V)$, 如果满足下面条件, 那么 S 是唯一 $g(x)$-clean 的, 其中 $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{n}(a_i,0)x^i \in C(S)[x]$.

(1) R 是唯一 $g'(x)$-clean 的, 此处 $g'(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i \in C(R)[x]$;

(2) 若 $g'(x) = 0$, 则对任意 $v \in V$ 有 $xv = vx$;

(3) 对任意 $x \in V$, 如果存在 $r \in R$ 和 $v \in V$ 使得 $x(r+v) = 0$, 那么 $x = 0$;

(4) 如果 $v \in V$, 那么对任意 $w \in$ 有 $v + w + vw = 0$.

证 令 $s = (r,v) \in S$. 由已知 R 是唯一 $g'(x)$-clean 的, 则存在 $t \in R$ 和 $u \in U(R)$ 使得 $r = t + u$, 其中 $g'(t) = 0$. 因此 $s = (r,v) = (t,0) + (u,v)$. 因为

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i,0)(t,0)^i = (\sum_{i=0}^{n} a_i t^i, 0) = (0,0),$$

$(u,v)\in U(S)$ (事实上 $(u,v)=(u,0)(1,u^{-1}v)$). 又因为 $(0,v)\subseteq J(S)$, 所以

$$(1,u^{-1}v)=(1,0)+(0,u^{-1}v)\in U(S).$$

则 s 是 $g(x)$-clean 的. 假设 $s=(t',x')+(u',v')$, 其中 $g((t',x'))=0$, $(u',v')\in U(S)$. 则有 $t+u=t'+u'$, 其中 $g'(t')=0$, $u'\in U(S')$. 由 R 的唯一性得 $t=t'$ 以及 $u=u'$. 由条件 (2) 得

$$\begin{aligned}
&g((t',x'))=\sum_{i=0}^{n}(a_i,0)(t',x')^i\\
=\ &(\sum_{i=0}^{n}a_it^i,\sum_{i=0}^{n}a_i(C_i^1t'^{i-1}x'+C_i^2t'^{i-2}x'^2+\cdots+C_i^ix'^i)\\
=\ &(0,x'(\sum_{i=0}^{n}a_i(C_i^1t'^{i-1}+C_i^2t'^{i-2}x'^1+\cdots+C_i^ix'^{i-1}))=(0,0).
\end{aligned}$$

由条件 (3) 知 $x'=0$. 故 S 是唯一 $g(x)$-clean 的.

下面给出了唯一 $g(x)$-clean 环和由可逆元和 1 的根生成的环的关系.

定理 2.10 设 R 是一个环和 $n\in\mathbb{N}$. 则下面结论是等价的:

(1) R 是唯一 (x^2-2^nx)-clean;

(2) R 是唯一 (x^2-1)-clean;

(3) R 是唯一 clean 的且 $2\in U(R)$;

(4) $R=U_2(R)$ 且对任意 $a\in R$, a 可以唯一表示为 $a=u+v$, 其中 u, $v\in U(R)$ 且 $v^2=1$.

证 (1) $\Rightarrow$ (3) 为了证明 $2\in U(R)$. 用反证法, 假设 $2\notin U(R)$. 则 $\bar{R}=R/(2^nR)\neq 0$. 设 $2^n=s+u$ 且 $s^2-2^ns=0$, $u\in U(R)$. $\bar{0}=\overline{2^n}=\bar{s}+\bar{u}$ 意味着 $\bar{s}=-\bar{u}\in U(\bar{R})$. 然而 $\bar{s}^2=\overline{s^2}=\overline{2^ns}=\bar{0}$, 这是矛盾的. 所以 $2\in U(R)$. 由定理 2.3(1), 设 $a=0$ 和 $b=2^n$. 因此 R 是唯一 clean 的.

(3) $\Rightarrow$ (1) 由定理 2.3(1) 易见.

(3) $\Rightarrow$ (4) 设 $a\in R$. 在 (1) $\Leftrightarrow$ (3) 中令 $n=1$. 则 $1-a=s+u$, 其中 $s^2=2s$, $u\in U(R)$, 且此表示是唯一的. 因此 $a=(-u)+(1-s)$, 其中 $-u\in U(R)$, $(1-s)^2=1$. 假设 $a=w+v$, 其中 w, $v\in U(R)$, $v^2=1$. 则 $1-a=(-w)+(1-v)$, 其中 $(-w)\in U(R)$, $(1-v)^2=2(1-v)$. 因此 R 是唯一 (x^2-2x)-clean 的, 且 $-w=u$, $1-v=s$. 所以 $w=-u$, $v=1-s$.

(4) $\Rightarrow$ (3) 设 $a\in R$, 则存在 $u\in U(R)$ 和 $v^2=1$ 使得 $1-a=u+v$. 因此 $a=(-u)+(1-v)$, 其中 $-u\in U(R)$, $(1-v)^2=2(1-v)$. 假设 $a=s+w$, 其中 $w\in U(R)$, $s^2=2s$. 在 (1) $\Leftrightarrow$ (3) 中令 $n=1$, 即可得 (4) $\Rightarrow$ (3).

(2) $\Rightarrow$ (4) 若 R 是唯一 (x^2-1)-clean 的, 则对任意的 $r\in R$ 存在 u, $v\in U(R)$ 且 $v^2=1$ 使得 $r=u+v$, 而且此表示是唯一的.

(4) $\Rightarrow$ (2) 设 $a\in R$. 则 a 可以唯一表示为 $a=u+v$, 其中 u, $v\in U(R)$, $v^2=1$. 可见 v 是 x^2-1 的根. 故 R 是唯一 (x^2-1)-clean 的.

类似于定理 2.10, 可以证明下面的结论.

推论 2.11 设 m, $k\in\mathbb{N}$. 对于任意的环 R 和一个固定的整数 $n>0$, 下面结论是等价的:

(1) R 是唯一 (x^2-n^mx)-clean;

(2) R 是唯一 (x^2+n^kx)-clean;

(3) R 是唯一 (x^2-nx)-clean;

(4) R 是唯一 (x^2+nx)-clean;

(5) R 是唯一 clean 的且 $n\in U(R)$.

命题 2.12 设 R 是环且 $n\in\mathbb{N}$. 则 R 是唯一 $(ax^{2n}-bx)$-clean 的当且仅当 R 是唯一 $(ax^{2n}+bx)$-clean 的.

证 $\Rightarrow$ 由命题 4.1[8] 知 R 是 $(ax^{2n}+bx)$-clean 的. 假设 $r=s_1+u_1=s_2+u_2$, 其中 s_1, s_2 是 $(ax^{2n}+bx)$ 的根, u_1, $u_2\in U(R)$. 因此

$$-r=-s_1-u_1=-s_2-u_2,$$

这里 $(-u_1)$, $(-u_2)\in U(R)$, $a(-s_1)^{2n}-b(-s_1)=0$, $a(-s_2)^{2n}-b(-s_2)=0$. 因为 R 是唯一 $(ax^{2n}-bx)$-clean 的, 所以 $-s_1=-s_2$ 和 $-u_1=-u_2$, 即得 $s_1=s_2$, $u_1=u_2$. 故 R 是唯一 $(ax^{2n}+bx)$-clean 的.

$\Leftarrow$ 类似于必要性的证明.

命题 2.13 设 R 是唯一 (x^n-x)-clean 环 $(n\geq 2)$, $a\in R$, 则要么

(1) a 可以唯一的表示为 $a=u+v$, 其中 $u\in U(R), v^{n-1}=1$; 或者

(2) aR 和 Ra 都包含非平凡幂等元.

证 因为 R 是唯一 (x^n-x)-clean 环, 所以存在 $u\in U(R)$, $s^n=s$, 使得 $a=s+u$. 有 $as^{n-1}=s+us^{n-1}$, 也就是说, $a(1-s^{n-1})=u(1-s^{n-1})$. 因为 $1-s^{n-1}$ 是一个幂等元, 由引理 4.3[8] 可知 $u(1-s^{n-1})=fw$, 这里 $f\in E(R)$, $w\in U(R)$. 于是 $f=a(1-s^{n-1})w^{-1}\in aR$. 假设 (1) 不成立, 则 $1-s^{n-1}\neq 0$. 因此 $f\neq 0$. 所以 aR 包含非平凡幂等元. 同理, Ra 也包含非平凡幂等元.

在文献 [4] 中证明了如果 e 是 R 的幂等元, 且 eRe 和 $(1-e)R(1-e)$ 是 clean 环, 则 R 是 clean 环. 由此 R 上的 $n\times n$ 矩阵环是 clean 的. 这个结果我们可以扩展到 $g(x)$-clean 环.

定理 2.14 设 R 是环, $g(x)\in C(R)[x]$. 对任意 $e\in E(R)$, eRe 和 $(1-e)R(1-e)$ 都是 $g(x)$-clean 环, 则 R 也是 $g(x)$-clean 环.

证 用 $\bar{e}$ 去表示 $1-e$, 再用 Pierce 分解去分解环 R, 即

$$R=eRe+eR\bar{e}+\bar{e}Re+\bar{e}R\bar{e}.$$

设 $x\in R$. 则可记

$$x=a+b+c+d,$$

这里 a, b, c , d 分别属于 eRe, $eR\bar{e}$, $\bar{e}Re$ 和 $\bar{e}R\bar{e}$.

由已知 a 是 $g(x)$-clean 的, 则存在 s_1, $u_1\in eRe$ 使得 $a=s_1+u_1$, 其中

$$g(s_1)=0,\ u_1\in U(R),$$

又 $d-cu_1^{-1}b\in\bar{e}R\bar{e}$, 由已知它可以表示为 $d-cu_1^{-1}b=s_2+u_2$, 其中 $g(s_2)=0$, $u_2\in U(\bar{e}R\bar{e})$. 故

$$\begin{aligned}x=a+b+c+d&=(s_1+u_1)+b+c+(s_2+u_2+cu_1^{-1}b)\\&=(s_1+s_2)+(u_1+b+c+u_2+cu_1^{-1}b).\end{aligned}$$

易证 $g(s_1+s_2)=0$, $u_1+b+c+u_2+cu_1^{-1}b$ 是 R 的可逆元.

有下面事实成立.

(1) 对任意 $f\in eRe$, $g\in\bar{e}Re$, $h\in eR\bar{e}$, 有 $fg=fl=lf=gl=hf=lh=0$;

(2) 若 $xy=yx=0$, 则 $(x+y)^n=x^n+y^n$;

(3) e 是环 eRe 的单位元, $\bar{e}$ 是环 $\bar{e}R\bar{e}$ 的单位元.

根据上面的事实和计算, 可得

$$\begin{aligned}&g(s_1+s_2)=g(s_1)+g(s_2)=0,\\&(u_1+b+c+u_2+cu_1^{-1}b)(u_1^{-1}+u_1^{-1}bu_2^{-1}cu_1^{-1}-u_1^{-1}bu_2^{-1}-u_2^{-1}cu_1^{-1}+u_2^{-1})=1,\end{aligned}$$

其中 $u_1+b+c+u_2+cu_1^{-1}b\in U(R)$ 且 $u_1,u_1^{-1},u_1^{-1}bu_2^{-1}cu_1^{-1}\in eRe$, $b,u_1^{-1}bu_2^{-1}\in\bar{e}Re$, $c,cu_1^{-1}b,u_2^{-1}cu_1^{-1}\in\bar{e}Re$, u_2, $u_2^{-1}\in\bar{e}R\bar{e}$. 这证明了 x 是 $g(x)$-clean 的, 因此 R 是 $g(x)$-clean 的.

推论 2.15 设 R 是环, $g(x)\in C(R)[x]$. 若 $1=e_1+e_2+\cdots+e_n$, 其中 e_i 是正交幂等元且每个 e_iRe_i 是 $g(x)$-clean 的, 则 R 是 $g(x)$-clean 的.

证 通过定理 2.14 易得.

下面的两个结果直接由推论 2.15 得到.

推论 2.16 设 R 是环, $g(x)\in C(R)[x]$. 若 R 是 $g(x)$-clean 的, 则它的矩阵环 $M_n(R)$ 也是 $g(x)$-clean 环.

推论 2.17 设 R 是环, $g(x)\in C(R)[x]$. 对任意整数 $n\geq 2$, 环 R 是 $g(x)$-clean 的当且仅当对所有的下 (上) 三角矩阵环 $T_n(R)$ 也是 $g(x)$-clean 的.

称 $T=(HR,\sigma)$ 是环 R 上的斜 Hurwitz 级数, 其中 $\sigma\in Aut(R)$. 它的定义为: $T=(HR,\sigma)$ 的元素是映射 $f:\mathbb{N}\to R$, 其中 $\mathbb{N}$ 是自然数集, $T=(HR,\sigma)$ 上的加法运算为常规加法, 乘法运算定义为: $\forall f$, $g\in T$,

$$(fg)(n)=\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}f(k)\sigma^k(g(n-k))$$

由此 T 可以看做是单位元为 h_1 的环, 对任意 $n\geq 1$ 定义 $h_1(0)=1$ 和 $h_1(n)=0$. 通过 $0\neq r\in R\mapsto h_r\in T$, 其中对任意 $n\geq 1$, $h_r(0)=r$, $h_r(n)=0$. 显然可见 R 是 T 的一个规范的嵌入子环. 容易计算

$$h_rh_s(n)=\begin{cases}rs, & n=0,\\0, & n\neq 0.\end{cases}$$

根据定理 2.3[12], $T=(HR,\sigma)$ 是 clean 环当且仅当 R 是 clean 环. 对 $g(x)$-clean 环, 我们有以下类似的结果:

定理 2.18 设 R 是环, σ 是 R 的自同构. $T=(HR,\sigma)$ 是 $g_1(x)$-clean 环, 其中 $g_1(x)\in C(T)[x]$ 当且仅当对某个 $g_2(x)\in C(T)[x]$ 有 R 是 $g_2(x)$-clean 环.

证 $\Leftarrow$ 设 $g_2(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i\in C(R)[x]$. 对任意 $f\in T$, 由 R 是 $g_2(x)$-clean 的知, 存在 s, $u\in R$ 使得 $f(0)=s+u$, 其中 $g_2(s)=0$, $u\in U(R)$. 定义元素 $k\in T$:

$$k(n)=\begin{cases}f(n), & n>0,\\u, & n=0.\end{cases}$$

由命题 2.2[12] 得 $k \in U(T)$, $f = k + h_s$, 设

$$g_1(x) = \sum_{i=0}^{n} h_{a_i} x^i \in C(T)[x],$$

可以计算出

$$(g_1(h_s))(n) = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n} a_i s^i = 0, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

故 $T = (HR, \sigma)$ 是 $g_1(x)$-clean 环.

$\Rightarrow$ 设 $W = \{f \in T \mid f(0) = 0\}$. 对任意 $f \in W$, $g \in T$, 有

$$(gf)(0) = g(0)f(0) = 0 = (fg)(0).$$

因此 W 是 T 的一个理想. 定义 $\alpha : R \to T/W$, 其中 $\alpha(r) = h_r + W$. 易证 α 是一个同构. 因为 $T = (HR, \sigma)$ 是 $g_1(x)$-clean 环, 由推论 2.5[3] 得 T/W 也是 $\bar{g}_1(x)$-clean 的. 再由命题 2.4[8] 得 R 是 $g_2(x)$-clean 环.

推论 2.19 设 R 是环. σ 是 R 的自同构, 若 R 是 $g(x)$-clean 环, 其中

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in C(R)[x]$$

且 $g(x)$ 的每个根都是中心的, 且 $\sigma(s) = s$, 则 T 是强 $k(x)$-clean 环, 其中

$$k(x) = \sum_{i=0}^{n} h_{a_i} x^i \in C(T)[x].$$

证 因为 R 是 $g(x)$-clean 环. 由定理 2.18 知 T 是 $k(x)$-clean 环, 且每个元素 $f \in T$ 可以表示成 $f = (f - h_s) + h_a$, 这里 s 是 $g(x)$ 的根. 易得 $fh_a = h_a f$. 由 s 是 R 的中心元得, 对任意 $n \in \mathrm{supp}(fh_s)$ 有

$$(fh_s)(n) = f(n)\sigma^n(h_s(0)) = f(n)\sigma^n(s) = f(n)s = sf(n) = h_s(0)f(n) = (h_s f)(n).$$

因此 $fh_s = h_s f$. 故 T 是强 $k(x)$-clean 环.

参 考 文 献

[1] Nicholson W K. Lifting idempotents and exchange rings[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1977, 229: 269–278.

[2] Nicholson W K, Zhou Y. Rings in which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit[J]. Glasg. Math. J, 2004, 46: 227–236.

[3] Diesl A J. Nil clean rings[J]. J. Algebra, 2013, 383(1): 197–211.

[4] Nicholson W K, Zhou Y. Clean general rings [J]. J. Algebra, 2005, 291: 297–311.

[5] Sun X Q, Wang S P, Shen X Q, Li J H, Quasi-unit regularity and QB-rings [J]. Ukrainian Math. J., 2012, 64(3): 415–425.

[6] 孙晓青, 沈晓芹, 李江华. 单位稳定秩 1 的环的扩张 [J]. 数学杂志, 2013, 33(6): 1064–1074.

[7] Camillo V P, Simón J J. The Nicholson-Varadarajan theorem on clean linear transformations [J]. Glasg. Math. J., 2002, 44:365–369.

[8] Fan L, Yang X, On rings whose elements are the sum of a unit and a root of a fixed polynomial[J]. Comm. Algebra, 2008, 36(1): 269–278.

[9] Fan L, Yang X. On strongly $g(x)$-clean rings [J]. Preprint.

[10] Nicholson W K, Zhou Y. Endomorphisms that are the sum of a unit and a root of a fixed polynomial[J]. Canad. Math. Bull., 2006, 49: 265–269.

[11] Wang Z, Chen J. A note on clean rings[J]. Algebra Colloquium, 2007, 14 (3): 537–540.

[12] Hassanein A M. Clean rings of skew hurwitz series[J]. Le. Matematiche, 2007, 31: 47–54.

ON UNIQUELY $g(x)$-CLEAN RINGS

SUN Xiao-qing, LI Ji-wen, SHEN Xiao-qin

(*School of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China*)

Abstract: In this paper, we investigate the structure and property of uniquely $g(x)$-clean rings. Using the same method with the $g(x)$-clean ring, the relation between uniquely $g(x)$-clean rings and uniquely clean rings is determined, and the relation between uniquely $g(x)$-clean rings and rings generated by units and roots of 1 are given. Last, we discuss some extensions of $g(x)$-clean rings.

Keywords: $g(x)$-clean ring; uniquely clean ring; skew Hurwitz series

2010 MR Subject Classification: 16U99