

舍入数据下 Lomax 分布形状参数的经验 Bayes 检验问题

彭家龙, 赵彦晖, 袁莹
(西安建筑科技大学数学系, 陕西 西安 710055)

摘要: 本文研究了舍入数据下 Lomax 分布形状参数的经验 Bayes(EB) 单侧检验问题. 利用密度函数的递归核估计构造了参数的 EB 检验函数, 并在适当的条件下证明了所提出的 EB 检验函数的渐近最优性, 获得了它的收敛速度. 最后, 给出一个有关本文主要结果的例子.

关键词: Lomax 分布; 递归核估计; 经验 Bayes 检验; 渐近最优性; 收敛速度

MR(2010) 主题分类号: 62C12; 62F05 中图分类号: O212.1

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2014)04-0703-09

1 引言

自 Robbins 提出经验 Bayes 方法以来, EB 检验问题在文献中已有非常多的研究, 但是这些文献大部分都是在完全样本情形下考虑的^[1-7], 然而在实际问题中, 随机样本往往具有不完全性(如舍入数据, 缺失数据和删失数据等). 在大多数统计分析中, 常常假设数据本身是精确的, 但在实际问题中, 我们的数据可能因某些因素的影响而具有舍入误差, 我们称这样的数据为舍入数据. 本文将在舍入数据下讨论 Lomax 分布形状参数的经验 Bayes(EB) 单侧检验问题. 考虑如下 Lomax 分布^[8], 当给定 θ 时, 随机变量 X 的条件概率密度为

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{\lambda_0} \left(1 + \frac{x}{\lambda_0}\right)^{-(\theta+1)}, \quad (1.1)$$

其中 $\lambda_0 > 0$ 为已知的尺度参数, θ 为形状参数. 样本空间为 $\Omega = \{x|x > 0\}$, 参数空间为 $\Theta = \{\theta|\theta > 0\}$.

本文考虑模型 (1.1) 中参数 θ 的单侧检验问题

$$H_0 : \theta \leq \theta_0 \longleftrightarrow H_1 : \theta > \theta_0, \quad (1.2)$$

其中 θ_0 是给定的常数. 对上述假设检验问题, 设损失函数为

$$L_0(\theta, d_0) = a(\theta - \theta_0)I_{[\theta > \theta_0]}, \quad L_1(\theta, d_1) = a(\theta_0 - \theta)I_{[\theta \leq \theta_0]},$$

其中 a 为大于零的常数, $d = \{d_0, d_1\}$ 为行动空间, d_0 表示接受 H_0 , d_1 表示拒绝 H_0 , $I_{[A]}$ 为事件 A 的示性函数.

*收稿日期: 2012-04-06 接收日期: 2013-01-04

基金项目: 陕西省教育厅专项科研基金 (11JK0495); 西安建筑科技大学青年科技基金 (QN1136; QN1243); 西安建筑科技大学人才基金 (RC1318) 资助.

作者简介: 彭家龙 (1982-), 男, 湖南永顺, 讲师, 主要研究方向: 应用概率统计.

设参数 θ 的先验分布为 $G(\theta)$, 且 $G(\theta)$ 未知. 随机化判决函数为 $\delta(x) = P\{\text{接受 } H_0 | X = x\}$, 则 $\delta(x)$ 的风险函数为

$$\begin{aligned} R(\delta(x), G(\theta)) &= \int_{\Theta} \int_{\Omega} [L_0(\theta, d_0)\delta(x) + L_1(\theta, d_1)(1 - \delta(x))] f(x|\theta) dx dG(\theta) \\ &= a \int_{\Omega} \beta(x)\delta(x) dx + C_G, \end{aligned} \quad (1.3)$$

其中

$$C_G = \int_{\Theta} L_1(\theta, d_1) dG(\theta), \quad \beta(x) = \int_{\Theta} (\theta - \theta_0) f(x|\theta) dG(\theta). \quad (1.4)$$

令随机变量 X 的边缘分布为

$$f(x) = \int_{\Theta} f(x|\theta) dG(\theta) = \int_{\Theta} \frac{\theta}{\lambda_0} \left(1 + \frac{x}{\lambda_0}\right)^{-(\theta+1)} dG(\theta), \quad (1.5)$$

于是, 经计算得

$$\beta(x) = (-1 - \theta_0) f(x) - \psi(x) f^{(1)}(x). \quad (1.6)$$

其中 $f^{(1)}(x)$ 是 $f(x)$ 的一阶导数,

$$\psi(x) = \lambda_0 + x. \quad (1.7)$$

由 (1.3) 式可知, Bayes 检验函数为

$$\delta_G(x) = \begin{cases} 1, & \beta(x) \leq 0, \\ 0, & \beta(x) > 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

其相应的 Bayes 风险为

$$R_G = \inf_{\delta} R(\delta, G) = R(\delta_G, G) = a \int_{\Omega} \beta(x) \delta_G(x) dx + C_G. \quad (1.9)$$

上述风险当先验分布 $G(\theta)$ 已知且 $\delta(x) = \delta_G(x)$ 时, 是可以达到的. 但此处 $G(\theta)$ 未知, 所以 $\beta(x)$ 也未知, 故 $\delta_G(x)$ 无使用价值, 于是引入下面的经验 Bayes 方法来解决这个问题.

2 EB 检验函数的构造

设 $\{X_1, \theta_1\}, \{X_2, \theta_2\}, \dots, \{X_n, \theta_n\}$ (历史样本) 和 $\{X, \theta\}$ (当前样本) 为相互独立的随机向量, 其中 $\theta_i (1 \leq i \leq n)$ 与 θ 具有共同的先验分布 $G(\theta)$, X_1, X_2, \dots, X_n 具有共同的边缘密度 $f(x)$ 如 (1.5) 式所示. 由于某些因素, 历史样本 $\{X_i | 1 \leq i \leq n\}$ 常常不能被观测到, 我们仅能观测到它的舍入数据 $\{Y_i | 1 \leq i \leq n\}$, 且

$$X_i = Y_i + \varepsilon_i, \quad Y_i \sim h(x), \quad \varepsilon_i \sim U(-l, l), \quad 1 \leq i \leq n,$$

其中 $h(x)$ 为未知的密度函数, $l > 0$ 为已知的常数, $\{\varepsilon_i | 1 \leq i \leq n\}, \{Y_i | 1 \leq i \leq n\}$ 都独立同分布, 且 $\{\varepsilon_i | 1 \leq i \leq n\}$ 与 $\{Y_i | 1 \leq i \leq n\}$ 之间相互独立. 本文中假定 $f(x) \in C_{s,\beta}, x \in \mathcal{R}^1$,

这里 $C_{s,\beta}$ 表示一类概率密度函数族, 它的 s 阶导数存在、连续且绝对值不超过 β , $s \geq 4$ 为正整数. 由卷积公式, 可得

$$f(x) = \int_{-l}^l h(x-y) \cdot \frac{1}{2l} dy. \quad (2.1)$$

记 $h^{(0)}(x) = h(x)$, $h^{(1)}(x) = h'(x)$. 于是, 由 (1.6) 式和 (2.1) 式, 有

$$\beta(x) = \frac{-1-\theta_0}{2l} \int_{-l}^l h(x-y) dy - \frac{\psi(x)}{2l} \int_{-l}^l h^{(1)}(x-y) dy. \quad (2.2)$$

为了构造 $\beta(x)$ 的估计量, 我们首先利用舍入数据 $\{Y_i | 1 \leq i \leq n\}$ 来构造 $h^{(r)}(x)$ ($r = 0, 1$) 的估计量.

令 $K_r(x)$ ($r = 0, 1$) 为有界的 Borel 可测函数, 在区间 $(-1, 1)$ 之外取值为零, 且对 $r = 0, 1$ 满足下列条件

$$(A) \quad \frac{1}{t!} \int_{-1}^1 u^t K_r(u) du = \begin{cases} (-1)^r, & t = r, \\ 0, & t \neq r, t = 0, 1, \dots, r-1, r+1, \dots, s-1. \end{cases}$$

类似于文献 [9], 定义 $h^{(r)}(x)$ 的递归核估计为

$$h_n^{(r)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i^{1+r}} K_r \left(\frac{x - Y_i}{h_i} \right), \quad r = 0, 1. \quad (2.3)$$

其中 $\{h_n\}$ 为正数序列, 且 $h_n \downarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). 参看文献 [10], 可以找到适合上述条件 (A) 的核函数 $K_r(x)$.

由 (2.2) 式和 (2.3) 式可知, 定义 $\beta(x)$ 的估计量为

$$\beta_n(x) = (-1 - \theta_0) f_n^{(0)}(x) - \psi(x) f_n^{(1)}(x), \quad (2.4)$$

其中

$$f_n^{(r)}(x) = \frac{1}{2ln} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i^{1+r}} \int_{-l}^l K_r \left(\frac{x-y-Y_i}{h_i} \right) dy, \quad r = 0, 1. \quad (2.5)$$

再由 (1.8) 式, EB 检验函数定义为

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 1, & \beta_n(x) \leq 0, \\ 0, & \beta_n(x) > 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

本文中令 E_n 表示关于 (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) 的联合分布求均值, 则 $\delta_n(x)$ 的全面 Bayes 风险为

$$R_n = R(\delta_n, G) = a \int_{\Omega} \beta(x) E_n[\delta_n(x)] dx + C_G. \quad (2.7)$$

按定义, 设 ϑ 表示参数 θ 的先验分布族, 若对每个 $G \in \vartheta$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = R_G$, 则称 $\{\delta_n(x)\}$ 为关于 ϑ 渐近最优 (a.o.) 的 EB 检验函数. 若对某个 $q > 0$, $R_n - R_G = O(n^{-q})$, 则称 EB 检验函数 $\{\delta_n(x)\}$ 的收敛速度为 $O(n^{-q})$.

3 EB 检验函数的渐近性及其收敛速度

假设文中出现的 M, M_1, M_2 表示与 n 无关的常数, 即使在同一表达式中它们也可取不同的值. 为证明所给出的 EB 检验函数的渐近最优性及收敛速度, 需要以下的一些引理.

引理 3.1 设 $f_n^{(r)}(x) (r = 0, 1)$ 由 (2.5) 式定义, 假定条件 (A) 成立, 记 $f^{(0)}(x) = f(x)$, $f^{(1)}(x) = f'(x)$.

(a) 若 $f^{(r+1)}(x)$ 关于 x 连续, 则当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i = 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} nh_n^{2r+2} = \infty$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n |f_n^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)|^2 = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

(b) 若 $f(x) \in C_{s,\beta}$, $s \geq 4$ 为正整数, 则当取 $h_n = n^{-\frac{1}{2(s-1)}}$ 时, 对于 $0 < \lambda \leq 1$ 有

$$E_n |f_n^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)|^{2\lambda} \leq Mn^{-\frac{\lambda(s-r-2)}{s-1}}, \quad \forall x \in \Omega.$$

证 (a) 由 C_r -不等式和 Jensen 不等式, 有

$$\begin{aligned} E_n |f_n^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)|^2 &\leq 2|E_n f_n^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)|^2 + 2E_n |f_n^{(r)}(x) - E_n f_n^{(r)}(x)|^2 \\ &= 2|E_n f_n^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)|^2 + 2\text{Var}(f_n^{(r)}(x)) \\ &\triangleq 2J_{1r}^2 + 2J_{2r}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

首先考虑 J_{1r}^2 , 由 (2.5) 式和假定条件 (A) 知

$$\begin{aligned} E_n f_n^{(r)}(x) &= \frac{1}{2ln} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i^{1+r}} E_n \left[\int_{-l}^l K_r \left(\frac{x-y-Y_i}{h_i} \right) dy \right] \\ &= \frac{1}{2ln} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i^{1+r}} \int_{-l}^l \left[\int_{x-y-h_i}^{x-y+h_i} K_r \left(\frac{x-y-s}{h_i} \right) h(s) ds \right] dy \\ &= \frac{1}{2ln} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i^r} \int_{-l}^l I(x, y) dy, \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中

$$I(x, y) = \int_{-1}^1 K_r(u) h(x-y-h_i u) du. \quad (3.3)$$

将 $h(x-y-h_i u)$ 在 $x-y$ 处作 Taylor 展开到第 $r+2$ 项, 有

$$h(x-y-h_i u) = h(x-y) + \frac{h'(x-y)}{1!} (-h_i u) + \dots + \frac{h^{(r+1)}(x-y-\xi_{r+1} h_i u)}{(r+1)!} (-h_i u)^{r+1}, \quad (3.4)$$

其中 $0 < \xi_{r+1} < 1$. 将 (3.4) 式代入 (3.3) 式, 再利用假定条件 (A) 可得

$$\begin{aligned} I(x, y) &= h^{(r)}(x-y) h_i^r + \int_{-1}^1 K_r(u) \frac{h^{(r+1)}(x-y-\xi_{r+1} h_i u)}{(r+1)!} (-h_i u)^{r+1} du \\ &= h^{(r)}(x-y) h_i^r + O(h_i^{r+1}). \end{aligned}$$

因此, 由 (3.2) 式有

$$\begin{aligned} E_n f_n^{(r)}(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i^r} \left[\int_{-l}^l h^{(r)}(x-y) h_i^r \cdot \frac{1}{2l} dy + O(h_i^{r+1}) \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [f^{(r)}(x) + O(h_i)] = f^{(r)}(x) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n O(h_i). \end{aligned}$$

于是, 可得

$$0 \leq J_{1r} = |E_n f_n^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)| \leq M \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i, \quad (3.5)$$

于是, 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i = 0$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{1r}^2 = 0. \quad (3.6)$$

再考虑 J_{2r} , 由 (2.5) 式知

$$\begin{aligned} J_{2r} = \text{Var} f_n^{(r)}(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2ln)^2 h_i^{2(1+r)}} \text{Var} \left[\int_{-l}^l K_r \left(\frac{x-y-Y_i}{h_i} \right) dy \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2ln)^2 h_i^{2(1+r)}} E \left[\int_{-l}^l K_r \left(\frac{x-y-Y_1}{h_i} \right) dy \right]^2. \end{aligned}$$

由 $|K_r(x)| \leq M$ 及 $h_n \downarrow 0$, 可知

$$J_{2r} \leq M \cdot n^{-1} \cdot h_n^{-(2+2r)}, \quad (3.7)$$

于是, 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} n h_n^{2r+2} = \infty$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{2r} = 0. \quad (3.8)$$

所以当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i = 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} n h_n^{2r+2} = \infty$ 时, 将 (3.6) 和 (3.8) 式代入 (3.1) 式, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n |f_n^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)|^2 = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

注 1 若取 $h_n = n^{-\frac{1}{6}}$, 则易知正数序列 $\{h_n, n \geq 1\}$ 满足引理 3.1(a) 中的条件.

(b) 由 C_r -不等式和 Jensen 不等式, 有

$$\begin{aligned} E_n |f_n^{(r)}(x) - f_G^{(r)}(x)|^{2\lambda} &\leq 2|E_n f_n^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)|^{2\lambda} + 2(E_n |f_n^{(r)}(x) - E_n f_n^{(r)}(x)|^2)^\lambda \\ &\triangleq 2J_{1r}^{2\lambda} + 2J_{2r}^\lambda. \end{aligned} \quad (3.9)$$

首先考虑 $J_{1r}^{2\lambda}$. 因为 $f(x) \in C_{s,\beta}$, 所以易知 $h(x) \in C_{s,\beta}$. 将 $h(x-y-h_i u)$ 在 $x-y$ 处作 Taylor 展开到第 $s+1$ 项, 有

$$h(x-y-h_i u) = h(x-y) + \frac{h'(x-y)}{1!}(-h_i u) + \cdots + \frac{h^{(s)}(x-y - \xi_s h_i u)}{s!}(-h_i u)^s, \quad (3.10)$$

其中 $0 < \xi_s < 1$. 将 (3.10) 式代入 (3.3) 式, 再利用假定条件 (A) 可得

$$\begin{aligned} I(x, y) &= h^{(r)}(x-y)h_i^r + \int_{-1}^1 K_r(u) \frac{h^{(s)}(x-y-\xi_s h_i u)}{s!} (-h_i u)^s du \\ &= h^{(r)}(x-y)h_i^r + O(h_i^s). \end{aligned}$$

因此, 由 (3.2) 式有

$$\begin{aligned} E_n f_n^{(r)}(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i^r} \left[\int_{-l}^l h^{(r)}(x-y)h_i^r \cdot \frac{1}{2l} dy + O(h_i^s) \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [f^{(r)}(x) + O(h_i^{s-r})] = f^{(r)}(x) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n O(h_i^{s-r}). \end{aligned}$$

于是, 可知

$$0 \leq J_{1r} = |E_n f_n^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)| \leq M \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i^{s-r}.$$

当取 $h_n = n^{-\frac{1}{2(s-1)}}$ 时, 易知对于 $r = 0, 1$ 都有 $h_n = n^{-\frac{1}{2(s-1)}} \leq n^{-\frac{1}{2(s-r)}}$, 于是 $h_n^{s-r} \leq n^{-\frac{1}{2}}$, 所以

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i^{s-r} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{n} \int_0^n x^{-\frac{1}{2}} dx = 2n^{-\frac{1}{2}},$$

因此有

$$J_{1r}^{2\lambda} \leq M \cdot n^{-\lambda}. \quad (3.11)$$

再考虑 J_{2r}^λ , 当 $h_n = n^{-\frac{1}{2(s-1)}}$ 时, 由 (3.7) 式, 有

$$J_{2r}^\lambda \leq (Mn^{-1} \cdot h_n^{-(2+2r)})^\lambda = (Mn^{-1} \cdot n^{\frac{2+2r}{2s-2}})^\lambda \leq Mn^{-\frac{\lambda(s-r-2)}{s-1}}. \quad (3.12)$$

将 (3.11) 和 (3.12) 式代入 (3.9) 式可得引理 3.1(b) 结论, 引理 3.1(b) 证毕.

引理 3.2 [2] 设 R_n, R_G 分别由 (2.7) 式和 (1.9) 式定义, 则有

$$0 \leq R_n - R_G \leq a \int_{\Omega} |\beta(x)| P(|\beta_n(x) - \beta(x)| \geq |\beta(x)|) dx.$$

定理 3.1 设 $f_n^{(r)}(x) (r = 0, 1)$ 由 (2.5) 式定义, R_n, R_G 分别由 (2.7) 和 (1.9) 式定义, 假定条件 (A) 成立, 且下列条件满足

- (i) $\{h_n\}$ 为正数序列, 且 $h_n \downarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n h_n^4 = \infty$;
- (ii) $E\theta = \int_{\Theta} \theta dG(\theta) < \infty$;
- (iii) $f^{(2)}(x)$ 为 x 的连续函数;

则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = R_G$.

证 由引理 3.2 可知

$$0 \leq R_n - R_G \leq a \int_{\Omega} A_n(x) dx,$$

其中 $A_n(x) = |\beta(x)|P(|\beta_n(x) - \beta(x)| \geq |\beta(x)|)$. 易知 $0 \leq A_n(x) \leq |\beta(x)|$.

由 Fubini 定理及 $\beta(x)$ 的表达式 (1.4), 有

$$\int_{\Omega} |\beta(x)|dx \leq |\theta_0| \int_{\Omega} f(x)dx + \int_{\Omega} \int_{\Theta} \theta f(x|\theta)dG(\theta)dx \leq |\theta_0| + \int_{\Theta} \theta dG(\theta) < \infty,$$

再由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (R_n - R_G) \leq M \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x)dx. \tag{3.13}$$

所以要使定理 3.1 成立, 只要证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = 0$ 对 a.s. x 成立即可.

由 (1.6) 式, (2.4) 式, Markov 不等式及 Jensen 不等式, 得

$$\begin{aligned} A_n(x) &\leq E_n|\beta_n(x) - \beta(x)| \\ &\leq |\psi(x)|E_n|f_n^{(1)}(x) - f^{(1)}(x)| + |1 + \theta_0|E_n|f_n^{(0)}(x) - f^{(0)}(x)| \\ &\leq |\psi(x)|[E_n|f_n^{(1)}(x) - f^{(1)}(x)|^2]^{\frac{1}{2}} + |1 + \theta_0|[E_n|f_n^{(0)}(x) - f^{(0)}(x)|^2]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

再由引理 3.1(a), 对任何固定的 $x \in \Omega$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n|f_n^{(1)}(x) - f^{(1)}(x)|^2 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E_n|f_n^{(0)}(x) - f^{(0)}(x)|^2 = 0.$$

因此有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = 0. \tag{3.14}$$

将 (3.14) 式代入 (3.13) 式可得定理结论, 定理 3.1 证毕.

定理 3.2 设 $f_n^{(r)}(x)(r = 0, 1)$ 由 (2.5) 式定义, R_n, R_G 分别由 (2.7) 和 (1.9) 式定义, 假定条件 (A) 成立, 若对于 $0 < \lambda < 1$, 有

$$\int_{\Omega} |\beta(x)|^{1-\lambda} x^{m\lambda} dx < \infty, \quad m = 0, 1,$$

则当 $h_n = n^{-\frac{1}{2(s-1)}}$ 时, 有

$$R_n - R_G = O(n^{-q}), \quad q = \frac{\lambda(s-3)}{2(s-1)}.$$

证 由 Markov 不等式及引理 3.2 可知

$$\begin{aligned} 0 \leq R_n - R_G &\leq a \int_{\Omega} |\beta(x)|^{1-\lambda} E_n|\beta_n(x) - \beta(x)|^{\lambda} dx \\ &\leq M_1 \int_{\Omega} |\beta(x)|^{1-\lambda} |\psi(x)|^{\lambda} E_n|f_n^{(1)}(x) - f^{(1)}(x)|^{\lambda} dx \\ &\quad + M_2 \int_{\Omega} |\beta(x)|^{1-\lambda} |1 + \theta_0|^{\lambda} E_n|f_n^{(0)}(x) - f^{(0)}(x)|^{\lambda} dx \\ &\triangleq A_{1,n} + A_{2,n}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

其中 $\psi(x) = \lambda_0 + x$. 再根据引理 3.1(b) 及定理的条件得

$$A_{1,n} \leq Mn^{-\frac{\lambda(s-3)}{2(s-1)}} \int_{\Omega} |\beta(x)|^{1-\lambda} |\psi(x)|^{\lambda} dx \leq Mn^{-\frac{\lambda(s-3)}{2(s-1)}}, \quad (3.16)$$

$$A_{2,n} \leq Mn^{-\frac{\lambda(s-2)}{2(s-1)}} \int_{\Omega} |\beta(x)|^{1-\lambda} |1 + \theta_0|^{\lambda} dx \leq Mn^{-\frac{\lambda(s-2)}{2(s-1)}}. \quad (3.17)$$

将 (3.16) 式和 (3.17) 式代入 (3.15) 式得

$$R_n - R_G = O(n^{-q}), \quad q = \frac{\lambda(s-3)}{2(s-1)}.$$

注 2 由定理 3.2 结论可知, 当 s 充分大且 λ 任意接近 1 时, 参数 θ 的 EB 检验函数的收敛速度可任意接近 $O(n^{-\frac{1}{2}})$.

4 例子

本节给出一个例子说明适合文中定理条件的 Lomax 分布和参数 θ 的先验分布族是存在的.

设给定 θ 时, 随机变量 X 的分布为 $f(x|\theta) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)}$, 此处 $\lambda_0 = 1$. 设参数 θ 的先验分布族为

$$g(\theta) = ke^{-\theta} I_{[\theta > \beta]},$$

其中 $k = e^{\beta}$, $\beta > \frac{2\lambda}{1-\lambda}$, $0 < \lambda < 1$. 经计算得

$$f(x) = \int_{\Theta} f(x|\theta)g(\theta)d\theta = \frac{1}{(1+x)^{\beta+1} \ln(e+ex)} \left[\beta + \frac{1}{\ln(e+ex)} \right], \quad (4.1)$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{-(\beta+1) \ln(e+ex) - 1}{(1+x)^{\beta+2} \ln^2(e+ex)} \left[\beta + \frac{1}{\ln(e+ex)} \right] - \frac{1}{(1+x)^{\beta+2} \ln^3(e+ex)}, \quad (4.2)$$

$$\psi(x) = 1+x. \quad (4.3)$$

由 (1.6) 式及 (4.1)–(4.3) 式, 得

$$|\beta(x)| = |-(1+x)f^{(1)}(x) - (1+\theta_0)f(x)| \leq \frac{M}{(1+x)^{\beta+1}}, \quad (4.4)$$

因此容易验证

(1) 由 (4.1) 式知, $f(x)$ 关于 x 的任意阶导数存在、连续且一致有界, 即 $f_G(x) \in C_{s,\beta}$, $s \geq 4$ 为正整数;

$$(2) \int_{\Theta} \theta dG(\theta) = k \int_{\beta}^{\infty} \theta e^{-\theta} d\theta \leq M \int_0^{\infty} \theta e^{-\theta} d\theta < \infty;$$

(3) 因为 $\beta > \frac{2\lambda}{1-\lambda}$, 所以对于 $m = 0, 1$, 都有 $(\beta+1)(1-\lambda) - m\lambda > 1$, 于是由 (4.4) 式和第一类广义积分的收敛判别法知,

$$\int_{\Omega} |\beta(x)|^{1-\lambda} x^{m\lambda} dx \leq M \int_0^{\infty} \frac{(1+x)^{m\lambda}}{(1+x)^{(\beta+1)(1-\lambda)}} dx = M \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)^{(\beta+1)(1-\lambda)-m\lambda}} dx < \infty.$$

因此由 (1)–(3) 可知, 满足定理 3.1 和定理 3.2 条件的 Lomax 分布和参数 θ 的先验分布族是存在的.

参 考 文 献

- [1] Johns M V Jr, Van Ryzin J R. Convergence rates for empirical Bayes two-action problem i: discrete case[J]. *Ann. Math. Statist.*, 1971, 42: 1521–1539.
- [2] Johns M V Jr, Van Ryzin J R. Convergence rates in empirical Bayes two-action problems ii: continuous case[J]. *Ann. Math. Statist.*, 1972, 43: 934–947.
- [3] Wei L S. An empirical Bayes two-sided test problem about one-parameter discrete exponential families[J]. *Chinese Appl. Prob. and Statist.*, 1991, 7(3): 299–310.
- [4] 陈家清, 刘次华. 伽玛分布族参数的经验 Bayes 双边检验的收敛速度: NA 样本情形 [J]. *数学杂志*, 2007, 27(1): 53–59.
- [5] 陈家清, 刘次华. 线性指数分布参数的经验 Bayes 检验问题 [J]. *系统科学与数学*, 2008, 28(5): 616–626.
- [6] 陈玲, 韦来生. 连续型单参数指数族参数的经验 Bayes 检验函数的收敛速度 [J]. *系统科学与数学*, 2009, 29(8): 1142–1152.
- [7] 韦程东, 陈志强, 韦师等. 两参数 Burr XII 分布的经验 Bayes 检验问题 [J]. *工程数学学报*, 2010, 27(2): 333–341.
- [8] Lomax, K S. Business failure: another example of the analysis of the failure data[J]. *Journal of American Statistical Association*, 1954, 49: 847–852.
- [9] Wolverton C T, Wagner T J. Asymptotically optimal discriminant functions for pattern classification[J]. *IEEE Transactions Information Theory*, 1969, 15(2): 258–265.
- [10] 卢昆亮. 密度的混合偏导数的核估计及其收敛速度 [J]. *系统科学与数学*, 1982, 2(3): 220–226.

EMPIRICAL BAYES TEST PROBLEM FOR THE SHAPE PARAMETER OF LOMAX DISTRIBUTION WITH ROUNDED DATA

PENG Jia-long , ZHAO Yan-hui , YUAN Ying

(Department of Mathematics, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract: In this paper, we consider the empirical Bayes (EB) one-sided test problem for the shape parameter of Lomax distribution in the case of rounded data. The empirical Bayes test rule is constructed by the recursive kernel estimation of probability density function. It is shown that the asymptotically optimal property and convergence rates for the proposed EB test rule are obtained under suitable conditions. Finally, an example about the main results of this paper is given.

Keywords: Lomax distribution; recursive kernel estimation; empirical Bayes test; asymptotic optimality; convergence rates

2010 MR Subject Classification: 62C12; 62F05