

对 Bloch 定理中覆盖圆的估计

刘素红

(宝鸡文理学院数学系, 陕西 宝鸡 721013)

摘要: 本文研究了 Bloch 定理覆盖圆问题. 利用微分与积分估值法, 对覆盖圆的半径做了更精确地估计, 得到了两个相关定理, 扩大了覆盖圆的范围.

关键词: Bloch 定理; 全纯函数; 双方单值映射

MR(2010) 主题分类号: 30C25; 32A10

中图分类号: O174.52

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)04-0691-05

1 引言及主要结果

Bloch 定理^[1] 设函数 $w = f(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 上全纯, 并设它的 Taylor 展式为

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots,$$

则在 w 平面上存在一个中心随 f 而定, 半径为 $\frac{1}{24}$ 的圆, 这个圆被 $w = f(z)$ 的反函数双方单值地映射成 $|z| < 1$ 内某个区域. 也就是说, $f(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 上的值完全盖住 w 平面上一个以 $\frac{1}{24}$ 为半径的圆.

本文对 Bloch 定理中的覆盖圆做出了更为精确的估计得到下面两个结论:

定理 1 设函数 $w = f(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 上全纯, 并设它的 Taylor 展式为

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots,$$

则在 w 平面上存在一个中心随 f 而定, 半径为 $B = \frac{1}{12 + 8\sqrt{2}}$ (大于 $\frac{1}{24}$) 的圆, 这个圆被 $w = f(z)$ 的反函数双方单值地映射成 $|z| < 1$ 内某个区域. 也就是说, $f(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 上的值完全盖住 w 平面上一个以 B 为半径的圆.

定理 2 设函数 $w = f(z)$ 在 $|z - z_0| \leq R$ 上全纯, 并设它的 Taylor 展式为

$$f(z) = (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots,$$

则在 w 平面上存在一个以某点为中心, 以 BR 为半径的圆, 这个圆被 $w = f(z)$ 的反函数双方单值地映射成 $|z - z_0| < R$ 内某个区域. 也就是说, $f(z)$ 在 $|z - z_0| \leq R$ 上的值完全盖住 w 平面上某个以 BR 为半径的圆.

2 主要引理

*收稿日期: 2012-09-18 接收日期: 2013-06-25

基金项目: 陕西省教育厅基金资助 (12JK1003); 陕西省教育厅基金资助 (2013JK0572).

作者简介: 刘素红 (1970-), 女, 陕西宝鸡, 讲师, 主要研究方向: 复分析.

引理 1 设函数 $w = f(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 全纯, 且 $|f(z)| \leq M$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. 则在 w 平面上存在一个圆 $|w| < \frac{1}{(3+2\sqrt{2})M}$, 它被 $w = f(z)$ 的反函数双方单值地映成 $|z| < 1$ 内某一个区域. 也就是说, $w = f(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 上的值完全覆盖了 w 平面上的圆 $|w| = \frac{1}{(3+2\sqrt{2})M}$.

证 因 $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0) = 1$, 所以 $w = f(z)$ 在 $z = 0$ 处的 Taylor 展式为

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots \quad (|z| \leq 1),$$

由 Cauchy 不等式及 $a_1 = f'(0) = 1$ 可得

$$M \geq |a_n| \quad (n = 1, 2, \cdots), \quad M \geq |a_1| \geq 1,$$

当 $|z| = r < 1$ 时,

$$|f(z)| \geq |z| - |f(z) - z| \geq |z| - \max_{|z|=1} |f(z) - z| \geq r - M(r^2 + r^3 + \cdots) = r - \frac{Mr^2}{1-r} = \phi(r).$$

设 $r = \frac{1}{sM}$ ($s > 1$), 那么

$$\phi(r) = r - \frac{Mr^2}{1-r} \geq r - \frac{Mr^2}{1-Mr} = \frac{1}{M} \left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s-1} \right) = \psi(s),$$

所以

$$\psi'(s) = \frac{1}{M} \frac{-2s^2 + 4s - 2}{s^2(s-1)^2},$$

令 $\psi'(s) = 0$, 得 $s = 2 + \sqrt{2}$, 且当 $s > 2 + \sqrt{2}$ 时, $\psi'(s) < 0$, 当 $s < 2 + \sqrt{2}$ 时, $\psi'(s) > 0$ 故当 $s = 2 + \sqrt{2}$ 时, $\psi(s)$ 取得最大值为 $\psi(2 + \sqrt{2}) = \frac{1}{(3+2\sqrt{2})M}$, 所以

$$|f(z)| \geq \phi(r) = \psi(s) \geq \psi(2 + \sqrt{2}),$$

即在围线 $C: |z| = r = \frac{1}{(2 + \sqrt{2})M}$ 上有

$$|f(z)| \geq \phi\left(\frac{1}{(2 + \sqrt{2})M}\right) = \psi((2 + \sqrt{2})) = \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})M}$$

(从而在圆周 $|z| = \frac{1}{(2 + \sqrt{2})M}$ 上, 不等式 $|f(z)| \geq \phi\left(\frac{1}{(2 + \sqrt{2})M}\right) \geq \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})M}$ 成立).

下证在 w 平面上, 圆 $|w| = \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})M}$ 内任一点在 f^{-1} 作用下, 在 $|z| = \frac{1}{(2 + \sqrt{2})M}$ 内都能够找到原象且唯一.

设 w_0 是圆 $|w| = \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})M}$ 内任一点, 则在圆 $|z| = \frac{1}{(2 + \sqrt{2})M}$ 上有

$$|-w_0| < \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})M} \leq |f(z)|.$$

据 Rouché 定理^[2-3] 有

$$N(f(z) - w_0, C) = N(f(z), C),$$

其中 $N(f(z), C)$ 表示函数在围线 C 内零点的个数. 因 $f(0) = 0$, 故 $f(z)$ 的零点在圆 C 内是存在的; 又当 $z \neq 0$ 且 $|z| = r < \frac{1}{(2 + \sqrt{2})M}$ 时有

$$|f(z)| \geq r - \frac{Mr^2}{1-r} = \frac{r - r^2(1+M)}{1-r} > 0$$

(否则, 若 $\frac{r - r^2(1+M)}{1-r} = 0$, 那么 $r = \frac{1}{1+M} < \frac{1}{(2 + \sqrt{2})M}$, 得 $M < \frac{1}{1 + \sqrt{2}} < 1$, 出现矛盾). 所以 $f(z) \neq 0$, 所以 $N(f(z), C) = 1$, 由此得 $N(f(z) - w_0, C) = 1$, 即关于 z 的方程 $f(z) = w_0$ 有唯一的根. 也就是说 w 平面上的圆 $|w| < \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})M}$ 内任一点 w , 在圆 $|z| < \frac{1}{(2 + \sqrt{2})M}$ 内都有唯一的点 z 与之对应. 引理 1 得证.

引理 2 若函数 $w = f(z)$ 在 $|z - z_0| \leq 1$ 上全纯, $|f(z)| \leq M$, $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = a > 0$, 则在 w 平面上存在一个圆 $|w| < \frac{a^2 R^2}{(3 + 2\sqrt{2})M}$, 它被 $w = f(z)$ 的反函数双方单值地映成 $|z - z_0| < R$ 内某一个区域. 也就是说, $f(z)$ 在 $|z - z_0| \leq R$ 上的值能够完全覆盖了 w 平面上的圆域 $|w| < \frac{a^2 R^2}{(3 + 2\sqrt{2})M}$.

证 作辅助函数

$$\Phi(z) = \frac{f(Rz + z_0)}{Rf'(z_0)},$$

则 $\Phi(z)$ 满足定理 1 的条件, 且 $|\Phi(z)| \leq \frac{M}{Ra}$, 所以 $\Phi(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 上的值完全盖住 Φ 平面上的圆 $|\Phi| < \frac{Ra}{(3 + 2\sqrt{2})M}$. 由 $\Phi(z) = \frac{f(Rz + z_0)}{Rf'(z_0)}$, 得

$$w = f(Rz + z_0) = \Phi(z)Rf'(z_0),$$

即知在 w 平面上存在一个圆 $|w| < \frac{a^2 R^2}{(3 + 2\sqrt{2})M}$ 能够被 $f(z)$ 在 $|z - z_0| \leq R$ 上的值完全覆盖.

3 主要结果的证明

定理 1 的证明 $f'(z) = 1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \dots$ ($|z| \leq 1$). 设 $w(r) = (1-r)M(r)$, 其中 $M(r) = \max_{|z|=r} |f'(z)| = 1$ 为连续函数, 从而 $w(r)$ 为 $[0, 1]$ 上的连续函数且有

$$w(0) = 1, w(1) = 0.$$

因为 $1-r$ 与 $M(r)$ 具有相反的单调性, 故在区间 $[0, 1]$ 上存在一个 $r_0 < 1$ 使 $w(r_0) = 1$, 且当 $r \in (r_0, 1)$ 时, $w(r) < 1$.

设 $|\zeta| = r_0$ 且 ζ 是满足 $|f'(\zeta)| = \max_{|z|=r_0} |f'(z)| = M(r_0)$ 的一个点, 则

$$w(r_0) = (1 - r_0)M(r_0) = (1 - r_0) |f'(\zeta)| = 1.$$

所以

$$|f'(\zeta)| = \frac{1}{1 - r_0}. \quad (1)$$

再设 $r_1 = \frac{1 + r_0}{2}$, 则 $w(r_1) = (1 - r_1)M(r_1) < 1$. 据最大模原理^[3], 在 $|z| \leq r_1$ 上有

$$|f'(z)| \leq \max_{|z| \leq r_1} |f'(z)| = \max_{|z|=r_1} |f'(z)| < \frac{1}{1 - r_1} = \frac{2}{1 - r_0}.$$

在圆域 $|z - \zeta| \leq \frac{1 - r_0}{2}$ 上作辅助函数

$$F(z) = f(z) - f(\zeta), \quad (2)$$

则 $F(z)$ 全纯, 且结合 (1) 式有

$$|F(z)| = |f(z) - f(\zeta)| = \left| \int_{\zeta}^z f'(t) dt \right| \leq 1,$$

$$F(\zeta) = 0, \quad |F'(\zeta)| = |f'(\zeta)| = \frac{1}{1 - r_0}.$$

据引理 2, 在 F 平面上存在一个圆

$$|F| < \frac{a^2 R^2}{(3 + 2\sqrt{2})M} = \frac{\left(\frac{1}{1 - r_0}\right)^2 \left(\frac{1 - r_0}{2}\right)^2}{(3 + 2\sqrt{2}) \times 1} = \frac{1}{12 + 8\sqrt{2}} = B,$$

它被 $F = F(z)$ 的反函数双方单值地映射成 $|z - \zeta| \leq \frac{1 - r_0}{2}$ 内的某个区域. 即 $F(z)$ 在 $|z - \zeta| \leq \frac{1 - r_0}{2}$ 上的值完全盖住了 F 平面上的圆 $|F| < \frac{1}{12 + 8\sqrt{2}}$.

由 (2) 式得 $w = f(z) = F(z) + f(\zeta)$ 在 $|z - \zeta| \leq \frac{1 - r_0}{2}$ 上的值就完全盖住 w 平面上的圆

$$|w - f(\zeta)| < \frac{1}{12 + 8\sqrt{2}}.$$

显然 $|z - \zeta| \leq \frac{1 - r_0}{2}$ 在圆 $|z| \leq 1$ 内. 如图 1.

定理 2 的证明 做辅助函数

$$F(z) = \frac{f(Rz + z_0)}{R}.$$

显然 $F(z)$ 符合定理 1 的条件, 由定理 1 及 F 与 f 的关系即得定理 2. 如图 2.

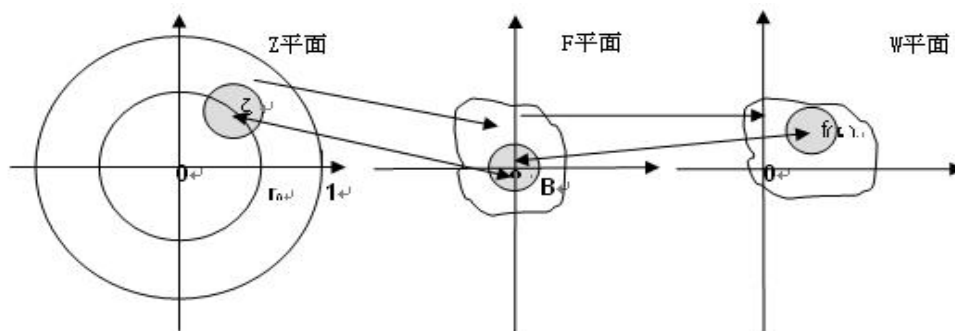


图 1: z 平面上圆心在原点的单位圆

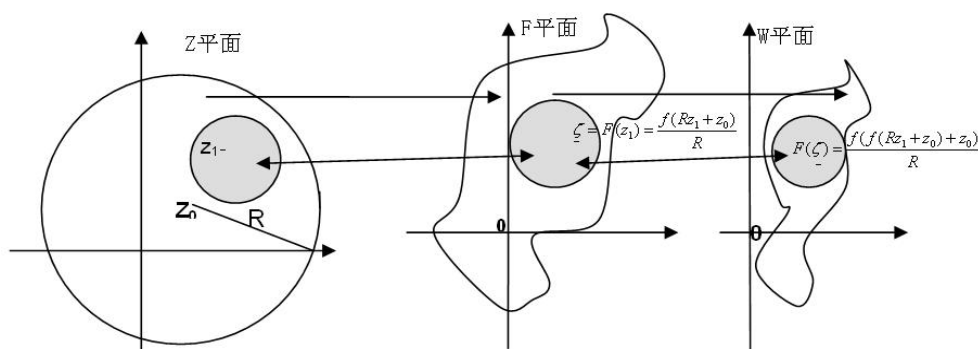


图 2: z 平面上的一个圆

参 考 文 献

- [1] 柏盛桃. 整函数与亚纯函数 [M]. 武汉: 华中师范大学出版社, 1987.
- [2] 余家荣. 复变函数 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1979.
- [3] 钟玉泉. 复变函数论 (第三版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [4] 路见可, 钟可寿. 复变函数论 (第二版)[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2007.

ESTIMATING COVER CIRCLE TO BLOCH THEOREM

LIU Su-hong

(Department of Math., Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721013, China)

Abstract: In this paper, we study covering circle of Bloch theorem, and estimate the radius of the circle. By using differential estimation, we obtain two theorems, then extend the range of the covering circle.

Keywords: Bloch theorem; both single-valued mapping; holomorphic function

2010 MR Subject Classification: 30C25; 32A10