

一类特殊网格的几何概率

邹明田, 李寿贵, 陈莉莉
(武汉科技大学理学院, 湖北 武汉, 430065)

摘要: 本文研究了以正六边形和菱形为基本区域的复合网格中的 Buffon 问题. 利用积分几何理论和运动测度工具, 获得了上述复合网格与长针相交的概率表达式, 推广了长针与复合网格相交的概率问题.

关键词: Buffon 问题; 积分几何; 运动测度

MR(2010) 主题分类号: 53C65

中图分类号: O186.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2014)02-0374-05

1 引言

凸体的包含测度问题是积分几何中相当重要的课题之一. 任德麟在 80 年代建立了二维和 n 维含于凸体内定长线段的运动测度的系统理论, 推导出 n 维欧式空间中凸体的弦幂积分不等式, 提出了并解决了一系列复杂的几何概率课题^[1-2]. Santalo 将平行线网格推广到平行带域网格, 同时将小针推广到凸域, 但他只研究了凸域直径不超过带域间距离的情况. 任德麟作出了进一步推广, 取消凸域直径不超过带域的间距离这一限制, 而后其学生黎荣泽、张高勇讨论了相交的两组平行线网上的 Buffon 概率, 本文拟研究以正六边形和菱形为基本区域的复合网格中的 Buffon 问题.

2 预备知识

定义 2.1 以 σ 表示凸域 D 被直线 G 截出的弦长. 当 G 仅与 ∂D 相交包括 G 是线段情形, 约定 $\sigma=0$, G 的表示取广义法式, 对任意给定的 σ 和 $\varphi(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$, 令

$$p(\sigma, \varphi) = \sup_G \{p : m[G \cap (\text{int}D)] = \sigma\}, \quad (2.1)$$

称二元函数 $p(\sigma, \varphi)$ 为凸域的广义支持函数^[1-3].

定义 2.2 以 $\sigma_M(\varphi)$ 表示垂直于 φ 方向的直线 G 与凸域 D 截出的弦长最大值, 即

$$\sigma_M(\varphi) = \sup_G \{\sigma : \sigma = m[G \cap (\text{int}D)]\}. \quad (2.2)$$

对任意给定的 $l(l \geq 0)$ 及 $\varphi(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$, 令

$$r(l, \varphi) = \min\{l, \sigma_M(\varphi)\}, \quad (2.3)$$

*收稿日期: 2013-08-25

接收日期: 2013-10-09

基金项目: 冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室项目资助 (A201001).

作者简介: 邹明田 (1989-), 男, 湖北钟祥, 硕士, 主要研究方向: 积分几何和凸体理论.

称二元函数 $r(l, \varphi)$ 为凸域 D 的限弦函数^[1-3].

3 主要内容

考虑将长为 l 的小针投掷于以正六边形 K_1 和菱形 K_2 为基本区域的平面网格 (如图 1 所示) 中, 研究小针与此网格相交的概率.



图 1

设 K_1 、 K_2 的面积和周长分别为 F_1 、 F_2 和 L_1 、 L_2 , 含于 K_1 内小针的运动测度为 $m_1(l)$, 含于 K_2 内小针的运动测度为 $m_2(l)$.

假设正六边形的边长为 a , 则 $F_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$, $F_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

取 n^2 个边长为 a 的正方形组成以 na 为边长的大正方形, 含于大正方形内小针的运动测度为记为 $m_3(l)$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_3(l) - \frac{(na)^2}{F_1 + F_2} (m_1(l) + m_2(l))}{m_3(l)}, \quad (3.1)$$

即为小针与此网格相遇的概率^[5].

引理 3.1 设 $p(\sigma, \varphi)$ 和 $r(l, \varphi)$ 分别为凸域 D 的广义支撑函数和限弦函数, $m(l)$ 之定义同前, 则有

$$m(l) = \pi F - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(l, \varphi)} p(\sigma, \varphi) d\sigma, \quad (3.2)$$

其中 F 为 D 之面积^[1].

对于边长为 a 一个角为 $\pi/3$ 的菱形建立如下坐标系

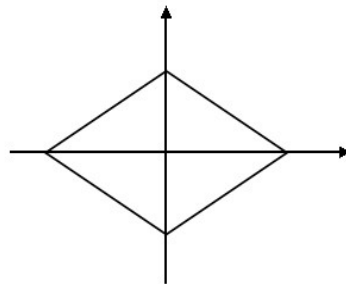


图 2

则此菱形的广义支撑函数为

$$p_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}a \cos \varphi - \frac{\sqrt{3}}{6}\sigma(3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi), \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right),$$

$$p_2 = \frac{1}{2}a \sin \varphi + \frac{\sqrt{3}}{6}\sigma(3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi), \quad \varphi \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right].$$

限弦函数为

$$r(l, \varphi) = \begin{cases} l, & l \in [0, \frac{\sqrt{3}a}{2}), \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ l, & l \in [\frac{\sqrt{3}a}{2}, a), \varphi \in [0, \frac{\pi}{6} - \arccos \frac{\sqrt{3}a}{2l}], \\ \frac{\sqrt{3}a}{2 \cos(\varphi - \pi/6)}, & l \in [\frac{\sqrt{3}a}{2}, a), \varphi \in (\frac{\pi}{6} - \arccos \frac{\sqrt{3}a}{2l}, \frac{\pi}{6} + \arccos \frac{\sqrt{3}a}{2l}], \\ l, & l \in [\frac{\sqrt{3}a}{2}, a), \varphi \in (\frac{\pi}{6} + \arccos \frac{\sqrt{3}a}{2l}, \frac{\pi}{3}], \\ l, & l \in [\frac{\sqrt{3}a}{2}, a), \varphi \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}], \\ \frac{\sqrt{3}a}{2 \cos(\varphi - \pi/6)}, & l \in [a, \sqrt{3}a], \varphi \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} + \arccos \frac{\sqrt{3}a}{2l}], \\ l, & l \in [a, \sqrt{3}a], \varphi \in (\frac{\pi}{6} + \arccos \frac{\sqrt{3}a}{2l}, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{r(l, \varphi)} p d\sigma$, 则分三种情况讨论

1. $l \in [0, \frac{\sqrt{3}a}{2})$,

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^l p d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^l p_1 d\sigma + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^l p_2 d\sigma = al - \frac{l^2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{72}\pi l^2.$$

2. $l \in [\frac{\sqrt{3}a}{2}, a)$,

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6} - \arccos \frac{\sqrt{3}a}{2l}} d\varphi \int_0^l p_1 d\sigma + \int_{\frac{\pi}{6} - \arccos \frac{\sqrt{3}a}{2l}}^{\frac{\pi}{6} + \arccos \frac{\sqrt{3}a}{2l}} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{3}a}{2 \cos \varphi}} p_1 d\sigma + \int_{\frac{\pi}{6} + \arccos \frac{\sqrt{3}a}{2l}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^l p_1 d\sigma$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^l p_2 d\sigma$$

$$= al - \frac{l^2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{72}\pi l^2 - \frac{5}{4}a\sqrt{l^2 - \frac{3}{4}a^2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}l^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2\right) \arccos \frac{\sqrt{3}a}{2l}.$$

3. $l \in [a, \sqrt{3}a]$,

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{\frac{l}{\cos(\varphi - \pi/6)}} p_1 d\sigma + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6} + \arccos \frac{\sqrt{3}a}{2l}} d\varphi \int_a^{\frac{\sqrt{3}a}{2 \cos(\varphi - \pi/6)}} p_2 d\sigma + \int_{\frac{\pi}{6} + \arccos \frac{\sqrt{3}a}{2l}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_a^l p_2 d\sigma$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{24}\pi a^2 + \frac{\sqrt{3}}{36}\pi l^2 + \frac{3}{16}a^2 + \frac{l^2}{8} - \frac{3}{8}a\sqrt{l^2 - \frac{3}{4}a^2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}l^2\right) \arccos \frac{\sqrt{3}a}{2l}.$$

于是此菱形的运动测度为

$$m_2(l) = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^2 - 4I,$$

将前面的结果代入可得

$$m_2(l) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^2 - 4al + l^2 + \frac{\sqrt{3}}{18}\pi l^2, & l \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2}a), \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^2 - 4al + l^2 + \frac{\sqrt{3}}{18}\pi l^2 + 5a\sqrt{l^2 - \frac{3}{4}a^2}, & \\ -(2\frac{\sqrt{3}}{3}l^2 + 2\sqrt{3}a^2) \arccos \frac{\sqrt{3}a}{2l}, & l \in [\frac{\sqrt{3}}{2}a, a), \\ \frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^2 - \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}l^2 - \frac{\sqrt{3}}{9}\pi l^2 + \frac{3}{2}a\sqrt{l^2 - \frac{3}{4}a^2}, & \\ -(\sqrt{3}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}l^2) \arccos \frac{\sqrt{3}a}{2l}, & l \in [a, \sqrt{3}a]. \end{cases}$$

由上述方法还可以得到

正六边形内定长线段的运动测度^[4]

$$m_1(l) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi a^2 - 6al - \frac{\sqrt{3}\pi l^2}{6} + \frac{3}{2}l^2, & l \in [0, a], \\ \frac{5\sqrt{3}}{2}\pi a^2 + \frac{\sqrt{3}\pi l^2}{2} - (3\sqrt{3}a^2 + 2\sqrt{3}l^2), & \\ \arcsin \frac{\sqrt{3}a}{2l} - \frac{9a}{2}\sqrt{4l^2 - 3a^2}, & l \in (a, \sqrt{3}a], \\ 2\sqrt{3}\pi a^2 + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi l^2 - 9a^2 - \frac{3}{2}l^2 + 15a\sqrt{l^2 - 3a^2}, & \\ -(12\sqrt{3}a^2 + \sqrt{3}l^2) \arccos \frac{\sqrt{3}a}{l}, & l \in (\sqrt{3}a, 2a]. \end{cases}$$

大正方形内定长线段的运动测度

$$m_3(l) = \pi n^2 a^2 - 4nal + l^2, \quad l \in [0, na),$$

则小针与网格相交的概率

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_3(l) - \frac{(na)^2}{F_1 + F_2} (m_1(l) + m_2(l))}{m_3(l)} = 1 - \frac{(m_1(l) + m_2(l))}{\pi(F_1 + F_2)} = 1 - \frac{(m_1(l) + m_2(l))}{2\sqrt{3}\pi a^2}.$$

(i) 当 $l \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2}a)$ 时,

$$p = \frac{10al - \frac{5}{2}l^2 + \frac{\sqrt{3}}{9}\pi l^2}{2\sqrt{3}\pi a^2}.$$

(ii) 当 $l \in [\frac{\sqrt{3}}{2}a, a)$ 时,

$$p = \frac{10al - \frac{5}{2}l^2 + \frac{\sqrt{3}}{9}\pi l^2 - \frac{5}{4}a\sqrt{l^2 - \frac{3}{4}a^2} + (\frac{\sqrt{3}}{6}l^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2) \arccos \frac{\sqrt{3}a}{2l}}{2\sqrt{3}\pi a^2}.$$

(iii) 当 $l \in [a, \sqrt{3}a]$ 时,

$$p = \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}l^2 - \frac{5\sqrt{3}}{6}\pi a^2 - \frac{7\sqrt{3}}{18}\pi l^2 + \frac{15}{2}a\sqrt{l^2 - \frac{3}{4}a^2} + (\sqrt{3}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}l^2) \arccos \frac{\sqrt{3}a}{2l}}{2\sqrt{3}\pi a^2} + \frac{(3\sqrt{3}a^2 + 2\sqrt{3}l^2) \arcsin \frac{\sqrt{3}a}{2l}}{2\sqrt{3}\pi a^2}.$$

(iv) 当 $l \in [\sqrt{3}a, 2a]$ 时,

$$p = \frac{9a^2 + \frac{3}{2}l^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi l^2 - 15a\sqrt{l^2 - 3a^2} + (12\sqrt{3}a^2 + \sqrt{3}l^2) \arccos \frac{\sqrt{3}a}{l}}{2\sqrt{3}\pi a^2}.$$

参 考 文 献

- [1] Ren Delin. Topics in integral geometry [M]. Singapore: World Scientific, 1994.
- [2] Ren Delin. The generalized support function and its application [C]. New York: Grodon and breach science publish, 1982: 1367–1378.
- [3] Santalo L A. 积分几何与几何概率 [M]. 吴大任译. 南开大学出版社, 1991.
- [4] 黎荣泽, 张高勇. 某些凸多边形内定长线段的运动测度公式及其在几何概率中的运用 [J]. 武汉钢铁学院学报, 1984, 1: 106–128.
- [5] Xie Fengfan, Li Deyi. On generalized buffon needle problem for lattices [J]. Acta Mathematica Scientia, 2011, 31(1): 303–308.
- [6] Ciuseppe Caristi, Massimiliano Ferrara. On Buffon's problem for a lattice and its deformations [J]. Beitrage zur Algebra and Ceometrie, 2004, 45(1): 13–20.

A SPECIAL CLASS OF THE GRID GEOMETRIC PROBABILITY

ZOU Ming-tian , LI Shou-gui , CHEN Li-li

(College of Science, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065, China)

Abstract: In this paper, we study the Buffon problem on the complicated lattices, of which the basic areas consist of hexagon and diamond. By using the theory of integral geometric and kinematic measuring tools, we obtain the expressions of the probability for a needle intersecting with the bound of the complicated lattices above, which generalize the problem of the probability for a long needle intersecting with the bound of the complicated lattices.

Keywords: Buffon problem; integral geometry; kinematic measure

2010 MR Subject Classification: 53C65