Vol. 44 (2024)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

两个酉不变范数不等式的推广

胡兴凯, 弋　苑, 刘武双
(昆明理工大学理学院, 云南 昆明 650500)

摘 要: 本文研究了矩阵酉不变范数不等式的问题. 在 $v \in [0,1]$ 时, 利用函数 $\varphi(v) = \|A^v XB^{1-v} + A^{1-v}XB^v\|$ 的凸性, 推广了两个酉不变范数不等式.
关键词: 半正定矩阵; 凸函数; 酉不变范数
MR(2010) **主题分类号**: 15A45; 15A60　　**中图分类号**: O151.21
文献标识码: A　　**文章编号**: 0255-7797(2024)03-0165-04

1 引言

令 M_n 是复数域上 $n\times n$ 阶矩阵的集合. 设 $\|\cdot\|$ 为 M_n 上的范数, 若对所有 n 阶矩阵 A 和酉矩阵 $U,V\in M_n$, 都有 $\|UAV\|=\|A\|$ 成立, 则称 $\|\cdot\|$ 为酉不变范数. 矩阵 $A\in M_n$ 的奇异值定义为 A^*A 的特征值的非负平方根, 用 $s_1(A)\ge s_2(A)\ge\cdots\ge s_n(A)$ 表示 $A\in M_n$ 的奇异值. 其中, 有两类重要的酉不变范数, 第一类是 Ky Fan k- 范数 $\|A\|_{(k)}$, 即

$$\|A\|_{(k)}=\sum_{j=1}^{k}s_j(A), k=1,\cdots,n,$$

第二类是 Schatten p- 范数 $\|A\|_p$, 即

$$\|A\|_p=\left(\sum_{j=1}^{n}s_j^p(A)\right)^{\frac{1}{p}}=(\mathrm{tr}|A|^p)^{\frac{1}{p}}, 1\le p<\infty.$$

设 $A,B,X\in M_n$ 且 A,B 是半正定矩阵, Bhatia 和 Davis 在文献 [1] 证明了：若 $0\le v\le 1$, 则

$$||A^{\frac12}XB^{\frac12}||\le||\frac{A^vXB^{1-v}+A^{1-v}XB^v}{2}||\le||\frac{AX+XB}{2}||, \tag{1.1}$$

令 $\varphi(v)=||A^vXB^{1-v}+A^{1-v}XB^v||$, 则不等式 (1.1) 可简写为:

$$\varphi(\frac{1}{2})\le\varphi(v)\le\varphi(0).$$

设 $A,B,X\in M_n$ 且 A,B 是半正定矩阵, 函数 $\varphi(v)$ 在区间 $[0,1]$ 上是凸函数, 当 $v=\frac12$ 时取最小值 (见文献 [2]).

*收稿日期: 2023-05-26　　接收日期: 2023-06-29
基金项目: 昆明理工大学引进人才科研启动基金项目 (KKZ3202007048); 国家自然科学基金项目 (11801240).
作者简介: 胡兴凯 (1982–), 男, 山东泰安, 副教授, 主要研究方向: 矩阵不等式.
E-mail: huxingkai84@163.com.

2012 年, Zou 和 He 在文献 [3] 中改进了不等式 (1.1) 得到

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)+2\left(\int_0^1\varphi(v)dv-\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right)\leq\varphi(0),0\leq v\leq 1. \tag{1.2}$$

若 $A,B\in M_n$ 为半正定矩阵, Bhatia 和 Kittaneh 在文献 [4] 中证明了:

$$||AB||\leq\frac{1}{4}||(A+B)^2||. \tag{1.3}$$

Zou 和 He 在文献 [3] 中改进了不等式 (1.3) 得到

$$||AB||+\left(\int_0^1\psi(v)dv-2||AB||\right)\leq\frac{1}{4}||(A+B)^2||, \tag{1.4}$$

其中

$$\psi(v)=||A^{\frac{1}{2}+v}B^{\frac{3}{2}-v}+A^{\frac{3}{2}-v}B^{\frac{1}{2}+v}||.$$

近年来, 有很多文献 [5-9] 对酉不变范数不等式进行了研究. 本文将继续研究矩阵的酉不变范数不等式, 利用函数的凸性, 对不等式 (1.2) 和 (1.4) 进行推广.

2 主要结果

下面我们首先给出两个引理, 它们将在本文定理证明过程中起到重要作用.

引理 2.1 [10] 设 $A,B,X\in M_n$ 且 A,B 是半正定矩阵, 则

$$\varphi(v)\leq(1-r_0)\varphi(0)+r_0\varphi(\mu),$$

其中 $0\leq v\leq 1$, $0<\mu<1$, $r_0=\begin{cases}\frac{v}{\mu},0\leq v\leq\mu,\\ \frac{1-v}{1-\mu},\mu<v\leq 1.\end{cases}$
.

引理 2.2 [4] 设 $A,B\in M_n$ 且 A,B 是半正定矩阵, 则

$$||A^{\frac{1}{2}}(A+B)B^{\frac{1}{2}}||\leq\frac{1}{2}||(A+B)^2||.$$

定理 2.1 设 $A,B,X\in M_n$ 且 A,B 是半正定矩阵, 则

$$\varphi(\mu)+2\left(\int_0^1\varphi(v)dv-\varphi(\mu)\right)\leq\varphi(0),0\leq v\leq 1,0<\mu<1, \tag{2.1}$$

其中 $\varphi(v)=||A^vXB^{1-v}+A^{1-v}XB^v||$.

证 当 $0\leq v\leq\mu$ 时, 由引理 2.1 可得

$$\varphi(v)\leq(1-\frac{v}{\mu})\varphi(0)+\frac{v}{\mu}\varphi(\mu).$$

于是

$$\int_0^\mu\varphi(v)dv\leq\varphi(0)\int_0^\mu(1-\frac{v}{\mu})dv+\varphi(\mu)\int_0^\mu\frac{v}{\mu}dv.$$

则有

$$\int_0^\mu \varphi(v)dv \le \frac{\mu}{2}\left(\varphi(0)+\varphi(\mu)\right). \tag{2.2}$$

当 $\mu < v \le 1$ 时, 由引理 2.1 可得

$$\varphi(v) \le (1-\frac{1-v}{1-\mu})\varphi(0)+\frac{1-v}{1-\mu}\varphi(\mu).$$

于是

$$\int_\mu^1 \varphi(v)dv \le \varphi(0)\int_\mu^1 (1-\frac{1-v}{1-\mu})dv+\varphi(\mu)\int_\mu^1 \frac{1-v}{1-\mu}dv,$$

则有

$$\int_\mu^1 \varphi(v)dv \le \frac{1-\mu}{2}\left(\varphi(0)+\varphi(\mu)\right). \tag{2.3}$$

由不等式 (2.2) 和 (2.3), 有

$$\int_0^1 \varphi(v)dv = \int_0^\mu \varphi(v)dv + \int_\mu^1 \varphi(v)dv \le \frac{1}{2}(\varphi(0)+\varphi(\mu)). \tag{2.4}$$

不等式 (2.4) 可写成

$$2\int_0^1 \varphi(v)dv \le \varphi(0)+\varphi(\mu),$$

故

$$\varphi(\mu)+2\left(\int_0^1 \varphi(v)dv-\varphi(\mu)\right) \le \varphi(0).$$

注 2.1 在定理 2.1 中, 当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时, 可得不等式 (1.2).

定理 2.2 设 $A, B \in M_n$ 且 A, B 是半正定矩阵, 则

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}||A^{\frac{1}{2}+\mu}B^{\frac{3}{2}-\mu}+A^{\frac{3}{2}-\mu}B^{\frac{1}{2}+\mu}||+&\left(\int_0^1 \psi(v)dv-||A^{\frac{1}{2}+\mu}B^{\frac{3}{2}-\mu}+A^{\frac{3}{2}-\mu}B^{\frac{1}{2}+\mu}||\right)\\ &\le \frac{1}{4}||(A+B)^2||,\end{aligned} \tag{2.5}$$

其中 $0 \le v \le 1, 0<\mu<1, \psi(v)=||A^{\frac{1}{2}+v}B^{\frac{3}{2}-v}+A^{\frac{3}{2}-v}B^{\frac{1}{2}+v}||$.

证 在不等式 (2.1), 令 $X=A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}$, 可得

$$\begin{aligned}||A^{\frac{1}{2}+\mu}B^{\frac{3}{2}-\mu}+A^{\frac{3}{2}-\mu}B^{\frac{1}{2}+\mu}||+2&\left(\int_0^1 \psi(v)dv-||A^{\frac{1}{2}+\mu}B^{\frac{3}{2}-\mu}+A^{\frac{3}{2}-\mu}B^{\frac{1}{2}+\mu}||\right)\\ &\le ||A^{\frac{1}{2}}(A+B)B^{\frac{1}{2}}||.\end{aligned} \tag{2.6}$$

由引理 2.2, 不等式 (2.6) 可写成

$$||A^{\frac{1}{2}+\mu}B^{\frac{3}{2}-\mu}+A^{\frac{3}{2}-\mu}B^{\frac{1}{2}+\mu}||+2\left(\int_0^1 \psi(v)dv-||A^{\frac{1}{2}+\mu}B^{\frac{3}{2}-\mu}+A^{\frac{3}{2}-\mu}B^{\frac{1}{2}+\mu}||\right) \le \frac{1}{2}||(A+B)^2||.$$

注 2.2 在定理 2.2 中, 当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时, 可得不等式 (1.4).

参 考 文 献

[1] Bhatia R, Davis C. More matrix forms of the arithmetic-geometric mean inequality[J]. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1993, 14(1): 132–136.

[2] Bhatia R. Matrix analysis[M]. New York: Springer-Verlag, 1997.

[3] Zou Limim, He Chuanjiang. On some inequalities for unitarily invariant norms and singular values[J]. Linear Algebra Appl., 2012, 436: 3354–3361.

[4] Bhatia R, Kittaneh F. Notes on matrix arithmetic-geometric mean inequalities[J]. Linear Algebra Appl., 2000, 308: 203–211.

[5] Xue Jianming, Hu Xingkai. A note on some inequalities for unitarily invariant norms[J]. J. Math. Inequal., 2015, 9(3): 841–846.

[6] 邹黎敏, 吴艳秋. 矩阵酉不变范数 Hölder 不等式及其应用 [J]. 数学物理学报, 2017, 37A(3): 450–456.

[7] Al-Natoor A, Benzamia S, Kittaneh F. Unitarily invariant norm inequalities for positive semidefinite matrices[J]. Linear Algebra Appl., 2022, 633: 303–315.

[8] Cao Haisong, Wu Junliang. Unitarily invariant norm inequalities involving Heron and Heinz means[J]. J. Inequal. Appl., 2014, 2014: 288.

[9] Cao Haisong. A new Hermite-Hadamard type inequality for coordinate convex function[J]. J. Inequal. Appl., 2020, 2020(1): 162.

[10] Liu Wushang, Hu Xingkai, Shi Jianping. On some inequalities related to Heinz means for unitarily invariant norms[J]. J. Math. Inequal., 2022, 16(3): 1123–1128.

GENERALIZATIONS OF TWO UNITARILY INVARIANT NORM INEQUALITIES

HU Xing-kai, YI Yuan, LIU Wu-shuang

(*Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China*)

Abstract: In this paper, unitarily invariant norm inequalities for matrices are studied. Using the convexity of $\varphi(v) = \left\|A^vXB^{1-v} + A^{1-v}XB^v\right\|$ on the interval $[0,1]$, two unitarily invariant norm inequalities for matrices are generalized.

Keywords: positive semidefinite matrices; convex function; unitarily invariant norms

2010 MR Subject Classification: 15A45; 15A60