Vol. 44 (2024)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

修正的一元与二元 Szasz-Mirakyan-Kantorovich 算子在 Orlicz 空间内的加权逼近

陈 琳, 吴嘎日迪
(内蒙古师范大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特 010022)
(内蒙古自治区应用数学中心, 内蒙古 呼和浩特 010022)

摘 要: 本文主要研究了修正的一元与二元 Szasz-Mirakyan-Kantorovich 算子的逼近问题. 为此，首先证明了在加权 Orlicz 空间内的 Korovkin 型定理，在此基础上利用 Jensen 不等式，*Hölder* 不等式，Steklov 平均函数并结合相关分析技巧，获得了修正的一元与二元 Szasz-Mirakyan-Kantorovich 算子在加权 Orlicz 空间内的逼近正定理和收敛定理.

关键词: Szasz-Mirakyan-Kantorovich 算子; Orlicz 空间; Korovkin 型定理; 逼近
MR(2010) **主题分类号**: 41A35; 41A25 **中图分类号**: O174.41
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2024)01-0059-14

1 引言

著名的 Szasz-Mirakyan-Kantorovich 算子为 $T_n(f;x)=:n\sum\limits_{k=0}^{\infty}e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\mathrm{d}t$, 其中 $x\in R_0=[0,+\infty)$，$n\in N$. 参考文献 [1] 和 [2] 对于该算子在勒贝格可积函数空间内的逼近问题已有详细研究. 之后参考文献 [3] 中给出了一个修正的 Szasz-Mirakyan-Kantorovich 算子

$$T_n(f;a_n,b_n;x)=:b_n\sum_{k=0}^{\infty}e^{-a_nx}\frac{(a_nx)^k}{k!}\int_{\frac{k}{b_n}}^{\frac{k+1}{b_n}}f(t)\mathrm{d}t,x\in R_0,n\in N,$$

其中 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是递增的无界数列，并且 $a_n\geq 1$，$b_n\geq 1$，同时 $\{\frac{a_n}{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是不减数列且

$$\frac{a_n}{b_n}=1+o(\frac{1}{b_n}),\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=0.$$

同时，ZBIGNIEW WALCZAK 在参考文献 [3] 中研究了这一算子在勒贝格可积函数空间中的相关逼近问题. 本文将函数空间放大为 Orlicz 空间，并在这一空间内研究修正的 Szasz-Mirakyan-Kantorovich 算子的加权逼近，同时给出相应的逼近正定理以及收敛定理.

*收稿日期: 2023-09-17 接收日期: 2023-10-25
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11761055); 内蒙古师范大学基本科研业务费专项资金资助项目 (2023JBZD007).
作者简介: 陈琳 (1999–), 女, 内蒙古乌兰察布, 研究生, 主要研究方向: 函数逼近论.
通讯作者: 吴嘎日迪, E-mail: wgrd@imnu.edu.cn.

结合参考文献 [4]，并仿照修正的一元 Szasz-Mirakyan-Kantorovich 算子，我们定义修正的二元 Szasz-Mirakyan-Kantorovich 算子如下

$$
\begin{aligned}
&T_{n,m}(f;a_n,b_n,c_m,d_m;x,y)\\
=:&b_nd_me^{-a_nx}e^{-c_my}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a_nx)^k}{k!}\frac{(c_my)^j}{j!}\int_{\frac{j}{d_m}}^{\frac{j+1}{d_m}}\int_{\frac{k}{b_n}}^{\frac{k+1}{b_n}}f(u_1,u_2)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2,
\end{aligned}
$$

其中 u_1, $u_2\in R_0$, $n\in N$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{d_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是递增的无界数列，并且满足

$$
\frac{a_n}{b_n}=1+o(\frac{1}{b_n}),\ \ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=0;\ \ \frac{c_m}{d_m}=1+o(\frac{1}{d_m}),\ \ \lim_{m\to\infty}\frac{1}{d_m}=0.
$$

之后我们证明了加权 *Orlicz* 空间内的 Korovkin 型定理，并在此基础上研究了这个二元算子在加权 Orlicz 空间内的收敛问题.

我们以 $L_M^*[0,+\infty)$(简记为 L_M^*) 表示定义在 $[0,+\infty)$ 上由 N 函数 $M(u)$ 生成的 Orlicz 空间，$N(v)$ 是 $M(u)$ 的余 N 函数，对于任意的 $f\in L_M^*$，定义 Orlicz 范数为

$$
\|f\|_M=\sup_{\rho(v;N)\le 1}\left|\int_0^{+\infty}f(x)v(x)\mathrm{d}x\right|,
$$

其中 $\rho(v;N)=\int_0^{+\infty}N(v(x))\mathrm{d}x$ 是 $v(x)$ 关于 $N(v)$ 的模. 由参考文献 [5] 知，上述 Orlicz 范数还可以用如下方式计算

$$
\|f\|_M=\inf_{\alpha>0}\frac{1}{\alpha}(1+\int_0^{+\infty}M(\alpha f(x))\mathrm{d}x).
$$

记 $w_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 n 元权函数，对 $f\in L_{M,w_n}^*$(f 是 n 元函数，且每一个自变量的取值范围均是 $[0,+\infty)$)，定义其加权 Orlicz 范数如下

$$
\begin{aligned}
&\|f\|_{M,w_n}\\
=&\sup_{\rho(v(x_1,x_2,\cdots,x_n);N)\le 1}|\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots;x_n)v(x_1,x_2,\cdots;x_n)\\
&\times w_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n|,
\end{aligned}
$$

其中 $\rho(v(x_1,x_2,\cdots,x_n);N)=\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}N(v(x_1,x_2,\cdots,x_n))\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$ 表示 $v(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 关于 $N(v)$ 的模. 还可以用如下方式计算加权 Orlicz 范数

$$
\begin{aligned}
&\|f\|_{M,w_n}\\
=&\inf_{\alpha>0}\frac{1}{\alpha}(1+\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}M(\alpha f(x_1,x_2,\cdots,x_n)w_n(x_1,x_2,\cdots,x_n))\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n).
\end{aligned}
$$

定义 Orlicz 空间内的连续模为

$$
\omega(f;t)_M=:\sup_{0\le h\le t}\|\Delta_hf(\cdot)\|_M(t\ge 0),
$$

其中 $\Delta_h f(x) =: f(x+h) - f(x)$.

注 本文中 C 在不同处表示不同的正常数.

2 相关引理

引理 2.1 $\{T_n(f;a_n,b_n;x)\}$ 是 L_M^* 到 L_M^* 的有界正线性算子序列，且 $\|T_n(f;a_n,b_n;x)\|_M \le \frac{b_1}{a_1}\|f\|_M$.

证 因为

$$T_n(f;a_n,b_n;x) =: b_n \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a_n x}\frac{(a_n x)^k}{k!}\int_{\frac{k}{bn}}^{\frac{k+1}{bn}} f(t)\mathrm{d}t,$$

其中

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-a_n x}\frac{(a_n x)^k}{k!} = 1, \qquad \int_0^{\infty} e^{-a_n x}\frac{(a_n x)^k}{k!}\mathrm{d}x = \frac{1}{a_n}.$$

故利用 Jensen 不等式，有

$$\begin{aligned}
&\|T_n(f;a_n,b_n;x)\|_M\\
=&\inf_{\alpha>0}\frac{1}{\alpha}(1+\int_0^{\infty} M(\alpha T_n(f;a_n,b_n;x))\mathrm{d}x)\\
=&\inf_{\alpha>0}\frac{1}{\alpha}(1+\int_0^{\infty} M(\alpha b_n \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a_n x}\frac{(a_n x)^k}{k!}\int_{\frac{k}{bn}}^{\frac{k+1}{bn}} f(t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}x)\\
\le&\inf_{\alpha>0}\frac{1}{\alpha}(1+\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-a_n x}\frac{(a_n x)^k}{k!} M(\alpha b_n \int_{\frac{k}{bn}}^{\frac{k+1}{bn}} f(t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}x)\\
\le&\inf_{\alpha>0}\frac{1}{\alpha}(1+\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-a_n x}\frac{(a_n x)^k}{k!} b_n \int_{\frac{k}{bn}}^{\frac{k+1}{bn}} M(\alpha f(t))\mathrm{d}t\mathrm{d}x)\\
=&\inf_{\alpha>0}\frac{1}{\alpha}(1+b_n\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-a_n x}\frac{(a_n x)^k}{k!}\mathrm{d}x \int_{\frac{k}{bn}}^{\frac{k+1}{bn}} M(\alpha f(t))\mathrm{d}t)\\
=&\inf_{\alpha>0}\frac{1}{\alpha}(1+\frac{b_n}{a_n}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\frac{k}{bn}}^{\frac{k+1}{bn}} M(\alpha f(t))\mathrm{d}t)\\
=&\inf_{\alpha>0}\frac{1}{\alpha}(1+\frac{b_n}{a_n}\int_0^{\infty} M(\alpha f(t))\mathrm{d}t)\\
\le&\frac{b_n}{a_n}\|f\|_M.
\end{aligned}$$

因为 $\{\frac{b_n}{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是不增数列且趋于 1，从而有

$$\|T_n(f;a_n,b_n;x)\|_M \le \frac{b_n}{a_n}\|f\|_M \le \frac{b_1}{a_1}\|f\|_M.$$

引理 2.2[3] 令

$$y_x(t) =: \begin{cases} 1, & t \le x \\ 0, & t > x \end{cases} \quad (x \in R_0),$$

再令 $w(x)=\frac{1}{1+x}$，则存在与 a_1 和 b_1 有关的正常数 $M_1(a_1,b_1)$，使得

$$R_n(t)=:\int_0^{\infty}\left|T_n(y_x(t);a_n,b_n;x)-y_x(t)\right|w(x)\mathrm{d}x\le M_1(a_1,b_1)\frac{1}{\sqrt{b_n}}.$$

引理 2.3 设 $f\in L_M^*$，且 $f'\in L_M^*$，则存在与 a_1 和 b_1 有关的正常数 $M_2(a_1,b_1)$，使得

$$\|(T_n(f;a_n,b_n;x)-f(x))w(x)\|_M\le M_2(a_1,b_1)\|f'\|_M\frac{1}{\sqrt{b_n}}.$$

证 因为 $f(x)-f(0)=\displaystyle\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}f'(t)y_x(t)\mathrm{d}t$, 并且

$$T_n(f;a_n,b_n;x)-f(x)=\int_0^{\infty}f'(t)\{T_n(y_x(t);a_n,b_n;x)-y_x(t)\}\mathrm{d}t.$$

根据引理 2.2 有

$$\begin{aligned}
&\|[T_n(f;a_n,b_n;x)-f(x)]w(x)\|_M\\
=&\sup_{\rho(v;N)\le 1}\left|\int_0^{\infty}(T_n(f;a_n,b_n;x)-f(x))w(x)v(x)\mathrm{d}x\right|\\
\le&C\left|\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}f'(t)\{T_n(y_x(t);a_n,b_n;x)-y_x(t)\}\mathrm{d}tw(x)\mathrm{d}x\right|\\
\le&C\left|\int_0^{\infty}f'(t)\int_0^{\infty}\{|T_n(y_x(t);a_n,b_n;x)-y_x(t)|\}w(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\\
=&C\left|\int_0^{\infty}f'(t)R_n(t)\mathrm{d}t\right|\\
\le&C\|f'\|_M\|R_n(t)\|_N\\
=&C\|f'\|_M\sup_{\rho(u;M)\le 1}\left|\int_0^{\infty}R_n(t)u(t)\mathrm{d}t\right|\\
\le&C\|f'\|_M M_1(a_1,b_1)\frac{1}{\sqrt{b_n}}\sup_{\rho(u;M)\le 1}|\int_0^{\infty}u(t)\mathrm{d}t|
\end{aligned}$$

根据参考文献 [5] 中 N 函数的相关性质，我们有 $\lim\limits_{u\to\infty}\frac{M(u)}{u}=\infty$, $\lim\limits_{u\to 0}\frac{M(u)}{u}=0$. 从而有 $\sup\limits_{\rho(u;M)\le 1}\left|\displaystyle\int_0^{\infty}u(t)\mathrm{d}t\right|\le C$. 所以

$$\|[T_n(f;a_n,b_n;x)-f(x)]w(x)\|_M\le C\|f'\|_M M_1(a_1,b_1)\frac{1}{\sqrt{b_n}}\le M_2(a_1,b_1)\|f'\|_M\frac{1}{\sqrt{b_n}}.$$

引理 2.4 $\{T_{n,m}(f;a_n,b_n,c_m,d_m;x,y)\}$ 是 L_M^* 到 L_M^* 的有界正线性算子序列，且

$$\|T_{n,m}(f;a_n,b_n,c_m,d_m;x,y)\|_M\le\frac{b_1d_1}{a_1c_1}\|f\|_M.$$

证 因为

$$e^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)^k}{k!}=1,\ \ e^{-c_m y}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(c_m y)^j}{j!}=1;$$

$$\int_0^{\infty}e^{-a_n x}\frac{(a_n x)^k}{k!}\mathrm{d}x=\frac{1}{a_n},\quad \int_0^{\infty}e^{-c_m y}\frac{(c_m y)^j}{j!}\mathrm{d}y=\frac{1}{c_m}.$$

从而

$$\begin{aligned}
&\|T_{n,m}(f;a_n,b_n,c_m,d_m;x,y)\|_M\\
=&\inf_{\beta>0}\frac{1}{\beta}(1+\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}M(\beta b_n d_m e^{-a_n x}e^{-c_m y}\\
&\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a_n x)^k}{k!}\frac{(c_m y)^j}{j!}\int_{\frac{j}{dm}}^{\frac{j+1}{dm}}\int_{\frac{k}{bn}}^{\frac{k+1}{bn}}f(u_1,u_2)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\
\le&\inf_{\beta>0}\frac{1}{\beta}(1+\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-a_n x}e^{-c_m y}\\
&\times\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a_n x)^k}{k!}\frac{(c_m y)^j}{j!}M(\beta b_n d_m\int_{\frac{j}{dm}}^{\frac{j+1}{dm}}\int_{\frac{k}{bn}}^{\frac{k+1}{bn}}f(u_1,u_2)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y)\\
=&\inf_{\beta>0}\frac{1}{\beta}(1+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-a_n x}\frac{(a_n x)^k}{k!}\mathrm{d}x\int_0^{\infty}e^{-c_m y}\frac{(c_m y)^j}{j!}\mathrm{d}y\\
&\times M(\beta b_n d_m\int_{\frac{j}{dm}}^{\frac{j+1}{dm}}\int_{\frac{k}{bn}}^{\frac{k+1}{bn}}f(u_1,u_2)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2))\\
\le&\inf_{\beta>0}\frac{1}{\beta}(1+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{b_n d_m}{a_n c_m}\int_{\frac{j}{dm}}^{\frac{j+1}{dm}}\int_{\frac{k}{bn}}^{\frac{k+1}{bn}}M(\beta f(u_1,u_2))\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2)\\
\le&\frac{b_n d_m}{a_n c_m}\inf_{\beta>0}\frac{1}{\beta}(1+\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}M(\beta f(u_1,u_2))\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2)\\
=&\frac{b_n d_m}{a_n c_m}\|f\|_M.
\end{aligned}$$

由于 $\frac{\{b_n\}}{\{a_n\}}$, $\frac{\{d_m\}}{\{c_m\}}$ 是非减数列，从而有 $\|T_{n,m}(f;a_n,b_n,c_m,d_m;x,y)\|_M\le\frac{b_1d_1}{a_1c_1}\|f\|_M$.

3 主要定理

定理 3.1 设 $\{L_n\}_{n\in N}$ 是 $L_M^*\to L_M^*$ 的一致有界正线性算子序列, 对于 $w_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=e^{-(x_1+x_2+\cdots+x_n)}$，若

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\|L_n(1;x)-1\|_{M,w_n}=0$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\|L_n(t_i;x)-x_i\|_{M,w_n}=0,\ (i=1,2,\cdots,n)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\|L_n(|t|^2;x)-|x|^2\|_{M,w_n}=0$,

则对任意 $f\in L_M^*$，有

$$\lim_{n\to\infty}\|L_n(f)-f\|_{M,w_n}=0.$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$t=(t_1,t_2,\cdots,t_n)$，且 $|t|$ 和 $|x|$ 表示 n 维欧氏空间中的欧氏距离.

证 类似于参考文献 [6][7][8] 的证明思路，对任何一个正数 A，设 $\chi_1^A(t)$ 是 n 维欧氏空间中球体 $0\le|t|\le A$ 上的特征函数.

令 $\chi_2^A(t)=1-\chi_1^A(t)$，则由于 $\chi_2^A(t)\to 0(A\to+\infty)$，从而对任意 $\varepsilon>0$，当 A 充分大时，有 $|\chi_2^A(t)|<\varepsilon$. 而

$$\begin{aligned}\|f\chi_2^A\|_M=&\sup_{\rho(v(t_1,t_2,\cdots,t_n);N)\le1)}|\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty f(t_1,t_2,\cdots,t_n)\\&\times\chi_2^A(t_1,t_2,\cdots,t_n)v(t_1,t_2,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n|<\varepsilon.\end{aligned}$$

另一方面，由于 $\{L_n\}$ 是 $L_M^*\to L_M^*$ 的一致有界正线性算子，故有

$$\|L_n(f)\|_M\le K\|f\|_M.$$

因为

$$\begin{aligned}&\|L_n(f)-f\|_{M,w_n}\\=&\sup_{\rho(v(t_1,t_2,\cdots,t_n);N)\le1}|\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty(L_nf-f)v(t_1,t_2,\cdots,t_n)\\&\times e^{-(t_1+t_2+\cdots+t_n)}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n|\\\le&\sup_{\rho(v(t_1,t_2,\cdots,t_n);N)\le1}\left|\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty(L_nf-f)v(t_1,t_2,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n\right|\\=&\|L_nf-f\|_M\\=&\|L_n[(\chi_1^A+\chi_2^A)f]-(\chi_1^A+\chi_2^A)f\|_M\\=&\|L_n(\chi_1^Af)+L_n(\chi_2^Af)-\chi_1^Af-\chi_2^Af\|_M\\\le&\|L_n(\chi_1^Af)-\chi_1^Af\|_M+\|L_n(\chi_2^Af)-\chi_2^Af\|_M\\=:&I_n^{'}+I_n^{''}.\end{aligned}$$

先讨论 $I_n^{''}$，由线性算子 $\{L_n\}$ 的一致有界性，有 $\|L_n(\chi_2^Af)-\chi_2^Af\|_M\le(K+1)\varepsilon$.

因为连续函数类在 $L_M^*[0,A]$ 中稠密，故对任意 $\varepsilon_1>0$，存在 $[0,A]$ 上的连续函数 $\varphi(t)$ (当 $t>A$ 时，令 $\varphi(t)=0$)，使得

$$\|(f-\varphi)\chi_1^A\|_M<\frac{\varepsilon_1}{(K+1)}.$$

从而

$$\begin{aligned}I_n^{'}=&\|L_n(\chi_1^Af)-\chi_1^Af\|_M\\\le&\|L_n[\chi_1^A(f-\varphi)]\|_M+\|L_n(\varphi\chi_1^A)-\varphi\chi_1^A\|_M+\|(f-\varphi)\chi_1^A\|_M\\\le&\|L_n(\varphi\chi_1^A)-\varphi\chi_1^A\|_M+(K+1)\|(f-\varphi)\chi_1^A\|_M\\<&\|L_n(\varphi\chi_1^A)-\varphi\chi_1^A\|_M+\varepsilon_1.\end{aligned}\tag{3.1}$$

又因为对于 $A_1 > A$，有 $\chi_2^{A_1}\chi_1^A\varphi = 0$，所以

$$\begin{aligned}\|L_n(\varphi\chi_1^A) - \varphi\chi_1^A\|_M \le&\|[L_n(\varphi\chi_1^A) - \varphi\chi_1^A]\chi_1^{A_1}\|_M + \|\chi_2^{A_1}L_n(\varphi\chi_1^A)\|_M + \|\varphi\chi_1^A\chi_2^{A_1}\|_M\\ =&\|[L_n(\varphi\chi_1^A) - \varphi\chi_1^A]\chi_1^{A_1}\|_M + \|\chi_2^{A_1}L_n(\varphi\chi_1^A)\|_M.\end{aligned} \tag{3.2}$$

我们选定 A_1，使

$$|\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \chi_2^{A_1}(t_1,t_2,\cdots,t_n)v(t_1,t_2,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n| < \frac{\varepsilon_1}{M_\varphi},$$

其中 $M_\varphi = \max\limits_{t\in R_0^n}|\varphi(t)|\chi_1^{A_1}(t)$.

从而

$$\begin{aligned}&\|\chi_2^{A_1}L_n(\varphi\chi_1^A)\|_M\\
=&\sup_{\rho(v(t_1,t_2,\cdots,t_n;N)\le 1)}\left|\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty(1-\chi_1^{A_1})L_n(\varphi\chi_1^A)v(t_1,t_2,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n\right|\\
\le&\sup_{\rho(v(t_1,t_2,\cdots,t_n;N)\le 1)}\left|\int_{A_1}^\infty\int_{A_1}^\infty\cdots\int_{A_1}^\infty L_n(\varphi\chi_1^A)v(t_1,t_2,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n\right|\\
\le&\sup_{\rho(v(t_1,t_2,\cdots,t_n;N)\le 1)}\left|\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty L_n(\varphi\chi_1^A)v(t_1,t_2,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n\right|\\
\le&\sup_{\rho(v(t_1,t_2,\cdots,t_n;N)\le 1)}\left|\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty M_\varphi L_n(1;x)v(t_1,t_2,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n\right|\\
\le&M_\varphi\left\{\sup_{\rho(v(t_1,t_2,\cdots,t_n;N)\le 1)}\left|\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty(L_n(1;x)-1)v(t_1,t_2,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n\right|\right\}\\
&+M_\varphi\left\{\sup_{\rho(v(t_1,t_2,\cdots,t_n;N)\le 1)}\left|\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \chi_2^{A_1}v(t_1,t_2,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n\right|\right\}\\
\le&M_\varphi\left\{\sup_{\rho(v(t_1,t_2,\cdots,t_n;N)\le 1)}\left|\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty(L_n(1;x)-1)v(t_1,t_2,\cdots,t_n)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n\right|\right\}\\
&+\varepsilon_1.\end{aligned}$$

因此得

$$\|\chi_2^{A_1}L_n(\varphi\chi_1^A)\|_M \le M_\varphi\|L_n(1;x)-1\|_M + \varepsilon_1. \tag{3.3}$$

再将 (3.3) 代入 (3.2) 得

$$\|L_n(\varphi\chi_1^A) - \varphi\chi_1^A\|_M \le \|[L_n(\varphi\chi_1^A) - \varphi\chi_1^A]\chi_1^{A_1}\|_M + M_\varphi\|L_n(1;x)-1\|_M + \varepsilon_1. \tag{3.4}$$

最后将 (3.4) 代入 (3.1) 得

$$I_n^{'} \le 2\varepsilon_1 + M_\varphi\|L_n(1;x)-1\|_M + \|[L_n(\varphi\chi_1^A) - \varphi\chi_1^A]\chi_1^{A_1}\|_M. \tag{3.5}$$

根据定理的条件，对于充分大的 n，有 $\|L_n(1;x)-1\|_M<\frac{\varepsilon_1}{M_\varphi}$. 又因为 $\varphi\chi_1^A$ 在 $[0,A]$ 上为连续函数，所以对于上述 $\varepsilon_1>0$，存在 $\delta>0$，当 $x,\ t\in R_0^n$，且 $|t-x|<\delta$ 时，有

$$|\varphi(t)\chi_1^A(t)-\varphi(x)\chi_1^A(x)|<\varepsilon_1+2M_\varphi\frac{(t-x)^2}{\delta^2}.$$

从而

$$\begin{aligned}
&\|[L_n(\varphi\chi_1^A)-\varphi\chi_1^A]\chi_1^{A_1}\|_M\\
\leq&\|[L_n(|\varphi(t)\chi_1^A(t)-\varphi(x)\chi_1^A(x)|);x)]\chi_1^{A_1}\|_M+\|\varphi(x)\chi_1^{A_1}(x)(L_n(1;x)-1)\|_M\\
\leq&\|[L_n|\varepsilon_1+2M_\varphi\frac{(t-x)^2}{\delta^2}|;x]\chi_1^{A_1}\|_M+\|\varphi(x)\chi_1^{A_1}(x)(L_n(1;x)-1)\|_M\\
\leq&\varepsilon_1\|L_n(1;x)\|_M+\frac{2M_\varphi}{\delta^2}\|L_n(|t-x|^2;x)\|_M+M_\varphi\|L_n(1;x)-1\|_M\\
\leq&\varepsilon_1K\|1\|_M+\frac{2M_\varphi}{\delta^2}\|L_n(|t-x|^2;x)\|_M+\varepsilon_1.
\end{aligned}\tag{3.6}$$

下面只对 $\|L_n(|t-x|^2;x)\|_M$ 进行研究. 根据已知条件，当 n 充分大时，对于上述 $\varepsilon_1>0$，有

$$\max\left\{\|L_n(|t|^2;x)-|x|^2\|_M,\sum_{i=1}^n\|L_n(t_i;x)-x_i\|_M,\|L_n(1;x)-1\|_M\right\}<\frac{\varepsilon_1\delta^2}{2M_\varphi(1+A)^2}.$$

故

$$\begin{aligned}
&\|L_n(|t-x|^2;x)\|_M\\
=&\|L_n(t^2+x^2-2tx;x)\|_M\\
\leq&\|L_n(t^2;x)-x^2\|_M+x^2\|L_n(1;x)-1\|_M+2\sum_{i=1}^{\infty}x_i\|x_i-L_n(t_i;x_i)\|_M\\
\leq&\|L_n(t^2;x)-x^2\|_M+2A\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i-L_n(t_i;x_i)\|_M+A^2\|L_n(1;x)-1\|_M\\
\leq&(1+A)^2max\left\{\|L_n(|t|^2;x)-|x|^2\|_M,\sum_{i=1}^n\|L_n(t_i;x)-x_i\|_M,\|L_n(1;x)-1\|_M\right\}\\
<&\frac{\varepsilon_1\delta^2}{2M_\varphi}.
\end{aligned}$$

所以

$$\|L_n(|t-x|^2;x)\|_M\leq\frac{\varepsilon_1\delta^2}{2M_\varphi}.\tag{3.7}$$

将 (3.7) 代入 (3.6) 得

$$\|[L_n(\varphi\chi_1^A)-\varphi\chi_1^A]\chi_1^{A_1}\|_M<\varepsilon_1(2+K||1||_M).\tag{3.8}$$

最后将 (3.8) 代入 (3.5) 得

$$
\begin{aligned}
I_n^{'} \leq & 2\varepsilon_1 + M_\varphi \|L_n(1;x)-1\|_M + \|[L_n(\varphi\chi_1^A)-\varphi\chi_1^A]\chi_1^{A_1}\|_M \\
\leq & 5\varepsilon_1 + K\|1\|_M\varepsilon_1.
\end{aligned}
$$

从而

$$
\|L_n(f)-f\|_{M,w_n} \leq I_n^{'} + I_n^{''} \leq (K+1)\varepsilon + (5+K\|1\|_M)\varepsilon_1.
$$

所以由 ε 和 ε_1 的任意性，有

$$
\lim_{n\to\infty} \|L_n(f)-f\|_{M,w_n} = 0.
$$

定理 3.2 设 $w(x)=\frac{1}{1+x}$，则对任意 $f\in L_M^*$，存在与 a_1,b_1 有关的常数 $M_3(a_1,b_1)$，使得

$$
\|(T_n(f;a_n,b_n;x)-f(x))w(x)\|_M \leq M_3(a_1,b_1)\omega(f;\frac{1}{\sqrt{b_n}})_M.
$$

证 利用 Steklov 平均函数

$$
f_h(x)=\frac{1}{h}\int_0^h f(x+u)\mathrm{d}u, x\in R_0, h>0.
$$

对于 f_h 我们有

$$
\begin{aligned}
\|(f-f_h)w\|_M = & \sup_{\rho(v;N)\leq 1}\left|\int_0^\infty (f-f_h)w(x)v(x)\mathrm{d}x\right| \\
= & \sup_{\rho(v;N)\leq 1}\left|\int_0^\infty (f-\frac{1}{h}\int_0^h f(x+u)\mathrm{d}u)w(x)v(x)\mathrm{d}x\right| \\
\leq & \sup_{\rho(v;N)\leq 1}\frac{1}{h}\left|\int_0^\infty\int_0^h |f(x+u)-f(x)|\,w(x)v(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}u\right| \\
= & \frac{1}{h}\int_0^h \sup_{\rho(v;N)\leq 1}\left|\int_0^\infty |f(x+u)-f(x)|\,v(x)w(x)\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}u \\
\leq & \frac{1}{h}\int_0^h \sup_{\rho(v;N)\leq 1}\left|\int_0^\infty |f(x+u)-f(x)|\,v(x)\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}u \\
\leq & \frac{1}{h}\int_0^h \omega(f;h)_M\mathrm{d}u \\
= & \omega(f;h)_M.
\end{aligned}
$$

又因为 $f_h'(x)=h^{-1}\Delta_h f(x)$，所以

$$
\begin{aligned}
\|f_h'(x)\|_M = & \sup_{\rho(v;N)\leq 1}\left|\int_0^\infty h^{-1}\Delta_h f(x)v(x)\mathrm{d}x\right| \\
= & h^{-1}\sup_{\rho(v;N)\leq 1}\left|\int_0^\infty \Delta_h f(x)v(x)\mathrm{d}x\right| \\
\leq & h^{-1}\omega(f;h)_M.
\end{aligned}
$$

故根据引理 2.3，有

$$\|(T_n(f_h)-f_h)w(x)\|_M \le M_2(a_1,b_1)\frac{1}{\sqrt{b_n}}\|f_h'\|_M \le M_2(a_1,b_1)\frac{1}{\sqrt{b_n}}h^{-1}\omega(f;h)_M.$$

当取 $h=\frac{1}{\sqrt{b_n}}$ 时，有 $\|(T_n(f_h)-f_h)w(x)\|_M \le M_2(a_1,b_1)\omega(f;\frac{1}{\sqrt{b_n}})_M$. 利用插项逼近法，有

$$\begin{aligned}\|(T_n(f)-f)w(x)\|_M =&\|T_n(f-f_h)w\|_M+\|(T_n(f_h)-f_h)w\|_M+\|(f_h-f)w\|_M\\ \le&\frac{b_1}{a_1}\|(f-f_h)w\|_M+M_2(a_1,b_1)\omega(f;\frac{1}{\sqrt{b_n}})_M+\|(f_h-f)w\|_M\\ \le&(\frac{b_1}{a_1}+1)\omega(f;\frac{1}{\sqrt{b_n}})_M+M_2(a_1,b_1)\omega(f;\frac{1}{\sqrt{b_n}})_M\\ \le&M_3(a_1,b_1)\omega(f;\frac{1}{\sqrt{b_n}})_M.\end{aligned}$$

定理 3.3 设 $\{T_n(f;a_n,b_n;x)\}$ 是 L_M^* 到 L_M^* 一致有界正线性算子序列，$w_1(x)=e^{-x}$，则对任意 $f\in L_M^*$，有

$$\lim_{n\to\infty}\|T_n(f;a_n,b_n;x)-f(x)\|_{M,w_1}=0.$$

证 因为

$$T_n(1;a_n,b_n;x)=b_n\sum_{k=0}^{\infty}e^{-a_nx}\frac{(a_nx)^k}{k!}\int_{\frac{k}{bn}}^{\frac{k+1}{bn}}1\ \mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-a_nx}\frac{(a_nx)^k}{k!}=1.$$

$$\begin{aligned}T_n(t;a_n,b_n;x)=&b_n\sum_{k=0}^{\infty}e^{-a_nx}\frac{(a_nx)^k}{k!}\int_{\frac{k}{bn}}^{\frac{k+1}{bn}}t\ \mathrm{d}t=b_n\sum_{k=0}^{\infty}e^{-a_nx}\frac{(a_nx)^k}{k!}\frac{2k+1}{2b_n^2}\\ =&\frac{a_nx}{b_n}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-a_nx}\frac{(a_nx)^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{1}{2b_n}=\frac{a_nx}{b_n}+\frac{1}{2b_n}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_n(t^2;a_n,b_n;x)=&b_n\sum_{k=0}^{\infty}e^{-a_nx}\frac{(a_nx)^k}{k!}\int_{\frac{k}{bn}}^{\frac{k+1}{bn}}t^2\ \mathrm{d}t\\ =&b_n\sum_{k=0}^{\infty}e^{-a_nx}\frac{(a_nx)^k}{k!}\frac{3k^2+3k+1}{3b_n^3}\\ =&\frac{a_nx}{b_n^2}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-a_nx}\frac{(a_nx)^{k-1}}{(k-1)!}k+\frac{a_nx}{b_n^2}+\frac{1}{3b_n^2}\\ =&\frac{a_nx}{b_n^2}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-a_nx}\frac{(a_nx)^k}{k!}(k+1)+\frac{a_nx}{b_n^2}+\frac{1}{3b_n^2}\\ =&\frac{(a_nx)^2}{b_n^2}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-a_nx}\frac{(a_nx)^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{2a_nx}{b_n^2}+\frac{1}{3b_n^2}\\ =&\frac{(a_nx)^2}{b_n^2}+\frac{2a_nx}{b_n^2}+\frac{1}{3b_n^2}.\end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
\|T_n(1;a_n,b_n;x)-1\|_{M,w_1} =&\|1-1\|_{M,w_1}=0.\\
\|T_n(t;a_n,b_n;x)-x\|_{M,w_1} =&\|\frac{a_nx}{b_n}+\frac{1}{2b_n}-x\|_{M,w_1}\\
\leq&(\frac{a_n}{b_n}-1)\|x\|_{M,w_1}+\|\frac{1}{2b_n}\|_{M,w_1}\\
=&(\frac{a_n}{b_n}-1)\sup_{\rho(v;N)\leq 1}\left|\int_0^\infty xv(x)e^{-x}\mathrm{d}x\right|+\frac{1}{2b_n}\sup_{\rho(v;N)\leq 1}\left|\int_0^\infty v(x)e^{-x}\mathrm{d}x\right|\\
\leq&C(\frac{a_n}{b_n}-1)\int_0^\infty xe^{-x}\mathrm{d}x+\frac{C}{2b_n}\int_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x\\
=&C(\frac{a_n}{b_n}-1)+\frac{C}{2b_n}.\\
\|T_n(t^2;a_n,b_n;x)-x^2\|_{M,w_1} =&\|\frac{(a_nx)^2}{b_n^2}+\frac{2a_nx}{b_n^2}+\frac{1}{3b_n^2}-x^2\|_{M,w_1}\\
\leq&(\frac{a_n^2}{b_n^2}-1)\|x^2\|_{M,w_1}+\frac{2a_n}{b_n^2}\|x\|_{M,w_1}+\frac{1}{3b_n^2}\|1\|_{M,w_1}\\
\leq&(\frac{a_n^2}{b_n^2}-1)\sup_{\rho(v;N)\leq 1}\left|\int_0^\infty x^2e^{-x}v(x)\mathrm{d}x\right|+C\frac{2a_n}{b_n^2}+\frac{C}{3b_n^2}\\
=&C(\frac{a_n^2}{b_n^2}-1)+C\frac{2a_n}{b_n^2}+\frac{C}{3b_n^2}.
\end{aligned}
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\|T_n(1;a_n,b_n;x)-1\|_{M,w_1}=0;\\
&\lim_{n\to\infty}\|T_n(t;a_n,b_n;x)-x\|_{M,w_1}=0;\\
&\lim_{n\to\infty}\|T_n(t^2;a_n,b_n;x)-x^2\|_{M,w_1}=0.
\end{aligned}
$$

故利用定理 3.1 得，对任意 $f\in L_M^*$，有

$$
\lim_{n\to\infty}\|T_n(f;a_n,b_n;x)-f(x)\|_{M,w_1}=0.
$$

定理 3.4 设 $\{T_{n,m}(f;a_n,b_n,c_m,d_m;x,y)\}$ 是 L_M^* 到 L_M^* 的一致有界正线性算子序列，$w_2(x,y)=e^{-(x+y)}$，则对任意的 $f\in L_M^*$，有

$$
\lim_{n,m\to\infty}\|T_{n,m}(f;a_n,b_n,c_m,d_m;x,y)-f(x,y)\|_{M,w_2}=0.
$$

证 因为

$$
\begin{aligned}
&T_{n,m}(1;a_n,b_n,c_m,d_m;x,y)\\
=&b_nd_me^{-a_nx}e^{-c_my}\sum_{k=0}^\infty\sum_{j=0}^\infty\frac{(a_nx)^k}{k!}\frac{(c_my)^j}{j!}\int_{\frac{j}{dm}}^{\frac{j+1}{dm}}\int_{\frac{k}{bn}}^{\frac{k+1}{bn}}1\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2=1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&T_{n,m}(u_1;a_n,b_n,c_m,d_m;x,y)\\
=&b_nd_me^{-a_nx}e^{-c_my}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a_nx)^k}{k!}\frac{(c_my)^j}{j!}\int_{\frac{j}{dm}}^{\frac{j+1}{dm}}\int_{\frac{k}{bn}}^{\frac{k+1}{bn}}u_1\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\\
=&b_n(e^{-a_nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_nx)^k}{k!}\frac{2k+1}{2b_n^2}\sum_{j=0}^{\infty}e^{-c_my}\frac{(c_my)^j}{j!})=b_n\sum_{k=0}^{\infty}e^{-a_nx}\frac{(a_nx)^k}{k!}\frac{2k+1}{2b_n^2}\\
=&\frac{a_nx}{b_n}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-a_nx}\frac{(a_nx)^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{1}{2b_n}=\frac{a_n}{b_n}x+\frac{1}{2b_n}.
\end{aligned}
$$

同理可求得

$$
T_{n,m}(u_2;a_n,b_n,c_m,d_m;x,y)=\frac{c_m}{d_m}y+\frac{1}{2d_m}.
$$

且

$$
\begin{aligned}
&T_{n,m}(u_1^2+u_2^2;a_n,b_n,c_m,d_m;x,y)\\
=&b_nd_me^{-a_nx}e^{-c_my}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a_nx)^k}{k!}\frac{(c_my)^j}{j!}\int_{\frac{j}{dm}}^{\frac{j+1}{dm}}\int_{\frac{k}{bn}}^{\frac{k+1}{bn}}(u_1^2+u_2^2)\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\\
=&b_nd_me^{-a_nx}e^{-c_my}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a_nx)^k}{k!}\frac{(c_my)^j}{j!}\frac{3k^2+3k+1}{3b_n^3d_m}\\
&+b_nd_me^{-a_nx}e^{-c_my}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a_nx)^k}{k!}\frac{(c_my)^j}{j!}\frac{3j^2+3j+1}{3d_m^3b_n}\\
=&\frac{(a_nx)^2}{b_n^2}+\frac{2a_nx}{b_n^2}+\frac{1}{3b_n^2}+\frac{(c_my)^2}{d_m^2}+\frac{2c_my}{d_m^2}+\frac{1}{3d_m^2}.
\end{aligned}
$$

对于

$$
\begin{aligned}
\|1\|_{M,w_2}=&\sup_{\rho(v(x,y);N)\le1}\left|\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(x+y)}v(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\\
\le&C\left|\int_0^{\infty}e^{-x}\mathrm{d}x\right|\left|\int_0^{\infty}e^{-y}\mathrm{d}y\right|=C.\\
\|x\|_{M,w_2}=&\sup_{\rho(v(x,y);N)\le1}\left|\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}xe^{-(x+y)}v(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\\
\le&C\left|\int_0^{\infty}xe^{-x}\mathrm{d}x\right|\left|\int_0^{\infty}e^{-y}\mathrm{d}y\right|=C.\\
\|x^2\|_{M,w_2}=&\sup_{\rho(v(x,y);N)\le1}\left|\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}x^2e^{-(x+y)}v(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\\
\le&C\left|\int_0^{\infty}x^2e^{-x}\mathrm{d}x\right|\left|\int_0^{\infty}e^{-y}\mathrm{d}y\right|=C.
\end{aligned}
$$

同理我们可以求得

$$
\|y\|_{M,w_2}\le C,\quad \|y^2\|_{M,w_2}\le C.
$$

所以

$$\begin{aligned}
&\lim_{n,m\to\infty}\|T_{n,m}(1;a_n,b_n,c_m,d_m;x,y)-1\|_{M,w_2}=0;\\
&\lim_{n,m\to\infty}\|T_{n,m}(u_1;a_n,b_n,c_m,d_m;x,y)-x\|_{M,w_2}\\
=&\lim_{n\to\infty}\|\frac{a_n}{b_n}x+\frac{1}{2b_n}-x\|_{M,w_2}\leq\lim_{n\to\infty}[(\frac{a_n}{b_n}-1)\|x\|_{M,w_2}+\frac{1}{2b_n}\|1\|_{M,w_2}]\\
\leq&\lim_{n\to\infty}[C(\frac{a_n}{b_n}-1)+\frac{C}{2b_n}]=0.
\end{aligned}$$

同理可得

$$\lim_{n,m\to\infty}\|T_{n,m}(u_2;a_n,b_n,c_m,d_m;x,y)-y\|_{M,w_2}=0.$$

且

$$\begin{aligned}
&\lim_{n,m\to\infty}\|T_{n,m}(u_1^2+u_2^2;a_n,b_n,c_m,d_m;x,y)-(x^2+y^2)\|_{M,w_2}\\
=&\lim_{n,m\to\infty}\|(\frac{a_n^2}{b_n^2}-1)x^2+\frac{2a_nx}{b_n^2}+\frac{1}{3b_n^2}+(\frac{c_m^2}{d_m^2}-1)y^2+\frac{2c_my}{d_m^2}+\frac{1}{3d_m^2}\|_{M,w_2}\\
\leq&\lim_{n,m\to\infty}\{(\frac{a_n^2}{b_n^2}-1)\|x^2\|_{M,w_2}+(\frac{c_m^2}{d_m^2}-1)\|y^2\|_{M,w_2}+\frac{2a_n}{b_n^2}\|x\|_{M,w_2}\\
&+\frac{2c_m}{d_m^2}\|y\|_{M,w_2}+(\frac{1}{3b_n^2}+\frac{1}{3d_m^2})\|1\|_{M,w_2}\}\\
\leq&\lim_{n,m\to\infty}C\{(\frac{a_n^2}{b_n^2}-1)+(\frac{c_m^2}{d_m^2}-1)+\frac{2a_n}{b_n^2}+\frac{2c_m}{d_m^2}+(\frac{1}{3b_n^2}+\frac{1}{3d_m^2})\}\\
=&0.
\end{aligned}$$

从而根据定理 3.1 得，对任意的 $f\in L_M^*$，有

$$\lim_{n,m\to\infty}\|T_{n,m}(f;a_n,b_n,c_m,d_m;x,y)-f(x,y)\|_{M,w_2}=0.$$

参 考 文 献

[1] Becker M. Global approximation theorems for Szasz-Mirakjan and Baskakov operators in polynomial weight spaces[J]. Indiana University Mathematics Journal, 1978, 27(1): 127–142.

[2] Butzer P L. On the extensions of Bernstein polynomials to the infinite interval[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1954, 5(4): 547–553.

[3] Walczak Z. On approximation by modified Szasz-Mirakyan operators[J]. Glasnik Matematicki, 2002, 37(57): 303–319.

[4] Ispir N, Atakut C. Approximation by modified Szasz − Mirakjan operators on weighted spaces[J]. Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Mathematical Sciences, 2002, 112(4): 571–578.

[5] 吴从炘, 王延辅. 奥尔里奇空间及其应用 [M]. 哈尔滨: 黑龙江科学技术出版社, 1983.

[6] Gadjiev A D, Aral A. Weighted Lp-approximation with positive linear operators on unbounded sets[J]. Applied Mathematics letters, 2007, 20(10): 1046–1051.

[7] 姜胜楠, 吴嘎日迪. 修正的 Picard 算子在 Orlicz 空间中的指数加权逼近 [J]. 应用数学, 2023, 36(03): 631–639.

[8] 李昕昕, 吴嘎日迪. Ibragimov-Gadjiev-Durrmeyer 算子在 Orlicz 空间内的逼近性质 [J]. 数学杂志, 2022, 42(3): 237–245.

WEIGHTED APPROXIMATION OF MODIFIED UNIVARIATE AND MULTIVARIATE SZASZ-MIRAKYAN-KANTOROVICH OPERATORS IN ORLICZ SPACES

CHEN Lin, WU Garidi

(*College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, China*)

(*Center for Applied Mathematics, Inner Mongolia Autonomous Regin, Hohhot 010022, China*)

Abstract: This article mainly studies the approximation problem of modified univariate and multivariate Szasz-Mirakyan-Kantorovich operators. In order to solve this problem, the Korovkin type theorem in weighted Orlicz spaces was first proved. Based on the Jensen inequality, Hölder inequality, Steklov mean function, and related analysis techniques, we obtained the approximation positive theorems and convergence theorems of the modified univariate and multivariate Szasz-Mirakyan-Kantorovich operators in weighted Orlicz spaces.

Keywords: Szasz-Mirakyan-Kantorovich operators; Orlicz space; Korovkin type theorem; approximation

2010 MR Subject Classification: 41A35; 41A25