

简支板边界条件下四阶问题基于降阶格式的一种有效的谱 Galerkin 逼近

覃嘉洪, 安 静

(贵州师范大学数学科学学院, 贵州 贵阳 550025)

摘 要: 本文研究了简支板边界条件下四阶问题基于降阶格式的一种有效的谱 Galerkin 逼近. 通过引入一个辅助函数和适当的 Sobolev 空间, 将原问题化为两个耦合的二阶问题, 建立其弱形式和相应的离散格式, 利用 Lax-Milgram 定理和投影算子的逼近性质, 我们证明了弱解和逼近解的存在唯一性以及它们之间的误差估计. 再利用 Legendre 多项式的正交性质构造了一组适当的基函数, 推导了离散格式基于张量积的矩阵形式. 最后, 我们给出了一些数值算例, 数值结果验证了算法的有效性和理论结果的正确性.

关键词: 四阶问题, 简支板边界条件, 降阶格式, 谱方法, 误差估计

MR(2010) 主题分类号: 65N25; 65N30

中图分类号: O241.82

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2023)05-0433-14

1 引言

四阶问题有着重要的应用背景, 很多复杂的非线性问题的计算最终都归结于反复地求解一个四阶问题, 如 Cahn - Hilliard 方程^[1-4], 声波传输问题^[5-9]等. 关于四阶问题的理论分析和数值计算已有很多成果, 主要包括有限元法^[10-13], 谱方法及一些高阶数值方法^[14-19]. 众所周知, 谱方法具有谱精度等优点, 已广泛地应用于微分方程的数值计算^[20-23], 但它要求计算区域必须是方形或立方体, 为了克服这个缺陷, 通常采取谱元法去求解一般区域上的微分方程. 对于二阶问题的谱元方法, 其理论和数值计算都已经比较成熟. 关于四阶问题的谱方法, 文献[20]提出了圆域上四阶 Steklov 方程及其特征值问题的一种有效的谱方法, 文献[21]提出了一些特殊区域上双调和特征值问题的一种谱逼近方法, 文献[22]提出了方形和立方体区域上传输特征值问题的一种有效的谱 Galerkin 逼近. 对于方形、立方体和一些特殊区域上四阶问题的谱方法还有很多研究成果, 就不在此一一列举了. 然而, 关于四阶问题的谱元法的文献很少, 虽然文献[24]提出了 Stokes 特征值问题的三角谱元方法, 文献[25]提出四阶方程的一种 C^1 协调四边形谱元方法, 但是对于一般区域上四阶问题的谱元法, 其基函数的构造非常复杂, 计算量也比较大. 因此, 提出一些四阶问题基于降阶格式的谱方法是非常有意义的. 据我们所知, 很少有关于简支板边界条件下四阶问题基于降阶格式的谱方法的报道.

本文的目标是提出简支板边界条件下四阶问题基于降阶格式的一种有效的谱 Galerkin

*收稿日期: 2022-07-18

接收日期: 2022-09-07

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11661022), 贵州省科技计划项目 (黔科合平台人才 [2017]5726-39), 贵州师范大学学术新苗基金项目 (黔师新苗 [2021]A04 号).

作者简介: 覃嘉洪 (1998-), 女, 苗族, 贵州铜仁, 研究生, 研究方向: 偏微分方程数值解. Email: 1772488426@qq.com.

通讯作者: 安静, 男, 教授, 研究方向: 偏微分方程数值解. Email: aj154@163.com.

逼近. 首先, 通过引入一个辅助函数, 将原问题化为两个耦合的二阶问题. 其次, 通过引入适当的 Sobolev 空间, 建立两个耦合二阶问题的弱形式和相应的离散格式, 并利用 Lax-Milgram 定理, 证明弱解和逼近解的存在唯一性. 然后, 我们引入多维的非一致带权 Sobolev 空间, 根据其投影算子的逼近性质, 证明逼近解的误差估计. 最后, 利用 Legendre 多项式的正交性质构造一组适当的基函数, 推导离散格式基于张量积的矩阵形式, 并通过数值算例验证算法的有效性和理论结果的正确性. 作为一个模型, 本文考虑如下的四阶问题:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D, \\ u = \varphi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial D, \\ \Delta u = \psi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial D, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d (d=2,3)$, D 为 $\mathbb{R}^d$ 中的一个有界区域, ∂D 表示区域 D 的边界.

本文剩余部分组织如下: 在第 2 节我们将推导原问题等价的二阶耦合格式及其变分形式. 在第 3 节, 我们将证明逼近解的误差估计. 在第 4 节, 我们将详细描述算法的有效实现过程. 在第 5 节我们将给出一些数值算例. 在第 6 节我们给出了一些结论性评注.

2 等价的二阶耦合格式及其变分形式

首先通过引入一个辅助变量, 将方程 (1.1) 化为两个耦合的二阶问题, 再引入适当的 Sobolev 空间及其逼近空间, 建立两个耦合二阶问题的弱形式和相应的离散格式.

令 $w(\mathbf{x}) = -\Delta u(\mathbf{x})$. 则方程 (1.1) 可化为下面两个耦合的二阶问题:

$$\begin{cases} -\Delta w(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D, \\ w(\mathbf{x}) = -\psi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial D, \end{cases} \quad (2.1)$$

和

$$\begin{cases} -\Delta u(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D, \\ u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial D. \end{cases} \quad (2.2)$$

引入通常的 Sobolev 空间:

$$\begin{aligned} L^2(D) &:= \{p : \int_D p^2 d\mathbf{x} < \infty\}; \\ H_0^1(D) &= \{p : p \in L^2(D), \partial_{x_i} p \in L^2(D), p|_{\partial D} = 0\}, \end{aligned}$$

其相应的内积和范数分别为:

$$\begin{aligned} (p, q) &= \int_D pq d\mathbf{x}, \quad \|p\| = \sqrt{(p, p)}; \\ (p, q)_1 &:= \int_D pq + \nabla p \cdot \nabla q d\mathbf{x}, \quad \|p\|_1 = \sqrt{(p, p)_1}. \end{aligned}$$

不失一般性, 本文仅考虑 $\psi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) = 0$, $D = (-1, 1)^d (d = 2, 3)$ 的情形. 由格林公式可知方程 (2.1)-(2.2) 的弱形式为: 找 $(w, u) \in H_0^1(D) \times H_0^1(D)$, 使得

$$a(w, v) = F(v), \quad \forall v \in H_0^1(D), \quad (2.3)$$

$$a(u, h) = b(w, h), \quad \forall h \in H_0^1(D), \quad (2.4)$$

其中

$$a(w, v) = \int_D \nabla w \nabla v d\mathbf{x}, \quad F(v) = \int_D f v d\mathbf{x}, \quad b(w, h) = \int_D w h d\mathbf{x}.$$

令 P_N 为 N 次多项式空间, 定义逼近空间: $X_N = (P_N)^d \cap H_0^1(D)$. 则 (2.3)-(2.4) 的离散格式为: 找 $(w_N, u_N) \in X_N \times X_N$, 使得

$$a(w_N, v_N) = F(v_N), \quad \forall v_N \in X_N, \quad (2.5)$$

$$a(u_N, h_N) = b(w_N, h_N), \quad \forall h_N \in X_N. \quad (2.6)$$

3 逼近解的误差估计

在这一节, 我们将证明弱解和逼近解的存在唯一性以及它们之间的误差估计.

引理 1 $a(w, v)$ 为定义在 $H_0^1(D) \times H_0^1(D)$ 上的正定连续的双线性泛函, 即

$$|a(w, v)| \leq \|w\|_1 \|v\|_1, \quad a(w, w) \geq \frac{1}{2} \|w\|_1^2.$$

证 由 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\begin{aligned} |a(w, v)| &= \left| \int_D \nabla w \nabla v d\mathbf{x} \right| \leq \int_D |\nabla w \nabla v| d\mathbf{x} \\ &\leq \left(\int_D |\nabla w|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_D |\nabla v|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |w|_1 \cdot |v|_1 \leq \|w\|_1 \cdot \|v\|_1. \end{aligned}$$

另一方面, 由于 $|w|^2 = \left| \int_{-1}^{x_i} \partial_{x_i} w dx_i \right|^2 \leq (x_i + 1) \int_{-1}^1 (\partial_{x_i} w)^2 dx_i$, 将该不等式两边在区域 D 上积分得

$$\int_D |w|^2 d\mathbf{x} \leq \int_{-1}^1 (x_i + 1) dx_i \int_D (\partial_{x_i} w)^2 d\mathbf{x} = 2 \int_D (\partial_{x_i} w)^2 d\mathbf{x}.$$

由此可得 $d\|w\|^2 \leq 2|w|_1^2$. 从而有

$$a(w, w) = \int_D |\nabla w|^2 d\mathbf{x} = |w|_1^2 \geq \frac{d}{2+d} \|w\|^2 \geq \frac{1}{2} \|w\|_1^2.$$

证毕.

引理 2 若 $f \in L^2(D)$, 则 $F(v)$ 为 $H_0^1(D)$ 上的有界线性泛函. 即 $|F(v)| \lesssim \|v\|_1$.

证 对 $\forall v \in H_0^1(D)$, 由 Schwarz 不等式有

$$|F(v)| = \left| \int_D f v d\mathbf{x} \right| \leq \int_D |f v| d\mathbf{x} \leq \left(\int_D f^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_D v^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|v\|_1.$$

证毕. 由引理 1, 引理 2 和 Lax-Milgram 定理可得下面的定理.

定理 1 若 $f \in L^2(D)$, 则弱形式 (2.3)-(2.4) 存在唯一解 $(w, u) \in H_0^1(D) \times H_0^1(D)$, 离散格式 (2.5)- (2.6) 存在唯一解 $(w_N, u_N) \in \mathbf{X}_N \times \mathbf{X}_N$.

引理 3 设 w 和 w_N 分别为弱形式 (2.3) 和离散格式 (2.5) 的解, 则有

$$|w - w_N|_1 \leq \inf_{v_N \in \mathbf{X}_N} |w - v_N|_1.$$

证 由 (2.3) 和 (2.5), 我们有

$$a(w, v_N) = F(v_N), \quad \forall v_N \in \mathbf{X}_N, \quad (3.1)$$

$$a(w_N, v_N) = F(v_N), \quad \forall v_N \in \mathbf{X}_N. \quad (3.2)$$

由 (3.1) 减去 (3.2) 得

$$a(w - w_N, v_N) = 0, \quad \forall v_N \in \mathbf{X}_N. \quad (3.3)$$

由 (3.3) 和 Schwarz 不等式有

$$\begin{aligned} |w - w_N|_1^2 &= a(w - w_N, w - w_N) \\ &= a(w - w_N, w - v_N + v_N - w_N) \\ &= a(w - w_N, w - v_N) + a(w - w_N, v_N - w_N) \\ &= a(w - w_N, w - v_N) \leq |w - w_N|_1 |w - v_N|_1. \end{aligned}$$

即

$$|w - w_N|_1 \leq |w - v_N|_1.$$

由 v_N 的任意性可得

$$|w - w_N|_1 \leq \inf_{v_N \in \mathbf{X}_N} |w - v_N|_1.$$

证毕. 我们用 $J_n^{\alpha, \beta}$ 表示定义在区间 $I := (-1, 1)$ 上关于权函数 $\omega^{\alpha, \beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ 正交的 Jacobi 多项式, 即

$$\int_{-1}^1 J_n^{\alpha, \beta}(t) J_m^{\alpha, \beta}(t) \omega^{\alpha, \beta}(t) dt = t_n^{\alpha, \beta} \delta_{mn},$$

其中 $t_n^{\alpha, \beta} = \|J_n^{\alpha, \beta}\|_{\omega^{\alpha, \beta}}^2$, $(\alpha, \beta > -1)$. 对于整数指数对 (l, k) , 引入如下的广义 Jacobi 多项式 [26, 27]:

$$J_n^{l, k}(x) = \begin{cases} (1-x)^{-l}(1+x)^{-k} J_{n-n_0}^{-l, -k}(x), & l, k \leq -1, \\ (1-x)^{-l} J_{n-n_0}^{-l, k}(x), & l \leq -1, k > -1, \\ (1+x)^{-k} J_{n-n_0}^{l, -k}(x), & l > -1, k \leq -1, \end{cases}$$

其中 $n \geq n_0$, 且

$$n_0 = \begin{cases} -(l+k), & l, k \leq -1, \\ -l, & l \leq -1, k > -1, \\ -k, & l > -1, k \leq -1. \end{cases}$$

令 $\hat{J}_n^{l,k}(t)$ 为标准的广义 Jacobi 多项式, 即

$$\int_{-1}^1 \hat{J}_n^{l,k}(t) \hat{J}_m^{l,k}(t) \omega^{l,k}(t) dt = \delta_{mn}.$$

定义 d 维张量形式的广义 Jacobi 多项式和权函数:

$$\mathbf{J}_n^{l,k}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^d \hat{J}_{n_i}^{l_i, k_i}(x_i), \quad \omega^{l,k}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^d \omega^{l_i, k_i}(x_i),$$

其中 $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d)$, $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_d)$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_d)$. 定义 d 维 N 次多项式空间:

$$\mathbf{Q}_N^{-\mathbf{l}, -\mathbf{l}} := \text{span}\{\mathbf{J}_n^{-\mathbf{l}, -\mathbf{l}}(\mathbf{x}) : |\mathbf{n}|_\infty \leq N\}, \quad \text{其中 } |\mathbf{n}|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} \{n_i\}.$$

由 d 维广义 Jacobi 多项式和逼近空间 $\mathbf{X}_N$ 的定义可知: $\mathbf{X}_N = \mathbf{Q}_N^{-\mathbf{l}, -\mathbf{l}}$. 定义正交投影算子: $T_N^{-\mathbf{l}, -\mathbf{l}} : \mathbf{L}_{\omega^{-\mathbf{l}, -\mathbf{l}}}^2(\mathbf{I}^d) \rightarrow \mathbf{Q}_N^{-\mathbf{l}, -\mathbf{l}}$, 使得

$$\int_{\mathbf{I}^d} (T_N^{-\mathbf{l}, -\mathbf{l}} w - w) v_N \omega^{-\mathbf{l}, -\mathbf{l}} d\mathbf{x} = 0, \quad \forall v_N \in \mathbf{Q}_N^{-\mathbf{l}, -\mathbf{l}}. \quad (3.4)$$

定义 d 维带权 Sobolev 空间, 即

$$\mathbf{B}_{l,k}^s(\mathbf{I}^d) := \{w : \partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{m}} w \in \mathbf{L}_{\omega^{l+s, k+s}}^2(\mathbf{I}^d), \quad 0 \leq |\mathbf{m}|_1 \leq s\},$$

其相应的半范数和范数分别为:

$$|w|_{\mathbf{B}_{l,k}^s(\mathbf{I}^d)} := \left(\sum_{i=1}^d \|\partial_{x_i}^s w\|_{\omega^{l+s\mathbf{e}_i, k+s\mathbf{e}_i}, \mathbf{I}^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|w\|_{\mathbf{B}_{l,k}^s(\mathbf{I}^d)} := \left(\sum_{0 \leq |\mathbf{m}|_1 \leq s} \|\partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{m}} w\|_{\omega^{l+\mathbf{m}, k+\mathbf{m}}, \mathbf{I}^d}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\mathbf{e}_i$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的第 i 个单位向量, $|\mathbf{m}|_1 = \sum_{i=1}^d m_i$, $\partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{m}} w = \partial_{x_1}^{m_1} \partial_{x_2}^{m_2} \dots \partial_{x_d}^{m_d} w$. 由文献 [28] 中定理 8.1 和评注 8.14 我们有下面的引理.

引理 4 对 $\forall w \in \mathbf{B}_{-\mathbf{l}, -\mathbf{l}}^s(\mathbf{I}^d)$ 和 $1 \leq s \leq N+1$ 下面的不等式成立

$$|\mathbf{T}_N^{-\mathbf{l}, -\mathbf{l}} w - w|_{\mathbf{B}_{-\mathbf{l}, -\mathbf{l}}^1(\mathbf{I}^d)} \leq C \sqrt{\frac{(N-s)!}{(N-1)!}} (N+s)^{\frac{1-s}{2}} |w|_{\mathbf{B}_{-\mathbf{l}, -\mathbf{l}}^s(\mathbf{I}^d)},$$

其中, 当 $N \gg 1$ 时, $C \simeq \sqrt{2}$.

定理 2 设 w 和 w_N 分别为弱形式 (2.3) 和离散格式 (2.5) 的解, 则当 $w \in \mathbf{B}_{-1,-1}^s(\mathbf{I}^d) \cap H_0^1(\mathbf{I}^d)$ 和 $1 \leq s \leq N+1$ 时, 下面的估计式成立

$$|w - w_N|_1 \lesssim N^{1-s} |w|_{\mathbf{B}_{-1,-1}^s(\mathbf{I}^d)}.$$

证 由引理 3 可知

$$|w - w_N|_1 \leq \inf_{v_N \in \mathbf{X}_N} |w - v_N|_1.$$

则有

$$|w - w_N|_1^2 \leq \inf_{v_N \in \mathbf{X}_N} |w - v_N|_1^2 \leq |w - \mathbf{T}_N^{-1,-1} w|_1^2. \quad (3.5)$$

由于

$$\begin{aligned} |w - \mathbf{T}_N^{-1,-1} w|_1 &= \left\{ \int_{\mathbf{I}^d} \sum_{j=1}^d [\partial_{x_j} (w - \mathbf{T}_N^{-1,-1} w)]^2 d\mathbf{x} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left\{ \int_{\mathbf{I}^d} \sum_{j=1}^d [\partial_{x_j} (w - \mathbf{T}_N^{-1,-1} w)]^2 \prod_{i=1, i \neq j}^d \frac{1}{(1-x_i)(1+x_i)} d\mathbf{x} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \int_{\mathbf{I}^d} \sum_{j=1}^d [\partial_{x_j} (w - \mathbf{T}_N^{-1,-1} w)]^2 \omega^{l+e_j, k+e_j} d\mathbf{x} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= |w - \mathbf{T}_N^{-1,-1} w|_{\mathbf{B}_{-1,-1}^1(\mathbf{I}^d)}. \end{aligned}$$

则由引理 4 和文献 [28] 中的 (3.5.32) 可得

$$|w - w_N|_1 \lesssim \sqrt{\frac{(N-s)!}{(N-1)!}} (N+s)^{\frac{1-s}{2}} |w|_{\mathbf{B}_{-1,-1}^s(\mathbf{I}^d)} \lesssim N^{1-s} |w|_{\mathbf{B}_{-1,-1}^s(\mathbf{I}^d)}.$$

定理 3 设 u 和 u_N 分别为弱形式 (2.4) 和离散格式 (2.6) 的解, 则当 $u \in \mathbf{B}_{-1,-1}^s(\mathbf{I}^d) \cap H_0^1(\mathbf{I}^d)$ 和 $1 \leq s \leq N+1$ 时, 下面的估计式成立

$$|u - u_N|_1 \lesssim N^{1-s} (|w|_{\mathbf{B}_{-1,-1}^s(\mathbf{I}^d)} + |u|_{\mathbf{B}_{-1,-1}^s(\mathbf{I}^d)}).$$

证 由 (2.4) 和 (2.6) 可知:

$$a(u, h_N) = b(w, h_N), \quad \forall h_N \in \mathbf{X}_N, \quad (3.6)$$

$$a(u_N, h_N) = b(w_N, h_N), \quad \forall h_N \in \mathbf{X}_N. \quad (3.7)$$

由 (3.6) 减去 (3.7) 可得:

$$a(u - u_N, h_N) = b(w - w_N, h_N), \quad \forall h_N \in \mathbf{X}_N. \quad (3.8)$$

对 $\forall q_N \in \mathbf{X}_N$, 由引理 1 和 (3.8) 有

$$\begin{aligned} \|u - u_N\|_1^2 &\leq 2a(u - u_N, u - u_N) \\ &= 2a(u - u_N, u - q_N + q_N - u_N) \\ &= 2[a(u - u_N, u - q_N) + a(u - u_N, q_N - u_N)] \\ &= 2[a(u - u_N, u - q_N) + b(w - w_N, q_N - u_N)] \\ &\leq 2\|u - u_N\|_1\|u - q_N\|_1 + 2\|w - w_N\|\|q_N - u_N\|. \end{aligned}$$

在上式中取 $q_N = \mathbf{T}_N^{-1, -1}u$, 则有

$$\|u - u_N\|_1^2 \leq 2\|u - u_N\|_1\|u - \mathbf{T}_N^{-1, -1}u\|_1 + 2\|w - w_N\|\|\mathbf{T}_N^{-1, -1}u - u_N\|.$$

又由于

$$\begin{aligned} \|\mathbf{T}_N^{-1, -1}u - u_N\| &= \|\mathbf{T}_N^{-1, -1}u - u + u - u_N\| \leq \|\mathbf{T}_N^{-1, -1}u - u\|_1 + \|u - u_N\|_1, \\ 2\|w - w_N\|\|\mathbf{T}_N^{-1, -1}u - u\|_1 &\leq \|w - w_N\|^2 + \|\mathbf{T}_N^{-1, -1}u - u\|_1^2, \\ 2\|w - w_N\|\|u - u_N\|_1 &\leq 4\|w - w_N\|^2 + \frac{1}{4}\|u - u_N\|_1^2, \\ 2\|u - u_N\|_1\|u - \mathbf{T}_N^{-1, -1}u\|_1 &\leq \frac{1}{4}\|u - u_N\|_1^2 + 4\|u - \mathbf{T}_N^{-1, -1}u\|_1^2, \end{aligned}$$

则由 Poincaré 不等式, 引理 4 和定理 2 有

$$\begin{aligned} \|u - u_N\|_1^2 &\leq 10\|w - w_N\|^2 + 10\|u - \mathbf{T}_N^{-1, -1}u\|_1^2 \\ &\lesssim |w - w_N|_1^2 + |u - \mathbf{T}_N^{-1, -1}u|_1^2 \\ &\lesssim |w - w_N|_1^2 + |u - \mathbf{T}_N^{-1, -1}u|_{B_{1, -1}^1(I^d)}^2 \\ &\lesssim N^{2-2s}(|w|_{B_{1, -1}^s(I^d)} + |u|_{B_{1, -1}^s(I^d)})^2. \end{aligned}$$

即

$$\|u - u_N\|_1 \lesssim N^{(1-s)}(|w|_{B_{1, -1}^s(I^d)} + |u|_{B_{1, -1}^s(I^d)}).$$

证毕.

4 算法的有效实现

在这节我们将详细地描述算法的有效实现过程, 首先构造逼近空间的一组基函数, 令

$$\begin{aligned} \varphi_i(t) &= \frac{1}{\sqrt{4i+6}}[L_i(t) - L_{i+2}(t)], \\ P_N^0 &= \text{span}\{\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_{N-2}(t)\}, \end{aligned}$$

其中 $L_i(t)$ 表示 i 次 Legendre 多项式, 则逼近空间为 $X_N = \{u_N(\mathbf{x}) : u_N(\mathbf{x}) \in [P_N^0]^d\}$. 令

$$s_{ij} = \int_{-1}^1 \varphi_j' \varphi_i' dt, \quad m_{ij} = \int_{-1}^1 \varphi_j \varphi_i dt.$$

则由文献 [29] 中的引理 2.1 可知:

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad m_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2i+3}(\frac{1}{2i+1} + \frac{1}{2i+5}), & j = i, \\ -\frac{1}{\sqrt{(2i+7)(2i+3)}} \frac{1}{2i+5}, & j = i+2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

下面我们将推导离散格式 (2.5) 和 (2.6) 基于张量积的矩阵形式. 当 $d=2$ 时, 对于离散格式 (2.5), 我们将寻找 $w_N = \sum_{i,j=0}^{N-2} w_{ij} \varphi_i(x_1) \varphi_j(x_2)$. 令

$$W = \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0(N-2)} \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1(N-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{(N-2)0} & w_{(N-2)1} & \cdots & w_{(N-2)(N-2)} \end{pmatrix},$$

用 $\overline{W}$ 表示由 W 的列构成的长度为 $(N-1)^2$ 的列向量, 取 $v_N = \varphi_l(x_1) \varphi_k(x_2), (l, k = 0, 1, \dots, N-2)$, 则有:

$$\begin{aligned} \int_D \nabla w_N \nabla v_N d\mathbf{x} &= \sum_{i,j=0}^{N-2} w_{ij} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \nabla(\varphi_i(x_1) \varphi_j(x_2)) \nabla(\varphi_l(x_1) \varphi_k(x_2)) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i,j=0}^{N-2} w_{ij} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ((\varphi'_i(x_1) \varphi_j(x_2), \varphi_i(x_1) \varphi'_j(x_2)) ((\varphi'_l(x_1) \varphi_k(x_2), \varphi_l(x_1) \varphi'_k(x_2)) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i,j=0}^{N-2} w_{ij} \left[\int_{-1}^1 \varphi'_i(x_1) \varphi'_l(x_1) dx_1 \int_{-1}^1 \varphi_j(x_2) \varphi_k(x_2) dx_2 \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^1 \varphi_i(x_1) \varphi_l(x_1) dx_1 \int_{-1}^1 \varphi'_j(x_2) \varphi'_k(x_2) dx_2 \right] \\ &= \sum_{i,j=0}^{N-2} w_{ij} (s_{li} m_{kj} + m_{li} s_{kj}) \\ &= S(l, :) W M(k, :)^T + M(l, :) W S(k, :)^T \\ &= [M(k, :) \otimes S(l, :) + S(k, :) \otimes M(l, :)] \overline{W}, \end{aligned}$$

其中 $S(l, :), M(k, :)$ 分别表示矩阵 $S = \{s_{ij}\}, M = \{m_{ij}\}$ 的第 l 和 k 行, $\otimes$ 表示矩阵的张量积符号, 即 $S \otimes M = (s_{ij} m_{kl})_{i,j,k,l=0}^{N-2}$; 对于离散格式 (2.6), 我们将寻找 $u_N = \sum_{i,j=0}^{N-2} u_{ij} \varphi_i(x_1) \varphi_j(x_2)$. 令

$$U = \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0(N-2)} \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1(N-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{(N-2)0} & u_{(N-2)1} & \cdots & u_{(N-2)(N-2)} \end{pmatrix},$$

用 $\overline{U}$ 表示由 U 的列构成的长度为 $(N-1)^2$ 的列向量, 取 $h_N = \varphi_l(x_1) \varphi_k(x_2), (l, k = 0, 1, \dots, N-2)$, 类似地, 我们可以得到

$$\int_D \nabla u_N \nabla h_N d\mathbf{x} = [M(k, :) \otimes S(l, :) + S(k, :) \otimes M(l, :)] \overline{U},$$

则离散格式 (2.5) 基于张量积的矩阵形式为 $(M \otimes S + S \otimes M)\overline{W} = F$, 其中

$$F = (f_{00}, f_{10}, \dots, f_{N-2,0}; f_{01}, f_{11}, \dots, f_{N-2,1}; \dots; f_{0,N-2}, f_{1,N-2}, \dots, f_{N-2,N-2})^T,$$

$$f_{lk} = \int_D f \varphi_l(x_1) \varphi_k(x_2) d\mathbf{x};$$

离散格式 (2.6) 基于张量积的矩阵形式为 $(M \otimes S + S \otimes M)\overline{U} = \hat{F}$, 其中

$$\hat{F} = (\hat{f}_{00}, \hat{f}_{10}, \dots, \hat{f}_{N-2,0}; \hat{f}_{01}, \hat{f}_{11}, \dots, \hat{f}_{N-2,1}; \dots; \hat{f}_{0,N-2}, \hat{f}_{1,N-2}, \dots, \hat{f}_{N-2,N-2})^T,$$

$$\hat{f}_{lk} = \int_D w_N \varphi_l(x_1) \varphi_k(x_2) d\mathbf{x}.$$

当 $d = 3$ 时, 对于离散格式 (2.5), 我们将寻找 $w_N = \sum_{i,j,q=0}^{N-2} w_{ij}^q \varphi_i(x_1) \varphi_j(x_2) \varphi_q(x_3)$. 令

$$W^q = \begin{pmatrix} w_{00}^q & w_{01}^q & \cdots & w_{0(N-2)}^q \\ w_{10}^q & w_{11}^q & \cdots & w_{1(N-2)}^q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{(N-2)0}^q & w_{(N-2)1}^q & \cdots & w_{(N-2)(N-2)}^q \end{pmatrix}$$

用 $\overline{W}^q$ 表示 W^q 的列构成的长度为 $(N-1)^2$ 的列向量, 令 $W = (\overline{W}^0, \overline{W}^1, \dots, \overline{W}^N)$, $\overline{W}$ 表示由矩阵 W 的列构成的长度为 $(N-1)^3$ 的列向量. 取 $v_N = \varphi_l(x_1) \varphi_k(x_2) \varphi_n(x_3)$, $(l, k, n = 0, 1, \dots, N-2)$, 则有:

$$\begin{aligned} \int_D \nabla w_N \nabla v_N d\mathbf{x} &= \sum_{i,j,q=0}^{N-2} w_{ij}^q \int_D \nabla(\varphi_i(x_1) \varphi_j(x_2) \varphi_q(x_3)) \nabla(\varphi_l(x_1) \varphi_k(x_2) \varphi_n(x_3)) d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i,j,q=0}^{N-2} w_{ij}^q (s_{li} m_{kj} m_{nq} + m_{li} s_{kj} m_{nq} + m_{li} m_{kj} s_{nq}) \\ &= \sum_{m=0}^{N-2} S(l, :) W^q m_{nq} M(k, :)^T + M(l, :) W^q m_{nq} S(k, :)^T + M(l, :) W^q s_{nq} M(k, :)^T \\ &= \sum_{m=0}^{N-2} M(k, :) \otimes S(l, :) \overline{W}^q m_{nq} + S(k, :) \otimes M(l, :) \overline{W}^q m_{nq} + M(k, :) \otimes M(l, :) \overline{W}^q s_{nq} \\ &= (M(k, :) \otimes M(n, :) \otimes S(l, :) + S(k, :) \otimes M(n, :) \otimes M(l, :) + M(k, :) \otimes S(n, :) \otimes M(l, :)) \overline{W}; \end{aligned}$$

对于离散格式 (2.6), 我们将寻找 $u_N = \sum_{i,j,q=0}^{N-2} u_{ij}^q \varphi_i(x_1) \varphi_j(x_2) \varphi_q(x_3)$. 令

$$U^q = \begin{pmatrix} u_{00}^q & u_{01}^q & \cdots & u_{0(N-2)}^q \\ u_{10}^q & u_{11}^q & \cdots & u_{1(N-2)}^q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{(N-2)0}^q & u_{(N-2)1}^q & \cdots & u_{(N-2)(N-2)}^q \end{pmatrix}$$

用 $\overline{U}^q$ 表示 W^q 的列构成的长度为 $(N-1)^2$ 的列向量, 令 $U = (\overline{U}^0, \overline{U}^1, \dots, \overline{U}^N)$, $\overline{U}$ 表示由矩阵 U 的列构成的长度为 $(N-1)^3$ 的列向量. 取 $h_N = \varphi_l(x_1)\varphi_k(x_2)\varphi_n(x_3)$, $(l, k, n = 0, 1, \dots, N-2)$, 类似地, 可以得到:

$$\begin{aligned} & \int_D \nabla u_N \nabla h_N dx dy \\ &= (M(k, :) \otimes M(n, :) \otimes S(l, :) + S(k, :) \otimes M(n, :) \otimes M(l, :) + M(k, :) \otimes S(n, :) \otimes M(l, :)) \overline{U}, \end{aligned}$$

则离散格式 (2.5) 基于张量积的矩阵形式为 $(M \otimes M \otimes S + S \otimes M \otimes M + M \otimes S \otimes M) \overline{W} = F$, 其中

$$\begin{aligned} F &= (f_{00}^0, f_{10}^0, \dots, f_{N-2, N-2}^0; \dots; f_{0,0}^{(N-2)}, f_{1,0}^{(N-2)}, \dots, f_{N-2, N-2}^{(N-2)})^T, \\ f_{lk}^n &= \int_D f \varphi_l(x_1) \varphi_k(x_2) \varphi_n(x_3) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

离散格式 (2.6) 基于张量积的矩阵形式为 $(M \otimes M \otimes S + S \otimes M \otimes M + M \otimes S \otimes M) \overline{U} = \hat{F}$, 其中

$$\begin{aligned} \hat{F} &= (\hat{f}_{00}^0, \hat{f}_{10}^0, \dots, \hat{f}_{N-2, N-2}^0; \dots; \hat{f}_{0,0}^{(N-2)}, \hat{f}_{1,0}^{(N-2)}, \dots, \hat{f}_{N-2, N-2}^{(N-2)})^T, \\ \hat{f}_{lk}^n &= \int_D w_N \varphi_l(x_1) \varphi_k(x_2) \varphi_n(x_3) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

5 数值实验

为了表明算法的有效性, 我们将进行一系列的数值实验. 我们在 MATLAB R2016b 平台上进行编程计算.

例 1: 取精确解 $u(\mathbf{x}) = \sin \pi x_1 \sin \pi x_2$, 则 $w(\mathbf{x}) = -\Delta u(\mathbf{x}) = 2\pi^2 \sin \pi x_1 \sin \pi x_2$, u 显然满足边界条件, 将 $w(\mathbf{x}), u(\mathbf{x})$ 代入方程 (2.1) 和 (2.2) 可得到 $f(\mathbf{x})$. 我们分别在表格 1 和表格 2 中列出了精确解 $w(\mathbf{x}), u(\mathbf{x})$ 与逼近解 $w_N(\mathbf{x}), u_N(\mathbf{x})$ 在三种模下的误差. 从表格 1 和表格 2 可以观察到, 当 $N \geq 20$ 时, 精确解 $w(\mathbf{x}), u(\mathbf{x})$ 与逼近解 $w_N(\mathbf{x}), u_N(\mathbf{x})$ 在三种模下的误差都达到了大约 10^{-13} 的精度. 为了进一步表明我们算法的高精度, 我们在图 1、图 2 和图 3、图 4 中画出了当 N 取不同值时精确解与逼近解之间的误差图像, 从图 1、图 2 和图 3、图 4 可以看出我们的算法是收敛的和高精度的. 另外, 作为比较, 我们在表格 3 中列出了基于四阶格式的谱方法在三种模下的误差结果. 从表 2 和表 3 可以观察到, 两种数值格式都具有谱精度.

表格 1 对于不同的 N , 精确解 $w(\mathbf{x})$ 与逼近解 $w_N(\mathbf{x})$ 在三种模下的误差.

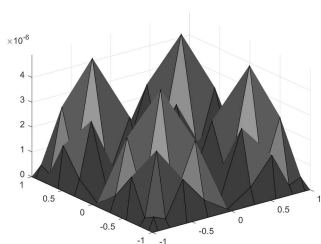
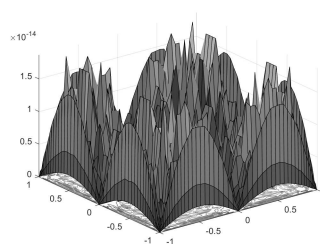
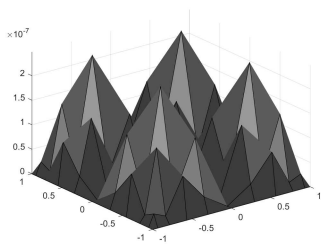
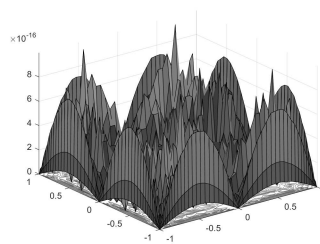
N	10	20	30	40	50
$\ w(\mathbf{x}) - w_N(\mathbf{x})\ $	3.7946e-06	2.0313e-14	1.6207e-14	1.2577e-14	1.4626e-14
$ w(\mathbf{x}) - w_N(\mathbf{x}) _1$	0.0065	8.7708e-13	2.5507e-13	2.8220e-13	9.2592e-13
$\ w(\mathbf{x}) - w_N(\mathbf{x})\ _1$	0.0065	8.7732e-13	2.5559e-13	2.8248e-13	9.2603e-13

表格 2 对于不同的 N , 精确解 $u(\mathbf{x})$ 与逼近解 $u_N(\mathbf{x})$ 在三种模下的误差.

N	10	20	30	40	50
$\ u(\mathbf{x}) - u_N(\mathbf{x})\ $	1.9224e-07	9.9225e-16	8.1785e-16	6.0700e-16	5.6905e-16
$ u(\mathbf{x}) - u_N(\mathbf{x}) _1$	3.2926e-04	4.4214e-14	1.2207e-14	1.4036e-14	4.6598e-14
$\ u(\mathbf{x}) - u_N(\mathbf{x})\ _1$	3.2926e-04	4.4225e-14	1.2235e-14	1.4049e-14	4.6601e-14

表格 3 对于不同的 N , 精确解 $u(\mathbf{x})$ 与逼近解 $u_N(\mathbf{x})$ 在三种模下的误差.

N	10	20	30	40	50
$\ u(\mathbf{x}) - u_N(\mathbf{x})\ $	1.2993e-05	1.0691e-15	7.6531e-16	4.0410e-16	3.7663e-16
$ u(\mathbf{x}) - u_N(\mathbf{x}) _1$	2.8910e-04	4.3849e-14	3.3768e-15	2.8921e-15	2.2968e-15
$\ u(\mathbf{x}) - u_N(\mathbf{x})\ _1$	2.8939e-04	4.3862e-14	3.4624e-15	2.9202e-15	2.3275e-15

图 1: 当 $N = 10$ 时精确解 $w(x, y)$ 与逼近解 $w_N(x, y)$ 之间的误差图像.图 2: 当 $N = 50$ 时精确解 $w(x, y)$ 与逼近解 $w_N(x, y)$ 之间的误差图像.图 3: 当 $N = 10$ 时精确解 $w(x, y)$ 与逼近解 $w_N(x, y)$ 之间的误差图像.图 4: 当 $N = 50$ 时精确解 $w(x, y)$ 与逼近解 $w_N(x, y)$ 之间的误差图像.

例 2: 取精确解 $u(\mathbf{x}) = \sin \pi x_1 \sin \pi x_2 \sin \pi x_3$, 则 $w(\mathbf{x}) = 3\pi^2 \sin \pi x_1 \sin \pi x_2 \sin \pi x_3$, $u(\mathbf{x})$ 显然满足边界条件, 将 $w(\mathbf{x}), u(\mathbf{x})$ 代入方程 (2.1) 和 (2.2) 可得到 $f(\mathbf{x})$. 我们分别在表格 4 和表格 5 中列出了精确解 $w(\mathbf{x}), u(\mathbf{x})$ 与逼近解 $w_N(\mathbf{x}), u_N(\mathbf{x})$ 在三种模下的误差. 从表格 4 和表格 5 可以观察到, 当 $N \geq 20$ 时, 精确解 $w(\mathbf{x}), u(\mathbf{x})$ 与逼近解 $w_N(\mathbf{x}), u_N(\mathbf{x})$ 在三种模下的误差都达到了大约 10^{-12} 的精度. 由此可以看出我们的算法也是收敛的和高精度的.

表格 4 对于不同的 N , 精确解 $w(\mathbf{x})$ 与逼近解 $w_N(\mathbf{x})$ 在三种模下的误差.

N	10	15	20	25	30
$\ w(\mathbf{x}) - w_N(\mathbf{x})\ $	6.6423e-06	2.4302e-10	3.3909e-14	2.4975e-14	2.1268e-14
$ w(\mathbf{x}) - w_N(\mathbf{x}) _1$	0.0134	7.5702e-08	1.7784e-12	1.2032e-12	4.6723e-13
$\ w(\mathbf{x}) - w_N(\mathbf{x})\ _1$	0.0134	7.5702e-08	1.7787e-12	1.2035e-12	4.6771e-13

表格 5 对于不同的 N , 精确解 $u(\mathbf{x})$ 与逼近解 $u_N(\mathbf{x})$ 在三种模下的误差.

N	10	15	20	25	30
$\ u(\mathbf{x}) - u_N(\mathbf{x})\ $	2.2433e-07	8.2078e-12	9.1652e-16	8.8147e-16	7.3406e-16
$ u(\mathbf{x}) - u_N(\mathbf{x}) _1$	4.5239e-04	2.5567e-09	6.0363e-14	3.9496e-14	1.6632e-14
$\ u(\mathbf{x}) - u_N(\mathbf{x})\ _1$	4.5239e-04	2.5567e-09	6.0370e-14	3.9505e-14	1.6648e-14

6 结论性评议

本文提出了简支板边界条件下四阶问题基于降阶格式的一种有效的谱 Galerkin 逼近. 首先, 将原问题化为两个耦合的二阶问题, 建立了相应的弱形式及其离散格式, 证明了弱解和逼近解的存在唯一性及它们之间的误差估计. 其次, 构造了逼近空间中一组适当的基函数, 推导了离散格式基于张量积的矩阵形式. 另外, 我们还给出一些数值算例, 数值结果表明了算法的有效性和理论结果的正确性. 本文提出的算法可以结合谱元法应用到更一般区域上四阶问题的数值计算.

参 考 文 献

- [1] Hähner P. On the uniqueness of the shape of a penetrable, anisotropic obstacle[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000, 116(1): 167–180.
- [2] Cakoni F, Haddar H. Transmission eigenvalues in inverse scattering theory[J]. 2012, hal-00741615(1): 527–578.
- [3] Colton D, Monk P, Sun J. Analytical and computational methods for transmission eigenvalues[J]. Inverse Problems, 2010, 26(4): 045011.
- [4] Ji X, Xi Y, Xie H. Nonconforming finite element method for the transmission eigenvalue problem[J]. Advances in Applied Mathematics and Mechanics, 2017, 9(1): 92–103.
- [5] Colton D, Päiväranta L, Sylvester J. The interior transmission problem[J]. Inverse Problems & Imaging, 2007, 1(1): 13.
- [6] Cakoni F, Colton D. Qualitative methods in inverse scattering theory: An introduction[M]. Berlin: Springer, 2005.
- [7] Kirsch A. On the existence of transmission eigenvalues[J]. Inverse Problems & Imaging, 2009, 3(2): 155.
- [8] Yang Y, Bi H, Li H, et al. Mixed methods for the Helmholtz transmission eigenvalues[J]. Siam Journal on Scientific Computing, 2016, 38(3): A1383–A1403.
- [9] An J, Shen J. A Spectral-element method for transmission eigenvalue problems[J]. Journal of Scientific Computing, 2013, 57(3): 670–688.
- [10] Sun J. Estimation of transmission eigenvalues and the index of refraction from Cauchy data[J]. Inverse Problems, 2010, 27(1): 015009.
- [11] Ji X, Sun J, Turner T. Algorithm 922: a mixed finite element method for Helmholtz transmission eigenvalues[J]. Acm Transactions on Mathematical Software (TOMS), 2012, 38(4): 1–8.
- [12] An J, Shen J. Spectral approximation to a transmission eigenvalue problem and its applications to an inverse problem[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2015, 69(10): 1132–1143.

- [13] Haddar H. The interior transmission problem for anisotropic Maxwell's equations and its applications to the inverse problem[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2004, 27(18): 2111–2129.
- [14] Cakoni F, Colton D, Monk P, et al. The inverse electromagnetic scattering problem for anisotropic media[J]. *Inverse Problems*, 2010, 26(7): 074004.
- [15] Cakoni F, Gintides D, Haddar H. The existence of an infinite discrete set of transmission eigenvalues[J]. *Siam Journal on Mathematical Analysis*, 2010, 42(1): 237–255.
- [16] Cakoni F, Haddar H. On the existence of transmission eigenvalues in an inhomogeneous medium[J]. *Applicable Analysis*, 2009, 88(4): 475–493.
- [17] Päiväranta L, Sylvester J. Transmission eigenvalues[J]. *Siam Journal on Mathematical Analysis*, 2008, 40(2): 738–753.
- [18] Rynne B P, Sleeman B D. The interior transmission problem and inverse scattering from inhomogeneous media[J]. *Siam Journal on Mathematical Analysis*, 1991, 22(6): 1755–1762.
- [19] Tan T, Li L, An J. A novel spectral method and error analysis for fourth-order equations in a spherical region[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2022, 200(c): 148–161.
- [20] Jiang J, An J, Zhou J. A novel numerical method based on a high order polynomial approximation of the fourth order Steklov equation and its eigenvalue problems[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, 2022, 28(1): 50–69.
- [21] An J, Li H, Zhang Z. Spectral-Galerkin approximation and optimal error estimate for biharmonic eigenvalue problems in circular/spherical/elliptical domains[J]. *Numerical Algorithms*, 2020, 84(2): 427–455.
- [22] Tan T, Cao W, An J. Spectral approximation based on a mixed scheme and its error estimates for transmission eigenvalue problems[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2022, 111(1): 20–33.
- [23] Ren S, Tan T, An J. An efficient spectral-Galerkin approximation based on dimension reduction scheme for transmission eigenvalues in polar geometries[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2020, 80(5): 940–955.
- [24] Shan W, Li H. The triangular spectral element method for Stokes eigenvalues[J]. *Mathematics of Computation*, 2017, 86(308): 2579–2611.
- [25] Li H, Shan W, Zhang Z. C^1 -Conforming quadrilateral spectral element method for fourth-order equations[J]. *Communications on Applied Mathematics and Computation*, 2019, 1(3): 403–434.
- [26] An J, Bi H, Luo Z. A highly efficient spectral-Galerkin method based on tensor product for fourth-order Steklov equation with boundary eigenvalue[J]. *Journal of Inequalities and Applications*, 2016, 2016(1): 1–12.
- [27] Tang T. *Spectral and high-order methods with applications*[M]. Beijing: Science Press, 2006.
- [28] Shen J, Tang T, Wang L L. *Spectral methods: algorithms, analysis and applications*[M]. New York: Springer, 2011.
- [29] Shen J. Efficient spectral-Galerkin method I. Direct solvers of second-and fourth-order equations using Legendre polynomials[J]. *Siam Journal on Scientific Computing*, 1994, 15(6): 1489–1505.

AN EFFICIENT SPECTRAL GALERKIN APPROXIMATION BASED ON A REDUCED-ORDER FORMAT FOR FOURTH-ORDER PROBLEM WITH SIMPLY SUPPORTED PLATE BOUNDARY CONDITIONS

QIN Jia-qi, AN Jing

(*School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guizhou 550025, China*)

Abstract: In this paper, we study an efficient spectral-Galerkin approximation for fourth-order equation with simply supported plate boundary conditions. By introducing an auxiliary function and some appropriate Sobolev spaces, reducing the fourth-order problem to two coupled second-order problems, establishing the associated weak form and discrete scheme, using Lax-Milgram theorem and the approximation properties of projection operator, we prove the existence and uniqueness of the weak solutions and approximation solutions and the error estimation between them. Next, by using the orthogonality of Legendre polynomials, we construct a set of appropriate basis functions and derive the matrix formulations based on the tensor-product. Finally, some numerical experiments are carried out to validate the efficiency of the algorithm and the correctness of the theoretical results.

Keywords: fourth-order problem; boundary conditions of simple support plate; reduced format; spectral method; error estimation

2010 MR Subject Classification: 65N25; 65N30