

长方对偶矩阵的加权对偶群逆的存在性与表示

檀晶晶, 钟 金

(江西理工大学理学院, 江西 赣州 341000)

摘 要: 本文研究了长方对偶矩阵的加权对偶群逆的存在性与表示问题. 利用矩阵的秩和分块表示等给出了长方对偶矩阵的加权对偶群逆存在的若干充分必要条件, 并在加权对偶群逆存在的情形下给出了其表达式, 推广了对偶群逆的相关结论. 通过数值例子说明了加权对偶群逆存在时的计算方法.

关键词: 对偶矩阵; 加权对偶群逆; 存在性; 表示

MR(2010) 主题分类号: 15A09

中图分类号: O151.21

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2023)05-0422-11

1 引言

在代数系统中, 一个具有形式 $\hat{a} = a + \varepsilon a_0$ 的元素称为对偶元素, 其中 a 和 a_0 分别称为 $\hat{a}$ 的实部和对偶部. ε 称为对偶元, 满足法则 $\varepsilon \neq 0$, $0\varepsilon = \varepsilon 0 = 0$, $1\varepsilon = \varepsilon 1 = \varepsilon$ 和 $\varepsilon^2 = 0$. 对偶数的概念最早由 Clifford 在 1873 年提出, 而对偶数的应用最早来源于 Study^[1] 在 1901 年用对偶数来表示空间几何学中的对偶角. 在过去几十年里, 对偶数被广泛应用于多个领域, 如运动学分析^[2]、机器人^[3]、刚体运动分析^[4]等.

作为对偶数概念的推广, 元素为对偶数的矩阵称为对偶矩阵. 令 A 和 A_0 是两个 $m \times n$ 的实矩阵, 则 $\hat{A} = A + \varepsilon A_0$ 称为 $m \times n$ 的对偶矩阵, 且 A 和 A_0 分别称为 $\hat{A}$ 的实部和对偶部. 由于在许多运动学与机械系统领域的问题中需要求解线性对偶方程组, 与复矩阵和实矩阵类似的是, 对偶广义逆是研究对偶线性方程组的解与最小二乘解的重要工具, 所以对偶矩阵及其对偶广义逆广泛应用于这些领域. 然而, 对偶矩阵的对偶广义逆的许多重要性质不同于复矩阵和实矩阵的广义逆, 例如, 复矩阵的 Moore-Penrose 逆总是存在的, 但对偶矩阵的对偶 Moore-Penrose 逆却有可能不存在. 对偶广义逆的存在性对于运动学与机械系统领域中产生的对偶线性方程组的数值解问题有重要影响, 例如, 一个线性对偶方程组通常需要分裂成实部和对偶部, 且实部和对偶部所对应的两个实系数线性方程组需要独立计算, 但若该线性对偶方程组的系数对偶矩阵的对偶广义逆存在, 则计算过程可在一步完成, 从而可以提高计算的效率. 基于此原因, 讨论对偶矩阵的对偶广义逆的存在性及表示不仅具有重要理论意义, 同时在运动学和机械系统等领域也有应用价值.

对偶矩阵的对偶广义逆是近年来的一个研究热点, 关于各种对偶广义逆的存在性与表示有大量研究, 如文献 [5-8] 研究了对偶 Moore-Penrose 逆的存在性与表示, 文献 [9] 研究了对偶群逆的存在性与表示, 文献 [10] 介绍了对偶指标的概念, 并研究了对偶核逆的存在性与表

*收稿日期: 2022-08-22

接收日期: 2022-12-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (12261043); 江西省教育厅科技项目 (GJJ210884); 江西理工大学清江青年英才支持计划 (JXUSTQJYX2017007).

作者简介: 檀晶晶 (1997-), 女, 安徽安庆, 研究生, 主要研究方向: 矩阵论及其应用.

通讯作者: 钟金 (1984-), 男, 江西赣州, 副教授, 主要研究方向: 矩阵论及其应用.

示. 本文将研究长方对偶矩阵的加权对偶群逆的存在性与表示, 给出长方对偶矩阵的加权对偶群逆存在的充分必要条件, 并在加权对偶群逆存在时给出其显式表示, 同时推广对偶群逆的相关结论.

需要指出的是, 复矩阵的加权群逆已有相关研究. 2007 年, 岑建苗^[11]给出了长方矩阵加权群逆的定义, 研究了长方矩阵加权群逆的存在性, 给出了长方矩阵加权群逆存在的一些充分必要条件以及计算公式. 之后长方矩阵的加权群逆得到关注和研究, 陈永林^[12]给出了加权群逆一些新的存在条件与表示, 并研究了 Cline 和 Greville 定义的加权群逆的存在性与表示. 武玲玲等^[13]研究了长方矩阵加权群逆的扰动. 胡春梅等^[14]给出了计算长方矩阵加权群逆的三种迭代法. 胡振英等^[15]讨论了加权群逆的有限算法. 此外, 长方矩阵加权群逆的相关结论也被推广到 Banach 空间有界线性算子上 (见文献 [16-18]).

2 预备知识

记 $\mathbb{C}^{m \times n}$ 和 $\mathbb{R}^{m \times n}$ 分别为所有 $m \times n$ 复矩阵和实矩阵组成的集合, $\mathbb{D}^{m \times n}$ 为所有 $m \times n$ 对偶矩阵组成的集合. 对矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $r(A)$ 表示 A 的秩. n 阶方阵 A 的指标, 记为 $\text{Ind}(A)$, 是指满足 $r(A^k) = r(A^{k+1})$ 的最小非负整数 k . I_n 表示 n 阶单位矩阵, 在不引起混淆的情况下简记为 I .

下面给出加权群逆的定义.

定义 2.1^[11] 令 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $W \in \mathbb{C}^{n \times m}$. 如果存在 $X \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 使得

$$AWXWA = A, XWAWX = X, AWX = XWA,$$

则称 X 为 A 的加 W 权群逆, 记为 $A_W^\#$. 若 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 且 $W = I_n$, 则 X 即为 A 的群逆 $A^\#$.

类似的, 可以给出长方对偶矩阵的加权对偶群逆的定义.

定义 2.2 令 $\hat{A} \in \mathbb{D}^{m \times n}$, $\hat{W} \in \mathbb{D}^{n \times m}$. 如果存在 $\hat{X} \in \mathbb{D}^{m \times n}$ 使得

$$\hat{A}\hat{W}\hat{X}\hat{W}\hat{A} = \hat{A}, \hat{X}\hat{W}\hat{A}\hat{W}\hat{X} = \hat{X}, \hat{A}\hat{W}\hat{X} = \hat{X}\hat{W}\hat{A},$$

则称 $\hat{X}$ 为 $\hat{A}$ 的加 $\hat{W}$ 权对偶群逆, 记为 $\hat{A}_{\hat{W}}^\#$. 若 $\hat{A} \in \mathbb{D}^{n \times n}$ 且 $\hat{W} = I_n$, 则 $\hat{X}$ 即为 $\hat{A}$ 的对偶群逆 $\hat{A}^\#$.

引理 2.1^[12] 设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $W \in \mathbb{C}^{n \times m}$. 则 A 的加 W 权群逆 $A_W^\#$ 存在当且仅当 AW 和 WA 的群逆均存在并满足 $r(AW) = r(WA) = r(A)$. 若 $A_W^\#$ 存在, 则它是唯一的, 并且可表示为 $A_W^\# = (AW)^\# A(WA)^\# = A[(WA)^\#]^2 = [(AW)^\#]^2 A$.

引理 2.2 设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $W \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $r(A) = r$. 若 $A_W^\#$ 存在, 则存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$ 和 $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使得

$$A = P \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}, \quad W = Q \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_4 \end{bmatrix} P^{-1}, \quad (2.1)$$

其中 A_1 和 W_1 均为 r 阶可逆矩阵.

此时, $A_W^\#$ 具有表示

$$A_W^\# = P \begin{bmatrix} (W_1 A_1 W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}. \quad (2.2)$$

证 若 $A_W^\#$ 存在, 则由引理 2.1, AW 和 WA 的群逆均存在, 且由于 AW 和 WA 有相同的秩和非零特征值, 从而由 AW 和 WA 的若尔当标准形可知存在可逆矩阵 $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$ 和 $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使得 $AW = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$, $WA = Q \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}$, 其中 C 和 D 均为 r 阶可逆矩阵.

不妨将 A 和 W 分别表示为 $A = P \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} Q^{-1}$, $W = Q \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ W_3 & W_4 \end{bmatrix} P^{-1}$, 其中 A_1 和 W_1 均为 r 阶方阵.

由 $(AW)A = A(WA)$ 可得

$$P \begin{bmatrix} CA_1 & CA_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} = P \begin{bmatrix} A_1 D & 0 \\ A_3 D & 0 \end{bmatrix} Q^{-1},$$

于是 $CA_2 = 0$, $A_3 D = 0$. 因为 C 和 D 均为可逆矩阵, 所以 $A_2 = 0$, $A_3 = 0$.

类似的, 由 $(WA)W = W(AW)$ 可得 $W_2 = 0$ 和 $W_3 = 0$. 于是由

$$AW = P \begin{bmatrix} A_1 W_1 & 0 \\ 0 & A_4 W_4 \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$$

可得 $A_1 W_1 = C$. 由于 C 为可逆矩阵, 所以 A_1 和 W_1 均为 r 阶可逆矩阵.

此外, 由于 $r = r(A) = r(A_1) + r(A_4)$ 且 $r(A_1) = r$, 所以 $A_4 = 0$. 这就证明了 A 和 W 具有 (2.1) 中的表示.

若 $A_W^\#$ 存在, 则由引理 2.1,

$$\begin{aligned} A_W^\# &= (AW)^\# A(WA)^\# \\ &= P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} P \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} Q \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} (W_1 A_1 W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}. \end{aligned}$$

引理 2.3^[19] 令 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 其中 B 和 C 的指标均为 1, 则

$$r \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r(B) + r(C) + r[(I - BB^\#)A(I - CC^\#)].$$

3 主要结果

本节研究长方对偶矩阵的加权对偶群逆的存在性与表示, 给出加权对偶群逆存在的充分必要条件, 并在加权对偶群逆存在时给出其表示.

首先给出一个对偶矩阵是某个长方对偶矩阵的加权对偶群逆的充分必要条件.

引理 3.1 令 $\hat{A} = A + \varepsilon A_0 \in \mathbb{D}^{m \times n}$, $\widehat{W} = W + \varepsilon W_0 \in \mathbb{D}^{n \times m}$, 其中 $A, A_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $W, W_0 \in \mathbb{R}^{n \times m}$. 则对偶矩阵 $\hat{G} = G + \varepsilon G_0 \in \mathbb{D}^{m \times n}$ 是 $\hat{A}$ 的加 $\widehat{W}$ 权对偶群逆当且仅当

$G = A_W^\#$ 且

$$AWGWA_0 + AWGW_0A + AWG_0WA + AW_0GWA + A_0WGW A = A_0, \quad (3.1)$$

$$GWA WG_0 + GWA W_0G + GWA_0WG + GW_0AWG + G_0WAWG = G_0, \quad (3.2)$$

$$AWG_0 + AW_0G + A_0WG = GWA_0 + GW_0A + G_0WA. \quad (3.3)$$

证 由 $\widehat{A} = A + \varepsilon A_0$, $\widehat{W} = W + \varepsilon W_0$, $\widehat{G} = G + \varepsilon G_0$ 可得

$$\begin{aligned} \widehat{A}\widehat{W}\widehat{G}\widehat{W}\widehat{A} &= AWGWA + \varepsilon(AWGW A_0 + AWGW_0A + AWG_0WA + AW_0GWA + A_0WGW A), \\ \widehat{G}\widehat{W}\widehat{A}\widehat{W}\widehat{G} &= GWA WG + \varepsilon(GWA WG_0 + GWA W_0G + GWA_0WG + GW_0AWG + G_0WAWG), \\ \widehat{A}\widehat{W}\widehat{G} &= AWG + \varepsilon(AWG_0 + AW_0G + A_0WG), \quad \widehat{G}\widehat{W}\widehat{A} = GWA + \varepsilon(GWA_0 + GW_0A + G_0WA). \end{aligned}$$

若 $\widehat{G} = G + \varepsilon G_0$ 是 $\widehat{A} = A + \varepsilon A_0$ 的加 $\widehat{W}$ 权对偶群逆, 则由定义 2.2 可得 $\widehat{A}\widehat{W}\widehat{G}\widehat{W}\widehat{A} = \widehat{A}$, $\widehat{G}\widehat{W}\widehat{A}\widehat{W}\widehat{G} = \widehat{G}$, $\widehat{A}\widehat{W}\widehat{G} = \widehat{G}\widehat{W}\widehat{A}$. 比较这三个等式的实部和对偶部可得

$$\begin{aligned} AWGWA &= A, \quad GWA WG = G, \quad AWG = GWA \quad \text{和} \\ AWGWA_0 + AWGW_0A + AWG_0WA + AW_0GWA + A_0WGW A &= A_0, \\ GWA WG_0 + GWA W_0G + GWA_0WG + GW_0AWG + G_0WAWG &= G_0, \\ AWG_0 + AW_0G + A_0WG &= GWA_0 + GW_0A + G_0WA. \end{aligned}$$

于是由定义 2.1 可知 A 的加 W 权群逆存在且 $G = A_W^\#$. 此外, 等式 (3.1)–(3.3) 也成立.

反之, 若 A 的加 W 权群逆存在且 $G = A_W^\#$, 等式 (3.1)–(3.3) 也成立, 则由定义 2.2 直接可得 $\widehat{G} = G + \varepsilon G_0 \in \mathbb{D}^{m \times n}$ 是 $\widehat{A} = A + \varepsilon A_0$ 的加 $\widehat{W}$ 权对偶群逆, 证毕.

文献 [11] 说明若 A 的加 W 权群逆存在, 则一定唯一. 下面证明该结论也适用于加权对偶群逆.

定理 3.1 设 $\widehat{A} = A + \varepsilon A_0 \in \mathbb{D}^{m \times n}$, $\widehat{W} = W + \varepsilon W_0 \in \mathbb{D}^{n \times m}$, 其中 $A, A_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $W, W_0 \in \mathbb{R}^{n \times m}$. 若 $\widehat{A}$ 的加 $\widehat{W}$ 权对偶群逆存在, 则是唯一的.

证 由引理 3.1, 若 $\widehat{A}$ 的加 $\widehat{W}$ 权对偶群逆存在, 则 $\widehat{A}_W^\#$ 具有形式 $\widehat{A}_W^\# = A_W^\# + \varepsilon R$. 假设 $A_W^\# + \varepsilon R_1$ 和 $A_W^\# + \varepsilon R_2$ 是 $\widehat{A}$ 的两个加 $\widehat{W}$ 权对偶群逆, 下面证明 $R_1 = R_2$.

由 (3.1) 式可得

$$\begin{aligned} AW A_W^\# W A_0 + AW A_W^\# W_0 A + AW R_1 W A + AW_0 A_W^\# W A + A_0 W A_W^\# W A &= A_0, \\ AW A_W^\# W A_0 + AW A_W^\# W_0 A + AW R_2 W A + AW_0 A_W^\# W A + A_0 W A_W^\# W A &= A_0. \end{aligned}$$

两式相减可得

$$AW(R_1 - R_2)WA = 0. \quad (3.4)$$

同样的, 由 (3.2) 式可得

$$\begin{aligned} A_W^\# W A W R_1 + A_W^\# W A W_0 A_W^\# + A_W^\# W A_0 W A_W^\# + A_W^\# W_0 A W A_W^\# + R_1 W A W A_W^\# &= R_1, \\ A_W^\# W A W R_2 + A_W^\# W A W_0 A_W^\# + A_W^\# W A_0 W A_W^\# + A_W^\# W_0 A W A_W^\# + R_2 W A W A_W^\# &= R_2. \end{aligned}$$

两式相减可得

$$A_W^\# W A W (R_1 - R_2) + (R_1 - R_2) W A W A_W^\# = R_1 - R_2. \quad (3.5)$$

最后, 由 (3.3) 式可得

$$\begin{aligned} A W R_1 + A W_0 A_W^\# + A_0 W A_W^\# &= A_W^\# W A_0 + A_W^\# W_0 A + R_1 W A, \\ A W R_2 + A W_0 A_W^\# + A_0 W A_W^\# &= A_W^\# W A_0 + A_W^\# W_0 A + R_2 W A. \end{aligned}$$

两式相减可得

$$A W (R_1 - R_2) = (R_1 - R_2) W A. \quad (3.6)$$

在 (3.4) 式右边乘以 $W A_W^\#$ 并利用 (3.6) 式可得

$$A W (R_1 - R_2) W A W A_W^\# = (R_1 - R_2) W A W A W A_W^\# = (R_1 - R_2) W A W A_W^\# W A = (R_1 - R_2) W A = 0.$$

再将 $A W (R_1 - R_2) = (R_1 - R_2) W A = 0$ 代入 (3.5) 式即可得 $R_1 - R_2 = 0$, 证毕.

下面给出矩阵 $\hat{A} = A + \varepsilon A_0 \in \mathbb{D}^{m \times n}$ 的加 $\widehat{W}$ 权对偶群逆存在的一些充分必要条件, 并在 $\hat{A}_W^\#$ 存在时给出其显示表示.

定理 3.2 设 $\hat{A} = A + \varepsilon A_0 \in \mathbb{D}^{m \times n}$, $\widehat{W} = W + \varepsilon W_0 \in \mathbb{D}^{n \times m}$, 其中 $A, A_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $W, W_0 \in \mathbb{R}^{n \times m}$. 则下面命题等价:

- (i) $\hat{A}_W^\#$ 存在;
- (ii) $A_W^\#$ 存在, 且 $\hat{A} = P \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}$, $\widehat{W} = Q \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_4 \end{bmatrix} P^{-1} + \varepsilon Q \begin{bmatrix} \tilde{W}_1 & \tilde{W}_2 \\ \tilde{W}_3 & \tilde{W}_4 \end{bmatrix} P^{-1}$, 其中 P, Q, A_1, W_1 均为可逆矩阵;
- (iii) $A_W^\#$ 存在且 $(I - A_W^\# W A W) A_0 (I - W A W A_W^\#) = 0$;
- (iv) $A_W^\#$ 存在且 $r \begin{bmatrix} A_0 & A W \\ W A & 0 \end{bmatrix} = 2r(A)$.

此外, 若 $\hat{A}_W^\#$ 存在, 则

$$\hat{A}_W^\# = A_W^\# + \varepsilon R, \quad (3.7)$$

其中

$$\begin{aligned} R &= [(A W)^\#]^2 A_0 (I - W A W A_W^\#) + (I - A_W^\# W A W) A_0 [(W A)^\#]^2 \\ &\quad - A_W^\# W A W_0 A_W^\# - A_W^\# W_0 A W A_W^\# - (A W)^\# A_0 (W A)^\#. \end{aligned} \quad (3.8)$$

证 (i) $\Rightarrow$ (ii): 若 $\hat{A}_W^\#$ 存在, 则由引理 3.1, $\hat{A}_W^\#$ 的实部为 $A_W^\#$, 即 $A_W^\#$ 存在. 不妨设 $\hat{A}_W^\# = A_W^\# + \varepsilon R$.

因为 $A_W^\#$ 存在, 从而由引理 2.2 可知 A 和 W 具有 (2.1) 中的表示, $A_W^\#$ 具有 (2.2) 中的表示. 令 $A_0 = P \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 & \tilde{A}_4 \end{bmatrix} Q^{-1}$, $W_0 = Q \begin{bmatrix} \tilde{W}_1 & \tilde{W}_2 \\ \tilde{W}_3 & \tilde{W}_4 \end{bmatrix} P^{-1}$, $R = P \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{bmatrix} Q^{-1}$. 则由 (3.1)

式有 $AWA_W^\#WA_0 + AWA_W^\#W_0A + AWRWA + AW_0A_W^\#WA + A_0WA_W^\#WA = A_0$, 即

$$\begin{aligned} & P \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} + P \begin{bmatrix} W_1^{-1}\tilde{W}_1A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} + P \begin{bmatrix} A_1W_1R_1W_1A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \\ & + P \begin{bmatrix} A_1\tilde{W}_1W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} + P \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & 0 \\ \tilde{A}_3 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \\ & = P \begin{bmatrix} 2\tilde{A}_1 + W_1^{-1}\tilde{W}_1A_1 + A_1W_1R_1W_1A_1 + A_1\tilde{W}_1W_1^{-1} & \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \\ & = P \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 & \tilde{A}_4 \end{bmatrix} Q^{-1}. \end{aligned}$$

由上式可得 $\tilde{A}_4 = 0$. 所以,

$$\hat{A} = P \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}, \widehat{W} = Q \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_4 \end{bmatrix} P^{-1} + \varepsilon Q \begin{bmatrix} \tilde{W}_1 & \tilde{W}_2 \\ \tilde{W}_3 & \tilde{W}_4 \end{bmatrix} P^{-1},$$

其中 P, Q, A_1, W_1 均为可逆矩阵.

(ii) $\Rightarrow$ (iii):

$$\text{若 } \hat{A} = P \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}, \widehat{W} = Q \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_4 \end{bmatrix} P^{-1} + \varepsilon Q \begin{bmatrix} \tilde{W}_1 & \tilde{W}_2 \\ \tilde{W}_3 & \tilde{W}_4 \end{bmatrix} P^{-1},$$

其中 P, Q, A_1, W_1 均为可逆矩阵, 则

$$(I - A_W^\# W A W) A_0 (I - W A W A_W^\#) = P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} P^{-1} P \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} Q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} Q^{-1} = 0.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): 若 $A_W^\#$ 存在, 由引理 2.2, A 和 W 分别具有 (2.1) 中的表示, $A_W^\#$ 具有 (2.2) 中的表示. 令 $\hat{A} = P \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 & \tilde{A}_4 \end{bmatrix} Q^{-1}, \widehat{W} = Q \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_4 \end{bmatrix} P^{-1} + \varepsilon Q \begin{bmatrix} \tilde{W}_1 & \tilde{W}_2 \\ \tilde{W}_3 & \tilde{W}_4 \end{bmatrix} P^{-1}$, 其中 P, Q, A_1, W_1 均为可逆矩阵. 则由 $(I - A_W^\# W A W) A_0 (I - W A W A_W^\#) = 0$ 不难得到 $\tilde{A}_4 = 0$.

令

$$\begin{aligned} \hat{G} &= P \begin{bmatrix} (W_1 A_1 W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \\ &+ \varepsilon P \begin{bmatrix} -W_1^{-1}(\tilde{W}_1 W_1^{-1} A_1^{-1} + A_1^{-1} \tilde{A}_1 A_1^{-1} + A_1^{-1} W_1^{-1} \tilde{W}_1) W_1^{-1} & (A_1 W_1)^{-2} \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 (W_1 A_1)^{-2} & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}. \end{aligned}$$

则直接计算可得

$$\begin{aligned} \hat{A} \widehat{W} \hat{G} &= \left(P \begin{bmatrix} A_1 W_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} A_1 \tilde{W}_1 + \tilde{A}_1 W_1 & A_1 \tilde{W}_2 + \tilde{A}_2 W_4 \\ \tilde{A}_3 W_1 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \right) \\ &\times \left(P \begin{bmatrix} (W_1 A_1 W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \right. \\ &+ \left. \varepsilon P \begin{bmatrix} -W_1^{-1}(\tilde{W}_1 W_1^{-1} A_1^{-1} + A_1^{-1} \tilde{A}_1 A_1^{-1} + A_1^{-1} W_1^{-1} \tilde{W}_1) W_1^{-1} & (A_1 W_1)^{-2} \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 (W_1 A_1)^{-2} & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \right) \\ &= P \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} -W_1^{-1} \tilde{W}_1 W_1^{-1} & (A_1 W_1)^{-1} \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 (W_1 A_1)^{-1} & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{G}\widehat{W}\widehat{A} &= \left(P \begin{bmatrix} (W_1 A_1 W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \right. \\
&+ \varepsilon P \begin{bmatrix} -W_1^{-1}(\tilde{W}_1 W_1^{-1} A_1^{-1} + A_1^{-1} \tilde{A}_1 A_1^{-1} + A_1^{-1} W_1^{-1} \tilde{W}_1) W_1^{-1} & (A_1 W_1)^{-2} \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 (W_1 A_1)^{-2} & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \Big) \\
&\times \left(Q \begin{bmatrix} W_1 A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} + \varepsilon Q \begin{bmatrix} W_1 \tilde{A}_1 + \tilde{W}_1 A_1 & W_1 \tilde{A}_2 \\ \tilde{W}_3 A_1 + W_4 \tilde{A}_3 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \right) \\
&= P \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} -W_1^{-1} \tilde{W}_1 W_1^{-1} & (A_1 W_1)^{-1} \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 (W_1 A_1)^{-1} & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}.
\end{aligned}$$

由此可见, $\widehat{A}\widehat{W}\widehat{G} = \widehat{G}\widehat{W}\widehat{A}$.

此外,

$$\begin{aligned}
\widehat{A}\widehat{W}\widehat{G}\widehat{W}\widehat{A} &= \left(P \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} -W_1^{-1} \tilde{W}_1 W_1^{-1} & (A_1 W_1)^{-1} \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 (W_1 A_1)^{-1} & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \right) \\
&\times \left(Q \begin{bmatrix} W_1 A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} + \varepsilon Q \begin{bmatrix} W_1 \tilde{A}_1 + \tilde{W}_1 A_1 & W_1 \tilde{A}_2 \\ \tilde{W}_3 A_1 + W_4 \tilde{A}_3 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \right) \\
&= P \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \\
&= \widehat{A},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\widehat{G}\widehat{W}\widehat{A}\widehat{W}\widehat{G} \\
&= \left(P \begin{bmatrix} W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} -W_1^{-1} \tilde{W}_1 W_1^{-1} & (A_1 W_1)^{-1} \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 (W_1 A_1)^{-1} & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \right) \\
&\times \left(Q \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_4 \end{bmatrix} P^{-1} + \varepsilon Q \begin{bmatrix} \tilde{W}_1 & \tilde{W}_2 \\ \tilde{W}_3 & \tilde{W}_4 \end{bmatrix} P^{-1} \right) \times \left(P \begin{bmatrix} (W_1 A_1 W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \right. \\
&+ \varepsilon P \begin{bmatrix} -W_1^{-1}(\tilde{W}_1 W_1^{-1} A_1^{-1} + A_1^{-1} \tilde{A}_1 A_1^{-1} + A_1^{-1} W_1^{-1} \tilde{W}_1) W_1^{-1} & (A_1 W_1)^{-2} \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 (W_1 A_1)^{-2} & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \Big) \\
&= \left(P \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} 0 & W_1^{-1} \tilde{W}_2 + (A_1 W_1)^{-1} \tilde{A}_2 W_4 \\ \tilde{A}_3 A_1^{-1} & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \right) \times \left(P \begin{bmatrix} (W_1 A_1 W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \right. \\
&+ \varepsilon P \begin{bmatrix} -W_1^{-1}(\tilde{W}_1 W_1^{-1} A_1^{-1} + A_1^{-1} \tilde{A}_1 A_1^{-1} + A_1^{-1} W_1^{-1} \tilde{W}_1) W_1^{-1} & (A_1 W_1)^{-2} \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 (W_1 A_1)^{-2} & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \Big) \\
&= P \begin{bmatrix} (W_1 A_1 W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \\
&+ \varepsilon P \begin{bmatrix} -W_1^{-1}(\tilde{W}_1 W_1^{-1} A_1^{-1} + A_1^{-1} \tilde{A}_1 A_1^{-1} + A_1^{-1} W_1^{-1} \tilde{W}_1) W_1^{-1} & (A_1 W_1)^{-2} \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 (W_1 A_1)^{-2} & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \\
&= \widehat{G}.
\end{aligned}$$

由定义 2.2, $\widehat{A}$ 的加 $\widehat{W}$ 权对偶群逆存在且 $\widehat{A}_{\widehat{W}}^{\#} = \widehat{G}$.

又因为

$$A_W^{\#} W A W_0 A^{\#} = P \begin{bmatrix} W_1^{-1} \tilde{W}_1 (W_1 A_1 W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}, A_W^{\#} W_0 A W A_W^{\#} = P \begin{bmatrix} (W_1 A_1 W_1)^{-1} \tilde{W}_1 W_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1},$$

$$\begin{aligned}
(AW)^{\#}A_0(WA)^{\#} &= P \begin{bmatrix} (A_1W_1)^{-1}\tilde{A}_1(W_1A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}, \\
[(AW)^{\#}]^2A_0(I - WAWA_W^{\#}) &= P \begin{bmatrix} (A_1W_1)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}P \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}Q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} Q^{-1} \\
&= P \begin{bmatrix} 0 & (A_1W_1)^{-2}\tilde{A}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}, \\
(I - A_W^{\#}WAW)A_0[(WA)^{\#}]^2 &= P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} P^{-1}P \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}Q \begin{bmatrix} (W_1A_1)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \\
&= P \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{A}_3(W_1A_1)^{-2} & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}.
\end{aligned}$$

所以, $\hat{A}_W^{\#} = \hat{G} = A_W^{\#} + \varepsilon\{[(AW)^{\#}]^2A_0(I - WAWA_W^{\#}) + (I - A_W^{\#}WAW)A_0[(WA)^{\#}]^2 - A_W^{\#}WAW_0A_W^{\#} - A_W^{\#}W_0AWA_W^{\#} - (AW)^{\#}A_0(WA)^{\#}\}$, 这就证明了 (3.7) 和 (3.8) 是成立的.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv): 若 $A_W^{\#}$ 存在, 则由引理 2.1, AW 和 WA 的群逆均存在且 $r(AW) = r(WA) = r(A)$. 再由引理 2.3 可得

$$\begin{aligned}
r \begin{bmatrix} A_0 & AW \\ WA & 0 \end{bmatrix} &= r(AW) + r(WA) + r\{[I - (AW)(AW)^{\#}]A_0[I - (WA)(WA)^{\#}]\} \\
&= 2r(A) + r\{[I - (AW)(AW)^{\#}]A_0[I - (WA)(WA)^{\#}]\} \\
&= 2r(A)
\end{aligned}$$

当且仅当 $[I - (AW)(AW)^{\#}]A_0[I - (WA)(WA)^{\#}] = 0$. 又因为 $(AW)(AW)^{\#} = A_W^{\#}WAW$, $(WA)(WA)^{\#} = WAWA_W^{\#}$, 所以 (iii) 等价于 (iv). 证毕.

当 $\hat{A} \in \mathbb{D}^{n \times n}$ 且 $\hat{W} = I$, 即 $W = I$, $W_0 = 0$ 时, 由定理 3.2 可得到对偶群逆的存在性刻画及表示.

推论 3.1^[9] 设 $\hat{A} = A + \varepsilon A_0 \in \mathbb{D}^{n \times n}$, 其中 $A, A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. 则下面命题等价:

- (i) $\hat{A}$ 的对偶群逆存在;
- (ii) $\text{Ind}(A) = 1$ 且 $\hat{A} = P \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$, 其中 P 和 A_1 均为可逆矩阵;
- (iii) $(I - AA^{\#})A_0(I - AA^{\#}) = 0$;
- (iv) $\text{Ind}(A) = 1$ 且 $r \begin{bmatrix} A_0 & A \\ A & 0 \end{bmatrix} = 2r(A)$.

此外, 若 $\hat{A}^{\#}$ 存在, 则

$$\hat{A}^{\#} = A^{\#} + \varepsilon[(A^{\#})^2A_0(I - AA^{\#}) + (I - AA^{\#})A_0(A^{\#})^2 - A^{\#}A_0A^{\#}].$$

例 3.1 令 $\hat{A} = A + \varepsilon A_0 \in \mathbb{D}^{3 \times 4}$, $\hat{W} = W + \varepsilon W_0 \in \mathbb{D}^{4 \times 3}$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, W_0 = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

则

$$AW = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, WA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

不难看出, AW 和 WA 的指标均为 1, 从而它们的群逆均存在. 又因为 $r(AW) = r(WA) = r(A) = 2$, 于是由引理 2.1 可知 $A_W^\#$ 存在, 且

$$A_W^\# = A[(WA)^\#]^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

此外, 由于

$$r \begin{bmatrix} A_0 & AW \\ WA & 0 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4 = 2r(A),$$

从而由定理 3.2 可知 $\widehat{A}_W^\#$ 存在, 且

$$\begin{aligned} \widehat{A}_W^\# &= A_W^\# + \varepsilon\{[(AW)^\#]^2 A_0(I - WAWA_W^\#) + (I - A_W^\# WAW)A_0[(WA)^\#]^2 \\ &\quad - A_W^\# WAW_0 A_W^\# - A_W^\# W_0 AWA_W^\# - (AW)^\# A_0 (WA)^\#\} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} -5 & -11 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

最后给出 $\widehat{A}_W^\#$ 基于 $(\widehat{AW})^\#$ 和 $(\widehat{WA})^\#$ 的表示.

定理 3.3 令 $\widehat{A} = A + \varepsilon A_0 \in \mathbb{D}^{m \times n}$, $\widehat{W} = W + \varepsilon W_0 \in \mathbb{D}^{n \times m}$, 其中 $A, A_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $W, W_0 \in \mathbb{R}^{n \times m}$. 若 $\widehat{A}_W^\#$ 存在, 则 $(\widehat{AW})^\#$ 和 $(\widehat{WA})^\#$ 均存在, 且

$$\widehat{A}_W^\# = (\widehat{AW})^\# \widehat{A} (\widehat{WA})^\# = [(\widehat{AW})^\#]^2 \widehat{A} = \widehat{A} [(\widehat{WA})^\#]^2.$$

证 若 $\widehat{A}_W^\#$ 存在, 则由定理 3.2, $A_W^\#$ 存在, 于是由引理 2.1 可知 $(AW)^\#$ 和 $(WA)^\#$ 均存在. 此外, $\widehat{A}$ 和 $\widehat{W}$ 分别具有如下表示:

$$\widehat{A} = P \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}, \widehat{W} = Q \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_4 \end{bmatrix} P^{-1} + \varepsilon Q \begin{bmatrix} \tilde{W}_1 & \tilde{W}_2 \\ \tilde{W}_3 & \tilde{W}_4 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

于是

$$\begin{aligned} \widehat{AW} &= P \begin{bmatrix} A_1 W_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} A_1 \tilde{W}_1 + \tilde{A}_1 W_1 & A_1 \tilde{W}_2 + \tilde{A}_2 W_4 \\ \tilde{A}_3 W_1 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}, \\ \widehat{WA} &= Q \begin{bmatrix} W_1 A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} + \varepsilon Q \begin{bmatrix} W_1 \tilde{A}_1 + \tilde{W}_1 A_1 & W_1 \tilde{A}_2 \\ W_4 \tilde{A}_3 + \tilde{W}_3 A_1 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}. \end{aligned}$$

因为 AW 和 WA 分别是 $\widehat{AW}$ 和 $\widehat{WA}$ 的实部, 且二者的指标均为 1, 于是由推论 3.1 以及上面 $\widehat{AW}$ 和 $\widehat{WA}$ 的表示可知 $(\widehat{AW})^\#$ 和 $(\widehat{WA})^\#$ 均存在, 且

$$\begin{aligned}
 (\widehat{AW})^\# &= P \begin{bmatrix} (A_1 W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \\
 &+ \varepsilon P \begin{bmatrix} -(A_1 W_1)^{-1}(A_1 \tilde{W}_1 + \tilde{A}_1 W_1)(A_1 W_1)^{-1} & (A_1 W_1)^{-2}(A_1 \tilde{W}_2 + \tilde{A}_2 W_4) \\ \tilde{A}_3 W_1 (A_1 W_1)^{-2} & 0 \end{bmatrix} P^{-1}, \\
 (\widehat{WA})^\# &= Q \begin{bmatrix} (W_1 A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} + \varepsilon Q \begin{bmatrix} -(W_1 A_1)^{-1}(W_1 \tilde{A}_1 + \tilde{W}_1 A_1)(W_1 A_1)^{-1} & (W_1 A_1)^{-2} W_1 \tilde{A}_2 \\ (W_4 \tilde{A}_3 + \tilde{W}_3 A_1)(W_1 A_1)^{-2} & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}.
 \end{aligned}$$

直接计算可得

$$\begin{aligned}
 (\widehat{AW})^\# \widehat{A}(\widehat{WA})^\# &= \left(P \begin{bmatrix} (A_1 W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \right. \\
 &+ \varepsilon P \begin{bmatrix} -(A_1 W_1)^{-1}(A_1 \tilde{W}_1 + \tilde{A}_1 W_1)(A_1 W_1)^{-1} & (A_1 W_1)^{-2}(A_1 \tilde{W}_2 + \tilde{A}_2 W_4) \\ \tilde{A}_3 W_1 (A_1 W_1)^{-2} & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \Big) \\
 &\times \left(P \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} + \varepsilon P \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \right) \times \left(Q \begin{bmatrix} (W_1 A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \right. \\
 &+ \varepsilon Q \begin{bmatrix} -(W_1 A_1)^{-1}(W_1 \tilde{A}_1 + \tilde{W}_1 A_1)(W_1 A_1)^{-1} & (W_1 A_1)^{-2} W_1 \tilde{A}_2 \\ (W_4 \tilde{A}_3 + \tilde{W}_3 A_1)(W_1 A_1)^{-2} & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \Big) \\
 &= P \begin{bmatrix} (W_1 A_1 W_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \\
 &+ \varepsilon P \begin{bmatrix} -W_1^{-1}(\tilde{W}_1 W_1^{-1} A_1^{-1} + A_1^{-1} \tilde{A}_1 A_1^{-1} + A_1^{-1} W_1^{-1} \tilde{W}_1) W_1^{-1} & (A_1 W_1)^{-2} \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 (W_1 A_1)^{-2} & 0 \end{bmatrix} Q^{-1} \\
 &= \widehat{A}_W^\#.
 \end{aligned}$$

类似的, 可证明 $\widehat{A}_W^\# = [(\widehat{AW})^\#]^2 \widehat{A} = \widehat{A}[(\widehat{WA})^\#]^2$.

参 考 文 献

- [1] Fischer I S. Dual-number methods in kinematics, statics and dynamics [M]. Routledge, 2017.
- [2] Angeles J. Latest advances in robot kinematics: the dual generalized inverses and their applications in kinematic synthesis[C]. Springer Netherlands, 2012.
- [3] Gu Y, Luh J. Dual-number transformation and its applications to robotics [J]. IEEE J. Robot. Autom., 1987, 3(6): 615–623.
- [4] Pennestrì E, Valentini P P. Linear dual algebra algorithms and their application to kinematics [J]. Multibody Dyn. Computat. Methods, Appl. Sci., 2009, 12: 207–229.
- [5] Udwadia F E, Pennestrì E, Falco D De. Do all dual matrices have dual Moore-Penrose generalized inverses[J]. Mech. Mach.Theory, 2020, 151: 103878.
- [6] Udwadia F E. Dual generalized inverses and their use in solving systems of linear dual equation [J]. Mech. Mach. Theory, 2021, 156: 104158.

- [7] Udawadia F E. When does a dual matrix have a dual generalized inverse [J]. *Symmetry*, 2021, 13(8): 1386.
- [8] Wang H. Characterizations and properties of the MPDGI and DMPGI [J]. *Mech. Mach. Theory*, 2021, 158: 104212.
- [9] Zhong J, Zhang Y. Dual group inverses of dual matrices and their applications in solving systems of linear dual equations [J]. *AIMS Mathematics*, 2022, 7(5): 7606–7624.
- [10] Wang H, Gao J. The dual index and dual core generalized inverse [J]. *Open. Math.*, 2023, 21(1): 20220592.
- [11] 岑建苗. 关于长方矩阵的加权群逆的存在性 [J]. *计算数学*, 2007, 29(1): 39–48.
- [12] 陈永林. 长方矩阵的加权群逆的存在条件与表示 [J]. *南京师大学报 (自然科学版)*, 2008, 31(3): 1–5.
- [13] 武玲玲, 刘晓冀. 长方矩阵加权群逆的扰动及其计算 [J]. *四川师范大学学报 (自然科学版)*, 2011, 34(4): 479–483.
- [14] 胡春梅, 刘晓冀. 长方矩阵加权群逆的迭代法 [J]. *高等学校计算数学学报*, 2012, 34(1): 16–22.
- [15] 胡振英, 陈新, 张红潮. 计算长方矩阵加权群逆的有限算法 [J]. *南京师大学报 (自然科学版)*, 2011, 34(1): 39–42.
- [16] 杜法鹏, 张娅. Banach 空间有界线性算子加权群逆的存在性 [J]. *徐州工程学院学报 (自然科学版)*, 2009, 24(4): 69–71.
- [17] 胡春梅. Banach 空间有界线性算子加权群逆的存在条件与扰动分析 [J]. *四川师范大学学报 (自然科学版)*, 2017, 40(2): 199–204.
- [18] 胡春梅. Banach 空间中算子加权群逆的定义方程与表示 [J]. *云南民族大学学报 (自然科学版)*, 2021, 31(1): 65–70.
- [19] TIAN Y. Rank equalities related to generalized inverses of matrices and their applications [D]. Master Thesis, Montreal, Quebec, Canada, 2000.

THE EXISTENCE AND REPRESENTATION OF THE WEIGHTED DUAL GROUP INVERSES OF RECTANGULAR DUAL MATRICES

TAN Jing-jing, ZHONG Jin

(*Faculty of Science, Jiangxi University of Science and Technology, Jiangxi 341000, China*)

Abstract: The problem of the existence and representation of the weighted dual group inverses of rectangular dual matrices is studied. Some sufficient and necessary conditions for the existence of the weighted dual group inverse are presented by rank and block expressions and so on, the representation of the weighted dual group inverse is also given whenever it exists, which extends the corresponding results of the dual group inverse. The computing method of the weighted dual group inverse is illustrated by a numerical example.

Keywords: dual matrix; weighted dual group inverse; existence; representation

2010 MR Subject Classification: 15A09