Vol. 43 (2023)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

时滞合作捕食模型的随机动力学分析

王小焕 [1]，吕广迎 [1]，杨亚男 [2]
(1. 南京信息工程大学数学与统计学院, 江苏 南京, 210044)
(2. 河南大学数学与统计学院, 河南 开封, 475004)

摘 要: 本文主要研究了一种带有时滞的三物种模型, 其中一个物种以另外两个合作的物种为食物. 首先, 利用比较原理和随机分析理论, 建立了平稳分布的准则; 其次, 利用初值的假设和比较原理, 给出了物种的生存性或者灭绝性的充分条件; 最后, 结合矩阵理论, 得到了解的分布平稳, 且弱收敛到唯一的一个遍历不变分布.

关键词: 捕食模型; 平稳分布; Itô’s 公式
MR(2010) **主题分类号**: 34K50; 60H10 **中图分类号**: O211.63; O29
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2023)01-0071-15

1 引言

在数学生物学中, 如何准确地描述物种间关系是一个有意义的话题. 在现实的生活中, 物种的演化都可能被其他的物种或者物种自身的演化所影响, 在数学上一般用确定性 (偏) 微分方程来描述. 注意到噪声总是存在, 加上其它不确定性因素的影响, 随机 (偏) 微分方程可以更好的刻画物种的演化. 最早的双物种模型是著名的 Lotka-Volterra 捕食模型, 本文考虑三物种在随机环境下的演化行为

$$\begin{cases} dx_1(t)=x_1(t)[a_1-c_{11}x_1(t)+c_{12}x_2(t-\tau_1)-c_{13}x_3(t-\tau_2)]dt,\\ dx_2(t)=x_2(t)[a_2+c_{21}x_1(t-\tau_3)-c_{22}x_2(t)-c_{23}x_3(t-\tau_4)]dt,\\ dx_3(t)=x_3(t)[a_3+c_{31}x_1(t-\tau_5)+c_{32}x_2(t-\tau_6)-c_{33}x_3(t)]dt,\end{cases}$$

初始值为 $x_i(\theta)$, 并且

$$x_i(\theta)=\phi_i(\theta),\ \theta\in[-\tau,0],\ \tau=\max\{\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,\tau_5,\tau_6\},\ i=1,2,3,$$

这里的 $\phi_i(\theta)$ 是定义在区间 $[-\tau,0]$ 上的连续函数并且大于零, $i=1,2,3$. 换句话说, $x_0=\phi=(\phi_1,\phi_2,\phi_3)^T\in C([-\tau,0],R^3_+)$, 其中 $R^3_+=\{(x_1,x_2,x_3)\in R^3: x_i>0, 1\le i\le 3\}$. x_3 以 x_1 和 x_2 为食物, x_1 和 x_2 是合作关系. $a_1>0$ 和 $a_2>0$ 分别表示 x_1 和 x_2 的生长率. $-a_3>0$ 则表示 x_3 的死亡率. c_{11},c_{22},c_{33} 分别表示物种 x_1,x_2,x_3 内部的竞争系数 (大于零). c_{12} 和 c_{21} 为物种 x_1 和 x_2 的合作关系系数 (大于零). c_{13} 和 c_{23} 代表损失率 (大于零). c_{31} 和 c_{32} 代表俘获率 (大于零). $\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,\tau_5,\tau_6$ 代表时滞 (大于零).

*收稿日期: 2021-10-13 接收日期: 2021-12-21
基金项目: 国家自然科学基金 (11901158; 11771123; 12171247); 南京信息工程大学启动基金资助.
作者简介: 王小焕 (1980–), 女, 讲师, 山东邹城, 主要研究方向: 偏微分方程.
通讯作者: 吕广迎 (1982–), 男, 教授, 山东邹城, 主要研究方向: 随机分析.

考虑到随机扰动

$$a_i \to a_i + \sigma_i \dot{B}_i(t),\ i=1,2,3,$$

其中 $\{B_i(t)\}_{t\geq 0}, i=1,2,3,$ 是定义在具有滤子 $\mathcal{F}_{t\geq 0}$ 的完备概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}\}_{t\geq 0},\mathbb{P})$ 上的标准独立 Wiener 过程, $\sigma_i^2,\ i=1,2,3,$ 代表噪声的强度. 因此, 我们有:

$$\begin{cases} dx_1(t)=x_1(t)[a_1-c_{11}x_1(t)+c_{12}x_2(t-\tau_1)-c_{13}x_3(t-\tau_2)]dt+\sigma_1 x_1(t)dB_1(t), \\ dx_2(t)=x_2(t)[a_2+c_{21}x_1(t-\tau_3)-c_{22}x_2(t)-c_{23}x_3(t-\tau_4)]dt+\sigma_2 x_2(t)dB_2(t), \\ dx_3(t)=x_3(t)[a_3+c_{31}x_1(t-\tau_5)+c_{32}x_2(t-\tau_6)-c_{33}x_3(t)]dt+\sigma_3 x_3(t)dB_3(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

随机模型中, 一般是通过寻求正平衡状态来研究解的平稳分布, 由以往得到的结果知道可通过运用 F-P 方程的显示解法 [1,2]、马尔科夫半群理论法 [3−5]、以及 Lyapunov 函数法 [6−9] 来进行研究. 其中, F-P 方程的显示解法可以解决不具有时滞的模型; 马尔科夫半群理论法需要一个标准测度, 而这样的标准测度有的很难找到; Lyapunov 函数法则需要解的马尔科夫性质, 时滞的模型是不具有这种性质的. 另外, Hu-Wang 所得到结果中的条件需要满足方程系数的线性增长 [10], 时滞的模型是不能满足的. 本文采用的方法则避免了以上提到的问题, 适用于具有时滞的模型, 对种群的动力学分析更具有现实意义.

最近, Liu 等 [11] 研究了接种疫苗和双疾病的随机时滞 SIS 传染病模型并且得到了这个模型的阈值. 在文献 [12] 中, Liu 和 Jiang 考虑了一类具有不完善疫苗接种的随机分阶进展 HIV 模型的平稳分布. 随机传染病模型的长期行为是一个重要的问题. 一类具有分布时滞和非线性扰动的随机逻辑斯蒂方程的长时间行为已经由 Liu 等 [13] 所研究. 此外, 具有时滞的三物种模型也已得到研究 [14]. 近来, Liu-Fan[15] 建立了一类具有时滞的三物种随机级联捕食 - 被捕食系统的平稳分布. 关于平稳分布, 见参考文献 [16-18].

在证明的过程中, 需要以下的引理

引理 1.1[19] 令 $g(t)\in C[\Omega\times[0,+\infty),R_+]$,

(1) 如果存在两个正常数 T 和 λ_0 使得对于所有的 $t\geq T$,

$$\ln g(t)\leq \lambda t-\lambda_0\int_0^t g(s)ds+\sum_{i=1}^n \alpha_i B_i(t),$$

那么, 我们有

$$\begin{cases} \overline{g}^*=\limsup\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t g(s)ds\leq \frac{\lambda}{\lambda_0}\ \ a.s., \qquad \lambda\geq 0, \\ \lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=0\ \ a.s., \qquad \lambda<0. \end{cases} \tag{1.2}$$

(2) 如果存在三个正常数 T , λ 和 λ_0 使得对于所有的 $t\geq T$,

$$\ln g(t)\geq \lambda t-\lambda_0\int_0^t g(s)ds+\sum_{i=1}^n \alpha_i B_i(t),$$

那么, 有

$$\overline{g}_*=\liminf_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t g(s)ds\geq \frac{\lambda}{\lambda_0},\ \ a.s.$$

引理 1.2[20] 令 μ 是关于 P_t 的不变测度, 其中 $t\geq 0$. 假定在弱意义下, 下面极限成立

$$\lim_{t\to+\infty} P_t(x,\cdot)=\mu \quad x\in E,$$

则 μ 是强混合的.

引理 1.3[21] 假定 $y=y(x)\in(a,b)$ 和 $y=Y(x)\in(a,b)$ 分别是以下两个方程的解

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=f(x,y), \\ y(x,0)=y_0, \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \frac{dY}{dx}=F(x,Y), \\ y(x,0)=y_0, \end{cases}$$

其中, $f(x,y)$ 和 $F(x,y)$ 是连续的且满足局部 Lipschitz 条件, 并且 $(x_0,y_0)\in R\times R$. 若 $f(x,y)<F(x,y)$, 则有 $y(x)<Y(x),\ x_0<x<b$; $y(x)>Y(x),\ a<x<x_0$.

引理 1.4[22] 假定 $n\geq 2$, 那么以下等式成立:

$$\sum_{i,j=1}^{n} m_i a_{ij} G_i(x_i)=\sum_{i,j=1}^{n} m_i a_{ij} G_j(x_j),$$

其中 $G_i(x_i)$ 是任意的函数, $1\leq i\leq n$.

引理 1.5[20] 若 $\mu\in\mathcal{M}_1(E)$ 是半群 $P_t,\ t>0$ 的唯一不变测度, 那么 μ 是遍历的.

引理 1.6[20] 假定 $\varphi\in L^2(E,\mu)$, 则存在 $\eta^*\in L^2(\Omega_1,\mathcal{F}_1,\mathbb{P}_1)$ 使得在 $L^2(\Omega_1,\mathcal{F}_1,\mathbb{P}_1)$ 有

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(Z(s))ds=\eta^*,\quad \mathbb{P}_1-a.s.$$

此外, 若 μ 是遍历的, 则

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(Z(s))ds=\int_E \varphi(x)\mu(dx)=\langle\mu,\varphi\rangle,\quad \mathbb{P}_1-a.s.$$

为方便本文中的计算, 我们有以下定义:

$$\begin{aligned}
b_i&=a_i-\frac{\sigma_i^2}{2}, & \Gamma&=c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21},\\
\Gamma_1&=a_1c_{22}+a_2c_{12}, & \tilde{\Gamma}_1&=(c_{22}\sigma_1^2+c_{12}\sigma_2^2)/2,\\
\Gamma_2&=a_1c_{21}+a_2c_{11}, & \tilde{\Gamma}_2&=(c_{21}\sigma_1^2+c_{11}\sigma_2^2)/2,\\
\Gamma_3&=a_2c_{33}-a_3c_{23}, & \tilde{\Gamma}_3&=(c_{33}\sigma_2^2-c_{23}\sigma_3^2)/2,\\
\Gamma_4&=a_3c_{22}+a_2c_{32}, & \tilde{\Gamma}_4&=(c_{22}\sigma_3^2+c_{32}\sigma_2^2)/2,\\
\Gamma_5&=a_1c_{33}-a_3c_{13}, & \tilde{\Gamma}_5&=(c_{33}\sigma_1^2-c_{13}\sigma_3^2)/2,\\
\Gamma_6&=a_3c_{11}+a_1c_{31}, & \tilde{\Gamma}_6&=(c_{11}\sigma_3^2+c_{31}\sigma_1^2)/2,
\end{aligned}$$

$$\overline{f(t)}=\frac{1}{t}\int_0^t f(s)ds,\ f^*=\limsup_{t\to\infty} f(t),\ f_*=\liminf_{t\to\infty} f(t);$$

以及

$$\Lambda = \begin{vmatrix} c_{11} & -c_{12} & c_{13} \\ -c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ -c_{31} & -c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}.$$

Λ_i 表示 Λ 中第 i 列用 $(a_1, a_2, a_3)^T$ 代替, $\tilde{\Lambda}_i$ 表示 Λ 中第 i 列用 $(\frac{\sigma_1^2}{2}, \frac{\sigma_2^2}{2}, \frac{\sigma_3^2}{2})^T$ 代替, 其中 $i = 1, 2, 3$. 可以很容易得到

$$\Gamma_1 > 0,\ \tilde{\Gamma}_1 > 0,\ \Gamma_2 > 0,\ \tilde{\Gamma}_2 > 0,\ \Gamma_3 > 0,\ \tilde{\Gamma}_4 > 0,\ \Gamma_5 > 0,\ \tilde{\Gamma}_6 > 0.$$

假设

$$c_{11} > c_{12} + c_{13},\ c_{22} > c_{21} + c_{23},\ c_{33} > c_{31} + c_{32}. \tag{1.3}$$

2 解的存在性和唯一性

在这一节中，我们将建立解的存在唯一性.

引理 2.1 给定任意的初始值 $(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in C([-\tau, 0], R_+^3)$, 模型 (1.1) 几乎处处有唯一全局解 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T \in R_+^3$.

证 令 $z_i(t) = \ln x_i(t)$. 由 Itô's 公式以及 (1.1), 可以得到

$$\begin{cases} dz_1(t) = [b_1 - c_{11}e^{z_1(t)} + c_{12}e^{z_2(t-\tau_1)} - c_{13}e^{z_3(t-\tau_2)}] + \sigma_1 dB_1(t), \\ dz_2(t) = [b_2 + c_{21}e^{z_1(t-\tau_3)} - c_{22}e^{z_2(t)} - c_{23}e^{z_3(t-\tau_4)}] + \sigma_2 dB_2(t), \\ dz_3(t) = [b_3 + c_{31}e^{z_1(t-\tau_5)} + c_{32}e^{z_2(t-\tau_6)} - c_{33}e^{z_3(t)}] + \sigma_3 dB_3(t), \end{cases} \tag{2.1}$$

则 $z_i(\theta) = \ln \phi_i(\theta), \theta \in [-\tau, 0],\ i = 1, 2, 3$. 很显然, 这是满足局部 Lipschitz 条件. 那么我们根据存在性和唯一性定理可以知道 (2.1) 在区间 $[0, \tau_e)$ 有一个局部解 z_t, 这里 τ_e 是爆破时刻. 也就是说, $x(t) = (e^{z_1(t)}, e^{z_2(t)}, e^{z_3(t)})^T$ 是 (1.1) 的唯一局部正解.

接下来我们要证明这个解是全局的. 换句话说, 我们需要证明 $\tau_e = +\infty$. 我们可以考虑如下模型:

$$\begin{cases} dy_1(t) = y_1(t)[a_1 - c_{11}y_1(t)]dt + \sigma_1 y_1(t)dB_1(t), \\ dy_2(t) = y_2(t)[a_2 + c_{21}y_1(t-\tau_3) - c_{22}y_2(t)]dt + \sigma_2 y_2(t)dB_2(t), \\ dy_3(t) = y_3(t)[a_3 + c_{31}y_1(t-\tau_5) + c_{32}y_2(t-\tau_6) - c_{33}y_3(t)]dt + \sigma_3 y_3(t)dB_3(t), \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $y_i(\theta) = \phi_i(\theta) > 0,\ \theta \in [-\tau, 0],\ i = 1, 2, 3$. 根据引理 1.3 我们可以得到 $t \in [0, \tau_e)$ 时,

$$x_i(t) \le y_i(t),\quad a.s.,\quad i = 1, 2, 3. \tag{2.3}$$

下面, 考虑 (2.2) 中的 $y_i(t),\ i = 1, 2, 3$.

$$\begin{cases} dy_1(t) = y_1(t)[a_1 - c_{11}y_1(t)]dt + \sigma_1 y_1(t)dB_1(t), \\ y_1(0) = \phi_1(0), \end{cases}$$

令 $u_1(t)=\ln y_1(t)$, 通过运用 Itô's 公式可以得到

$$du_1(t)=[b_1-c_{11}e^{u_1(t)}]dt+\sigma_1 dB_1(t).$$

令 $v_1(t)=u_1(t)-\sigma_1B_1(t)$, 再次运用 Itô's 公式可以得到

$$dv_1(t)=[b_1-c_{11}e^{v_1(t)+\sigma_1B_1(t)}]dt.$$

再令 $w_1(t)=v_1(t)-b_1t$, 我们可以得到 $w_1^{'}(t)=v_1^{'}(t)-b_1$. 简单计算可得

$$de^{-w_1(t)}=c_{11}e^{\sigma_1B_1(t)+b_1t},$$

对上面式子的左右两端同时从 0 到 t 进行积分可得:

$$e^{-w_1(t)}-e^{-w_1(0)}=c_{11}\int_0^t e^{\sigma_1B_1(s)+b_1s}ds.$$

又因为 $e^{-w_1(t)}=e^{-\ln y_1(t)+\sigma_1B_1(t)+b_1t}$, $e^{-w_1(0)}=\phi_1(0)^{-1}$, 因此, 可以得到

$$y_1(t)=\frac{e^{\sigma_1B_1(t)+b_1t}}{\phi_1(0)^{-1}+c_{11}\int_0^t e^{\sigma_1B_1(s)+b_1s}ds}.$$

那么, 运用同样的方法我们可以得到

$$y_2(t)=\frac{e^{\sigma_2B_2(t)+b_2t+c_{21}\int_0^t y_1(s-\tau_3)ds}}{\phi_2(0)^{-1}+c_{22}\int_0^t e^{\sigma_2B_2(s)+b_2s+c_{21}\int_0^s y_1(u-\tau_3)du}ds},$$

$$y_3(t)=\frac{e^{\sigma_3B_3(t)+b_3t+c_{31}\int_0^t y_1(s-\tau_5)ds+c_{32}\int_0^t y_2(s-\tau_6)ds}}{\phi_3(0)^{-1}+c_{33}\int_0^t e^{\sigma_3B_3(s)+b_3s+c_{31}\int_0^s y_1(u-\tau_5)du+c_{32}\int_0^s y_2(u-\tau_6)du}ds}.$$

因此, 当 $t\geq 0$ 时, $y_i(t),\ i=1,2,3$ 是存在的. 也就是说 $\tau_e=+\infty$.

注 利用文献 [23], 我们可以得到

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln x_i(t)<0\quad a.s.,\quad i=1,2,3, \tag{2.4}$$

并且存在一个正常数 K 使得下式成立

$$\limsup_{t\to\infty}E(x_i(t))\leq K,\quad i=1,2,3. \tag{2.5}$$

3 物种的生存性和灭绝性

引理 3.1 对于模型 (2.2) 而言,

(1) 若 $b_i<0,\ i=1,2,3$, 则

$$\lim_{t\to+\infty}y_i(t)=0,\quad a.s.,\quad i=1,2,3;$$

(2) 若 $b_1 \geq 0,\ b_2 + \frac{b_1 c_{21}}{c_{11}} < 0,\ b_3 + \frac{b_1 c_{31}}{c_{11}} < 0$, 则

$$\lim_{t\to+\infty} \overline{y_1(t)} = \frac{b_1}{c_{11}}, \quad \lim_{t\to+\infty} y_i(t) = 0, \quad a.s., \quad i = 2, 3;$$

(3) 若 $b_1 \geq 0,\ b_2 + \frac{b_1 c_{21}}{c_{11}} \geq 0,\ b_3 + \frac{b_1 c_{31}}{c_{11}} + \frac{b_2 + \frac{b_1 c_{21}}{c_{11}}}{c_{22}} c_{32} < 0$, 则

$$\lim_{t\to+\infty} \overline{y_1(t)} = \frac{b_1}{c_{11}}, \quad \lim_{t\to+\infty} \overline{y_2(t)} = \frac{b_2 + \frac{b_1 c_{21}}{c_{11}}}{c_{22}}, \quad \lim_{t\to+\infty} y_3(t) = 0, \quad a.s.;$$

(4) 若 $b_1 \geq 0,\ b_2 + \frac{b_1 c_{21}}{c_{11}} \geq 0,\ b_3 + \frac{b_1 c_{31}}{c_{11}} + \frac{b_2 + \frac{b_1 c_{21}}{c_{11}}}{c_{22}} c_{32} \geq 0$, 则

$$\lim_{t\to+\infty} \overline{y_1(t)} = \frac{b_1}{c_{11}}, \quad \lim_{t\to+\infty} \overline{y_1(t)} = \frac{b_2 + \frac{b_1 c_{21}}{c_{11}}}{c_{22}},$$

$$\lim_{t\to+\infty} \overline{y_3(t)} = \frac{b_3 + \frac{b_1 c_{31}}{c_{11}} + \frac{b_2 + \frac{b_1 c_{21}}{c_{11}}}{c_{22}} c_{32}}{c_{33}}, \quad a.s.;$$

(5) 若 $b_1 < 0,\ b_2 \geq 0,\ b_3 + \frac{b_2 c_{32}}{c_{22}} \geq 0$, 则

$$\lim_{t\to+\infty} y_1(t) = 0, \ \lim_{t\to+\infty} \overline{y_2(t)} = \frac{b_2}{c_{22}}, \ \lim_{t\to+\infty} \overline{y_3(t)} = \frac{b_3 + \frac{b_2 c_{32}}{c_{22}}}{c_{33}}, \quad a.s.;$$

(6) 若 $b_1 \geq 0,\ b_2 + \frac{b_1 c_{21}}{c_{11}} < 0,\ b_3 + \frac{b_1 c_{31}}{c_{11}} \geq 0$, 则

$$\lim_{t\to+\infty} \overline{y_1(t)} = \frac{b_1}{c_{11}}, \ \lim_{t\to+\infty} y_2(t) = 0, \ \lim_{t\to+\infty} \overline{y_3(t)} = \frac{b_3 + \frac{b_1 c_{31}}{c_{11}}}{c_{33}}, \quad a.s.;$$

(7) 若 $b_1 < 0,\ b_2 \geq 0,\ b_3 + \frac{b_2 c_{32}}{c_{22}} < 0$, 则

$$\lim_{t\to+\infty} y_1(t) = 0, \ \lim_{t\to+\infty} \overline{y_2(t)} = \frac{b_2}{c_{22}}, \ \lim_{t\to+\infty} y_3(t) = 0, \quad a.s.$$

证 对模型 (2.2) 运用 Itô's 公式并从 0 到 t 进行积分, 再除以 t 可以得到

$$t^{-1} \ln \frac{y_1(t)}{y_1(0)} = b_1 - c_{11}\overline{y_1(t)} + t^{-1}\sigma_1 B_1(t), \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} t^{-1} \ln \frac{y_2(t)}{y_2(0)} = {} & b_2 + c_{21}\overline{y_1(t)} - t^{-1} c_{21}\Big[\int_{t-\tau_3}^{t} y_1(s)ds - \int_{-\tau_3}^{0} y_1(s)ds\Big] \\ & - c_{22}\overline{y_2(t)} + t^{-1}\sigma_2 B_2(t), \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} t^{-1} \ln \frac{y_3(t)}{y_3(0)} = {} & b_3 + c_{31}\overline{y_1(t)} - t^{-1} c_{31}\Big[\int_{t-\tau_5}^{t} y_1(s)ds - \int_{-\tau_5}^{0} y_1(s)ds\Big] \\ & + c_{32}\overline{y_2(t)} - t^{-1} c_{32}\Big[\int_{t-\tau_6}^{t} y_2(s)ds - \int_{-\tau_6}^{0} y_2(s)ds\Big] \\ & - c_{33}\overline{y_3(t)} + t^{-1}\sigma_3 B_3(t). \end{aligned} \tag{3.3}$$

(1) 由 (3.1) 以及引理 1.1 可得 $\lim_{t\to+\infty} y_1(t) = 0$ 几乎处处成立. 因此我们有, 对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $T > 0$, 当 $t > T$ 时使得

$$\overline{y_1(t)} \leq \frac{\epsilon}{c_{21}},$$

代入 (3.2), 则有

$$\begin{aligned} t^{-1}\ln\frac{y_2(t)}{y_2(0)} &\leq b_2 + c_{21}\overline{y_1(t)} - c_{22}\overline{y_2(t)} + t^{-1}\sigma_2 B_2(t) \\ &\leq b_2 + \epsilon - c_{22}\overline{y_2(t)} + t^{-1}\sigma_2 B_2(t), \end{aligned}$$

其中, t 足够大并且 ϵ 足够小使得 $0 < \epsilon < -b_2$, 由引理 1.1 可得 $\lim_{t\to+\infty} y_2(t) = 0$ 几乎处处成立. 同理得 $\lim_{t\to+\infty} y_3(t) = 0$ 几乎处处成立.

(2) 由 (3.1) 以及引理 1.1 可得

$$\overline{y_1}^* = \limsup_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t y_1(s)ds \leq \frac{b_1}{c_{11}}, \quad \overline{y_1}_* = \liminf_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t y_1(s)ds \geq \frac{b_1}{c_{11}}, \quad a.s.,$$

也就是说

$$\lim_{t\to+\infty}\overline{y_1(t)} = \frac{b_1}{c_{11}}, \quad a.s.$$

因此，有

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1}\int_{t-\tau_3}^t y_1(s)ds = \lim_{t\to+\infty} t^{-1}\left[\int_0^t y_1(s)ds - \int_0^{t-\tau_3} y_1(s)ds\right] = 0, \quad a.s.$$

对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $T > 0$, 当 $t > T$ 时使得

$$\overline{y_1(t)} \leq \frac{b_1}{c_{11}} + \frac{\epsilon}{2c_{21}}, \quad t^{-1}\left[\int_{t-\tau_3}^t y_1(s)ds - \int_{-\tau_3}^0 y_1(s)ds\right] \geq -\frac{\epsilon}{2c_{21}},$$

把上面的式子代入 (3.2) 有

$$t^{-1}\ln\frac{y_2(t)}{y_2(0)} \leq b_2 + \frac{b_1 c_{21}}{c_{11}} + \epsilon - c_{22}\overline{y_2(t)} + t^{-1}\sigma_2 B_2(t), \tag{3.4}$$

其中 ϵ 足够小使得 $0 < \epsilon < -b_2 - \frac{b_1 c_{21}}{c_{11}}$, 引理 1.1 暗含了 $\lim_{t\to+\infty} y_2(t) = 0$ 几乎处处成立. 则对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $T > 0$, 当 $t > T$ 时使得

$$\begin{aligned} &\overline{y_1(t)} \leq \frac{b_1}{c_{11}} + \frac{\epsilon}{4c_{31}}, \quad t^{-1}\left[\int_{t-\tau_6}^t y_2(s)ds - \int_{-\tau_6}^0 y_2(s)ds\right] \geq -\frac{\epsilon}{4c_{32}}, \\ &t^{-1}\left[\int_{t-\tau_5}^t y_1(s)ds - \int_{-\tau_5}^0 y_1(s)ds\right] \geq -\frac{\epsilon}{4c_{31}}, \ \overline{y_2(t)} \leq \frac{\epsilon}{4c_{32}}, \end{aligned}$$

把上面的式子代入 (3.3) 有

$$t^{-1}\ln\frac{y_3(t)}{y_3(0)} \leq b_3 + \frac{b_1 c_{31}}{c_{11}} + \epsilon - c_{33}\overline{y_3(t)} + t^{-1}\sigma_3 B_3(t),$$

其中, ϵ 足够小使得 $0<\epsilon<-b_3-\frac{b_1c_{31}}{c_{11}}$, 由于引理 1.1 得到

$$\lim_{t\to+\infty} y_3(t)=0,\quad a.s.$$

(3) 由上面的结果可知

$$\lim_{t\to+\infty}\overline{y_1(t)}=\frac{b_1}{c_{11}},\quad a.s.$$

因为 $b_2+\frac{b_1c_{21}}{c_{11}}\geq 0$, (3.4) 以及引理 1.1, 则有

$$\overline{y_2}^*=\limsup_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t y_2(s)ds\leq\frac{b_2+\frac{b_1c_{21}}{c_{11}}+\epsilon}{c_{22}},\quad a.s.,$$

又由于 ϵ 的任意性得到

$$\overline{y_2}^*=\limsup_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t y_2(s)ds\leq\frac{b_2+\frac{b_1c_{21}}{c_{11}}}{c_{22}},\quad a.s.$$

若 $b_2+\frac{b_1c_{21}}{c_{11}}=0$, 则

$$\lim_{t\to+\infty}\overline{y_2(t)}=\frac{b_2+\frac{b_1c_{21}}{c_{11}}}{c_{22}}=0,\quad a.s.$$

若 $b_2+\frac{b_1c_{21}}{c_{11}}>0$, 由极限的定义，类似于 (2) 的证明，借助于引理 1.1 我们有

$$\overline{y_2}_*=\liminf_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t y_2(s)ds\geq\frac{b_2+\frac{b_1c_{21}}{c_{11}}}{c_{22}},\quad a.s.$$

从而可得

$$\lim_{t\to+\infty}\overline{y_2(t)}=\frac{b_2+\frac{b_1c_{21}}{c_{11}}}{c_{22}},\quad a.s.,$$

则对于任意的 $\epsilon>0$, 存在 $T>0$, 当 $t>T$ 时使得

$$\begin{aligned}&\overline{y_1(t)}\leq\frac{b_1}{c_{11}}+\frac{\epsilon}{4c_{31}},\quad t^{-1}\left[\int_{t-\tau_5}^t y_1(s)ds-\int_{-\tau_5}^0 y_1(s)ds\right]\geq-\frac{\epsilon}{4c_{31}},\\&\overline{y_2(t)}\leq\frac{b_2+\frac{b_1c_{21}}{c_{11}}}{c_{22}}+\frac{\epsilon}{4c_{32}},\quad t^{-1}\left[\int_{t-\tau_6}^t y_2(s)ds-\int_{-\tau_6}^0 y_2(s)ds\right]\geq-\frac{\epsilon}{4c_{32}},\end{aligned}$$

代入到 (3.3) 得到

$$t^{-1}\ln\frac{y_3(t)}{y_3(0)}\quad\leq\quad b_3+\frac{b_1c_{31}}{c_{11}}+\epsilon+\frac{b_2+\frac{b_1c_{21}}{c_{11}}}{c_{22}}c_{32}-c_{33}\overline{y_3(t)}+t^{-1}\sigma_3B_3(t),\tag{3.5}$$

此处 ϵ 足够小使得 $0<\epsilon<-b_3-\frac{b_1c_{31}}{c_{11}}-\frac{b_2+\frac{b_1c_{21}}{c_{11}}}{c_{22}}c_{32}$, 由引理 1 得到 $\lim_{t\to+\infty} y_3(t)=0$ 几乎必然成立.

(4)–(7) 的证明类似于 (3), 我们把细节留给感兴趣的读者. 证毕.

类似地, 我们可得如下的结论.

注 由引理 1.1 我们可以得到, $1 \le i \le 3$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\overline{y_i(t)} = J$, $a.s$, 这里 J 为大于零的常数. 所以, 对于任意的 $\tilde{\tau} \ge 0$, 有

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1}\int_{t-\tilde{\tau}}^{t} y_i(s)ds = \lim_{t\to+\infty} t^{-1}[\int_0^t y_i(s)ds - \int_0^{t-\tilde{\tau}} y_i(s)ds] = 0, \quad a.s.,$$

由于 (2.3), 可得

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1}\int_{t-\tilde{\tau}}^{t} x_i(s)ds = 0, \quad a.s., \quad i = 1,2,3, \ \tilde{\tau} \ge 0. \tag{3.6}$$

引理 3.2 假设 (1.3) 成立, 则对于模型 (1.1) 而言

(1) 若 $b_i < 0, \ i = 1,2,3$, 则

$$\lim_{t\to+\infty} x_i(t) = 0, \quad a.s., \quad i = 1,2,3;$$

(2) 若 $b_1 \ge 0, \ b_2 + \frac{b_1 c_{21}}{c_{11}} < 0, \ b_3 + \frac{b_1 c_{31}}{c_{11}} < 0$, 则

$$\lim_{t\to+\infty} \overline{x_1(t)} = \frac{b_1}{c_{11}}, \quad \lim_{t\to+\infty} x_i(t) = 0, \quad a.s., \quad i = 2,3;$$

(3) 若 $\Lambda_i - \tilde{\Lambda}_i > 0, \ i = 1,2,3$, 则

$$\lim_{t\to+\infty} \overline{x_i(t)} = \frac{\Lambda_i - \tilde{\Lambda}_i}{\Lambda}, \quad a.s., \quad i = 1,2,3;$$

(4) 若 $\Gamma_1 - \tilde{\Gamma}_1 > 0, \ \Gamma_2 - \tilde{\Gamma}_2 > 0, \ \Lambda_3 - \tilde{\Lambda}_3 < 0$, 则

$$\lim_{t\to+\infty} \overline{x_i(t)} = \frac{\Gamma_i - \tilde{\Gamma}_i}{\Gamma}, \quad i = 1,2, \quad \lim_{t\to+\infty} x_3(t) = 0, \quad a.s.;$$

(5) 若 $b_1 < 0, \ b_3 c_{22} + b_2 c_{32} > 0, \ \Gamma_3 - \tilde{\Gamma}_3 > 0$, 则

$$\lim_{t\to+\infty} x_1(t) = 0, \ \lim_{t\to+\infty} \overline{x_2(t)} = \frac{\Gamma_3 - \tilde{\Gamma}_3}{c_{22}c_{33} + c_{23}c_{32}}, \ \lim_{t\to+\infty} \overline{x_3(t)} = \frac{\Gamma_4 - \tilde{\Gamma}_4}{c_{22}c_{33} + c_{23}c_{32}}, \quad a.s.;$$

(6) 若 $b_2 < 0, \ b_3 c_{11} + b_1 c_{31} > 0, \ b_1 c_{33} - b_3 c_{13} > 0$, 则

$$\lim_{t\to+\infty} \overline{x_1(t)} = \frac{\Gamma_5 - \tilde{\Gamma}_5}{c_{11}c_{33} + c_{13}c_{31}}, \ \lim_{t\to+\infty} x_2(t) = 0, \ \lim_{t\to+\infty} \overline{x_3(t)} = \frac{\Gamma_6 - \tilde{\Gamma}_6}{c_{11}c_{33} + c_{13}c_{31}}, \quad a.s.;$$

(7) 若 $b_1 < 0, \ b_3 c_{22} + b_2 c_{32} < 0, \ b_2 \ge 0$, 则

$$\lim_{t\to+\infty} x_1(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} \overline{x_2(t)} = \frac{b_2}{c_{22}}, \quad \lim_{t\to+\infty} x_3(t) = 0, \quad a.s.$$

引理 3.2 的证明类似于引理 3.1, 在此省略.

4 解的遍历平稳分布

引理 4.1 假设 (1.3) 成立, 则模型 (1.1) 是依分布稳定的.

证 假定模型 (1.1) 有两个解, $x(t) = x(t;x(\theta))$ 与 $\tilde{x}(t) = x(t;\tilde{x}(\theta))$, 并且 $x(\theta) \in C([-\tau,0],R_+^3)$, $\tilde{x}(\theta) \in C([-\tau,0],R_+^3)$. 令

$$K=(k_{ij})_{3\times 3}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix},\quad L_K=\begin{pmatrix} c_{12}+c_{13} & -c_{12} & -c_{13}\\ -c_{21} & c_{21}+c_{23} & -c_{23}\\ -c_{31} & -c_{32} & c_{31}+c_{32}\end{pmatrix},$$

且 m_1, m_2, m_3 分别是 L_K 对角元素的代数余子式. 因为 K 是不可约的, 由文献 [2] 可知 $m_i>0$, $i=1,2,3$. 其次, 我们有如下定义

$$\begin{aligned} V(t) \;=\; & \sum_{i=1}^{3} m_i|\ln x_i(t)-\ln\tilde{x}_i(t)| + m_1c_{12}\int_{t-\tau_1}^{t}|x_2(s)-\tilde{x}_2(s)|ds\\ & +m_1c_{13}\int_{t-\tau_2}^{t}|x_3(s)-\tilde{x}_3(s)|ds + m_2c_{21}\int_{t-\tau_3}^{t}|x_1(s)-\tilde{x}_1(s)|ds\\ & +m_2c_{23}\int_{t-\tau_4}^{t}|x_3(s)-\tilde{x}_3(s)|ds + m_3c_{31}\int_{t-\tau_5}^{t}|x_1(s)-\tilde{x}_1(s)|ds\\ & +m_3c_{32}\int_{t-\tau_6}^{t}|x_2(s)-\tilde{x}_2(s)|ds. \end{aligned}$$

通过运用 Itô's 公式得到

$$\begin{aligned} & d^+V(t)\\ \le\; & -m_1c_{11}|x_1(t)-\tilde{x}_1(t)|dt + m_1c_{12}|x_2(t-\tau_1)-\tilde{x}_2(t-\tau_1)|dt\\ & +m_1c_{13}|x_3(t-\tau_2)-\tilde{x}_3(t-\tau_2)|dt + m_2c_{21}|x_1(t-\tau_3)-\tilde{x}_1(t-\tau_3)|dt\\ & -m_2c_{22}|x_2(t)-\tilde{x}_2(t)|dt + m_2c_{23}|x_3(t-\tau_4)-\tilde{x}_3(t-\tau_4)|dt\\ & +m_3c_{31}|x_1(t-\tau_5)-\tilde{x}_1(t-\tau_5)|dt + m_3c_{32}|x_2(t-\tau_6)\\ & -\tilde{x}_2(t-\tau_6)|dt - m_3c_{33}|x_3(t)-\tilde{x}_3(t)|dt\\ & +m_1c_{12}|x_2(t)-\tilde{x}_2(t)|dt - m_1c_{12}|x_2(t-\tau_1)-\tilde{x}_2(t-\tau_1)|dt\\ & +m_1c_{13}|x_3(t)-\tilde{x}_3(t)|dt - m_1c_{13}|x_3(t-\tau_2)-\tilde{x}_3(t-\tau_2)|dt\\ & +m_2c_{21}|x_1(t)-\tilde{x}_1(t)|dt - m_2c_{21}|x_1(t-\tau_3)-\tilde{x}_1(t-\tau_3)|dt\\ & +m_2c_{23}|x_3(t)-\tilde{x}_3(t)|dt - m_2c_{23}|x_3(t-\tau_4)-\tilde{x}_3(t-\tau_4)|dt\\ & +m_3c_{31}|x_1(t)-\tilde{x}_1(t)|dt - m_3c_{31}|x_1(t-\tau_5)-\tilde{x}_1(t-\tau_5)|dt\\ & +m_3c_{32}|x_2(t)-\tilde{x}_2(t)|dt - m_3c_{32}|x_2(t-\tau_6)-\tilde{x}_2(t-\tau_6)|dt\\ =\; & -\sum_{i=1}^{3} m_ic_{ii}|x_i(t)-\tilde{x}_i(t)|dt + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j\neq i} m_ik_{ij}|x_j(t)-\tilde{x}_j(t)|dt. \end{aligned}$$

由引理 1.4 可以得到

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j\neq i} m_i c_{ij}|x_j(t)-\tilde{x}_j(t)| = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j\neq i} m_i c_{ij}|x_i(t)-\tilde{x}_i(t)|.$$

因此

$$\begin{aligned}
& d^+V(t) \\
\leq\ & -\sum_{i=1}^{3} m_i c_{ii}|x_i(t)-\tilde{x}_i(t)|dt + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j\neq i} m_i k_{ij}|x_i(t)-\tilde{x}_i(t)|dt \\
=\ & -m_1(c_{11}-c_{12}-c_{13})|x_1(t)-\tilde{x}_1(t)|dt - m_2(c_{22}-c_{21}-c_{23})|x_2(t)-\tilde{x}_2(t)|dt \\
& -m_3(c_{33}-c_{31}-c_{32})|x_3(t)-\tilde{x}_3(t)|dt.
\end{aligned}$$

将上式的左右两端同时从 0 到 t 进行积分并取期望有

$$\begin{aligned}
E(V(t)) \leq\ & V(0) - m_1(c_{11}-c_{12}-c_{13})\int_0^t E|x_1(s)-\tilde{x}_1(s)|ds \\
& -m_2(c_{22}-c_{21}-c_{23})\int_0^t E|x_{12}(s)-\tilde{x}_2(s)|ds \\
& -m_3(c_{33}-c_{31}-c_{32})\int_0^t E|x_3(s)-\tilde{x}_3(s)|ds,
\end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{aligned}
& m_1(c_{11}-c_{12}-c_{13})\int_0^t E|x_1(s)-\tilde{x}_1(s)|ds + m_2(c_{22}-c_{21}-c_{23})\int_0^t E|x_{12}(s)-\tilde{x}_2(s)|ds \\
& +m_3(c_{33}-c_{31}-c_{32})\int_0^t E|x_3(s)-\tilde{x}_3(s)|ds \leq V(0) < +\infty,
\end{aligned}$$

从而得到

$$E|x_i(t)-\tilde{x}_i(t)| \in L^1[0,+\infty). \tag{4.1}$$

由模型 (1.1) 可以得到

$$\begin{aligned}
E(x_1(t)) =\ & x_1(0) + \int_0^t [a_1E(x_1(s)) - c_{11}E((x_1(s)))^2 \\
& +c_{12}E(x_1(s)x_2(s-\tau_1)) - c_{13}E(x_1(s)x_3(s-\tau_2))]ds,
\end{aligned}$$

也就是说 $E(x_1(t))$ 是可微的. 由 (2.5) 可知

$$\begin{aligned}
\frac{dE(x_1(t))}{dt} =\ & a_1E(x_1(t)) - c_{11}E((x_1(t)))^2 \\
& +c_{12}E(x_1(t)x_2(t-\tau_1)) - c_{13}E(x_1(t)x_3(t-\tau_2)) \\
\leq\ & a_1E(x_1(t)) + c_{12}E(x_1(t)x_2(t-\tau_1)) \\
\leq\ & a_1K + c_{12}E(x_1(t)x_2(t-\tau_1)) \\
\leq\ & D,
\end{aligned}$$

其中 D 是一个正常数. 那么, $E(x_1(t))$ 是一致连续的. 同理得 $E(x_2(t))$ 与 $E(x_3(t))$ 也是一致连续的. 由 (4.1) 知

$$\lim_{t\to+\infty} E|x_i(t)-\tilde{x}_i(t)|=0,\ i=1,2,3. \tag{4.2}$$

设 $\mathbb{P}(R_+^3)$ 是定义在 R_+^3 上的所有概率测度并且 $P(t,x(\theta),Q)$ 是 $x(t;x(\theta))$ 的概率, 其中 $x(t;x(\theta))\in Q$. 对于 $\forall P_1\in\mathbb{P}$, $\forall P_2\in\mathbb{P}$, 我们有如下定义

$$M=\{h:R^3\to R||h(x)-h(y)|\leq\|x-y\|,|h(\cdot)|\leq 1\},$$

$$d_M(P_1,P_2)=\sup_{h\in M}|\int_{R_+^3}h(x)P_1(dx)-\int_{R_+^3}h(x)P_2(dx)|.$$

于是, 有 $\forall h\in M, t>0, s>0$,

$$\begin{aligned}
&|Eh(x(t+s;x(\theta)))-Eh(x(t;x(\theta)))|\\
=\ &|E[E(h(x(t+s;x(\theta)))|\mathcal{F}_s)]-Eh(x(t;x(\theta)))|\\
=\ &|\int_{R_+^3}Eh(\tilde{x}(t;\tilde{x}(\theta)))P(s,x(\theta),d\tilde{x}(\theta))-Eh(x(t;x(\theta)))|\\
\leq\ &\int_{R_+^3}|Eh(\tilde{x}(t;\tilde{x}(\theta)))-Eh(x(t;x(\theta)))|P(s,x(\theta),d\tilde{x}(\theta)).
\end{aligned}$$

又因 (4.2) 有对于任意的 $\epsilon>0$, 存在 $T>0$, 当 $t>T$ 时使得 $\sup_{h\in M}|Eh(\tilde{x}(t;\tilde{x}(\theta)))-Eh(x(t;x(\theta)))|\leq\epsilon$, 因此

$$|Eh(x(t+s;x(\theta)))-Eh(x(t;x(\theta)))|\leq\epsilon.$$

由 h 的任意性可知

$$\sup_{h\in M}|Eh(x(t+s;x(\theta)))-Eh(x(t;x(\theta)))|\leq 3\epsilon.$$

换言之, 对于 $\forall t\geq T$, $s>0$ 有

$$d_M(P(t+s,x(\theta),\cdot),P(t,x(\theta),\cdot))\leq\epsilon,$$

也就是 $\{P(t,x(\theta),\cdot)\}$ 在 $\mathbb{P}(R_+^3)$ 中是 Cauchy 列. 从而 $\xi(\theta)=(\xi_1(\theta),\xi_2(\theta),\xi_3(\theta))^T$, $\xi_i(\theta)\equiv 0.1$, $\theta\in[-\tau,0)$, $\{P(t,\xi(\theta),\cdot)\}$ 也是 Cauchy 列. 因此 $\exists\,!\ \mu(\cdot)\in\mathbb{P}(R_+^3)$ 使得

$$\lim_{t\to+\infty}d_M(P(t,\xi(\theta),\cdot),\mu(\cdot))=0. \tag{4.3}$$

因 (4.2) 可知

$$\lim_{t\to+\infty}d_M(P(t,x(\theta),\cdot),P(t,\xi(\theta),\cdot))=0.$$

因此, 可以得到

$$
\begin{aligned}
& \lim_{t\to+\infty} d_M(P(t,x(\theta),\cdot),\mu(\cdot)) \\
\le\ & \lim_{t\to+\infty} d_M(P(t,x(\theta),\cdot),P(t,\xi(\theta),\cdot)) + \lim_{t\to+\infty} d_M(P(t,\xi(\theta),\cdot),\mu(\cdot)) \\
=\ & 0.
\end{aligned}
$$

即得证.

定理 4.1 对于模型 (1.1) 而言, 假设 (1.3) 成立有

(1) 若 $b_i<0,\ i=1,2,3$, 则 $x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)$ 是灭绝的.

(2) 若 $b_1\ge 0,\ b_2+\frac{b_1c_{21}}{c_{11}}<0,\ b_3+\frac{b_1c_{31}}{c_{11}}<0$, 则 $x_2(t)$ 和 $x_3(t)$ 是灭绝的, $x_1(t)$ 的分布弱收敛到唯一的遍历不变分布 ν_1, 且有

$$\lim_{t\to+\infty}\overline{x_1(t)}=\int_{R_+} z_1\nu_1(dz_1)=\frac{b_1}{c_{11}},\quad a.s.;$$

(3) 若 $\Lambda_i-\tilde{\Lambda}_i>0,\ i=1,2,3$, 则 $(x_1(t),x_2(t),x_3(t))^T$ 的分布弱收敛到唯一的遍历不变分布 ν_2, 且有

$$\lim_{t\to+\infty}\overline{x_i(t)}=\int_{R_+^3} z_i\nu_2(dz_1,dz_2,dz_3)=\frac{\Lambda_i-\tilde{\Lambda}_i}{\Lambda},\quad a.s.,\quad i=1,2,3;$$

(4) 若 $\Gamma_1-\tilde{\Gamma}_1>0,\ \Gamma_2-\tilde{\Gamma}_2>0,\ \Lambda_3-\tilde{\Lambda}_3<0$, 则 $x_3(t)$ 灭绝, $(x_1(t),x_2(t))^T$ 的分布弱收敛到唯一的遍历不变分布 ν_3, 且有

$$\lim_{t\to+\infty}\overline{x_i(t)}=\int_{R_+^2} z_i\nu_3(dz_1,dz_2)=\frac{\Gamma_i-\tilde{\Gamma}_i}{\Gamma},\quad a.s.,\quad i=1,2;$$

(5) 若 $b_1<0,\ b_3c_{22}+b_2c_{32}>0,\ \Gamma_3-\tilde{\Gamma}_3>0$, 则 $x_1(t)$ 灭绝, $(x_2(t),x_3(t))^T$ 的分布弱收敛到唯一的遍历不变分布 ν_4, 且有

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}\overline{x_2(t)}&=\int_{R_+^2} z_2\nu_4(dz_2,dz_3)=\frac{\Gamma_3-\tilde{\Gamma}_3}{c_{22}c_{33}+c_{23}c_{32}},\quad a.s.,\\
\lim_{t\to+\infty}\overline{x_3(t)}&=\int_{R_+^2} z_3\nu_4(dz_2,dz_3)=\frac{\Gamma_4-\tilde{\Gamma}_4}{c_{22}c_{33}+c_{23}c_{32}},\quad a.s.;
\end{aligned}
$$

(6) 若 $b_2<0,\ b_3c_{11}+b_1c_{31}>0,\ b_1c_{33}-b_3c_{13}>0$, 则 $x_2(t)$ 灭绝, $(x_1(t),x_3(t))^T$ 的分布弱收敛到唯一的遍历不变分布 ν_5, 且有

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty}\overline{x_1(t)}&=\int_{R_+^2} z_1\nu_5(dz_1,dz_3)=\frac{\Gamma_5-\tilde{\Gamma}_5}{c_{11}c_{33}+c_{13}c_{31}},\quad a.s.,\\
\lim_{t\to+\infty}\overline{x_3(t)}&=\int_{R_+^2} z_3\nu_5(dz_1,dz_3)=\frac{\Gamma_6-\tilde{\Gamma}_6}{c_{11}c_{33}+c_{13}c_{31}},\quad a.s.;
\end{aligned}
$$

(7) 若 $b_1<0$, $b_3c_{22}+b_2c_{32}<0$, $b_2\geq 0$, 则 $x_1(t)$ 和 $x_3(t)$ 是灭绝的, $x_2(t)$ 的分布弱收敛到唯一的遍历不变分布 ν_6, 且有

$$\lim_{t\to+\infty}\overline{x_2(t)}=\int_{R_+}z_2\nu_6(dz_2)=\frac{b_2}{c_{22}},\quad a.s.;$$

证 (1) 可以由引理 3.2 中 (1) 得出.

(2) 可以由引理 3.2 中 (2) 得出. 此外, 由模型 (1.1) 是平稳分布知存在一个概率测度 ν_1 使得 $x_1(t)$ 的分布弱收敛到 ν_1. 又由 $|\int_{R_+}\varphi(x)p(t,x(\theta),dx_1)-\int_{R_+}\varphi(x)\nu_1(dx_1)|\to 0$, 可知 $\langle\varphi,P\circ x(\theta)\rangle\to\langle\varphi,\nu_1\rangle$, 则 ν_1 是不变的. 根据引理 1.2 知 ν_1 是强混合的. 又由引理 1.5 知 ν_1 是遍历的. 最后根据引理 1.6 得到

$$\lim_{t\to+\infty}\overline{x_1(t)}=\int_{R_+}z_1\nu_1(dz_1),\quad a.s.;$$

同 (2) 的证明过程我们可以得到 (3),(4),(5),(6),(7) 的证明.

参 考 文 献

[1] Beddington J R, May R M. Harvesting natural populations in a randomly fluctuating environment[J]. Science, 1977, 197(4302): 463–465.

[2] Pasquali S. The stochastic logistic equation : stationary solutions and their stability[J]. Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 2001, 106: 165–183.

[3] Rudnicki R. Long-time behaviour of a stochastic prey-predator model[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2003, 108(1): 93–107.

[4] Rudnicki R, Pichor K. Influence of stochastic perturbation on prey-predator systems[J]. Mathematical Biosciences, 2007, 206(1): 108–119.

[5] Zhang Q, Jiang D. The coexistence of a stochastic Lotka-Volterra model with two predators competing for one prey[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 269: 288–300.

[6] Ji C, Jiang D. Dynamics of a stochastic density dependent predator – prey system with Beddington – DeAngelis functional response[J]. J. Math. Anal. Appl., 2011, 381(1): 441–453.

[7] Ji C, Jiang D, Li X, et al. Analysis of autonomous Lotka – Volterra competition systems with random perturbation[J]. J. Math. Anal. Appl., 2012, 390(2): 582–595.

[8] Zhao Y, Yuan S, Ma J. Survival and stationary distribution analysis of a stochastic competitive model of three species in a polluted environment[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2015, 77(7): 1285–1326.

[9] Zou X, Fan D, Wang K. Stationary distribution and stochastic Hopf bifurcation for a predator-prey system with noises[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-series B, 2013, 18(5): 1507–1519.

[10] Hu G, Wang K. Stability in distribution of neutral stochastic functional differential equations with Markovian switching[J]. J. Math. Anal. Appl., 2012, 385(2): 757–769.

[11] Liu Q, Jiang D, Hayat T, et al. Threshold behavior in a stochastic delayed SIS epidemic model with vaccination and double diseases[J]. J. Franklin Institute, 2019, 356(13): 7466–7485.

[12] Liu Q, Jiang D. Stationary distribution of a stochastic staged progression HIV model with imperfect vaccination[J]. Physica A, 2019, 527(1) 12127.

[13] Liu Q, Jiang D, Hayat T, Alsaedi A. Long-time behavior of a stochastic logistic equation with distributed delay and nonlinear perturbation[J]. Physica A, 2018, 508: 289–304.

[14] Erbe L, Freedman H, Rao V. Three-species food-chain models with mutual interference and time delays[J]. Mathematical Biosciences, 1986, 80(1): 57–80.

[15] Liu M, Fan M. Stability in distribution of a three-species stochastic cascade predator-prey system with time delays[J]. IMA J. Appl. Math., 2017, 82(2): 396–423.

[16] Wang Y, Wu F, Mao X. Stability in distribution of stochastic functional differential equations[J]. Systems and Control Letters, 2019, 132, 104513.

[17] Yuan C, Mao X. Asymptotic stability in distribution of stochastic differential equations with Markovian switching[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 2003, 103(2): 277–291.

[18] Zang Y, Hou P, Tian Y. Stability in distribution of stochastic Lotka – Volterra delay system under regime switching[J]. Stochastics and Dynamics, 2017, 18(05), 1850041.

[19] Liu M, Wang K, Wu Q. Survival analysis of stochastic competitive models in a polluted environment and stochastic competitive exclusion principle[J]. Bull. Math. Biology, 2011, 73(9): 1969–2012.

[20] Prato G Da, Zabczyk J. Ergodicity for infinite dimensional systems[M]. Cambridge: Cambridge University Press. 1996.

[21] 马知恩, 周义仓, 李承治. 常微分方程定性与稳定性方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2015.

[22] Li M, Shuai Z. Global-stability problem for coupled systems of differential equations on networks[J]. J. Differential Equations, 2010, 248(1): 1–20.

[23] Hung L. Stochastic delay population systems[J]. Appl. Anal., 2009, 88(9): 1303–1320.

STOCHASTIC DYNAMICS ANALYSIS OF COOPERATIVE PREDATOR-PREY MODEL WITH TIME DELAY

WANG Xiao-huan[1] , LV Guang-ying[1] , YANG Ya-nan[2]

(*1.College of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China*)

(*2.School of Mathematics and Statistics, Henan University, Kaifeng 475001, China*)

Abstract: In this paper, a three species model with time delay is studied, in which one species feeds on the other two cooperative species. Firstly, using comparison principle and stochastic analysis theory, the criteria of stationary distribution is established. Secondly, sufficient conditions for the survival or extinction of species are given by using the assumptions on initial data and comparison principle. Finally, combining matrix theory, the stationary distribution of solutions is obtained and weakly converges to a unique ergodic invariant distribution.

Keywords: predator-prey model; stationary distribution; Itô's formula

2010 MR Subject Classification: 34K50; 60H10