Vol. 42 (2022)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

关于亚纯函数微分多项式唯一性问题

刘登峰, 潘 飚

(福建师范大学数学与统计学院, 福建 福州 350117)

摘 要: 本文利用 Nevanlinna 理论与多项式加权和的概念, 研究了两个亚纯函数关于微分多项式的唯一性问题, 得到了一类亚纯函数微分多项式在分担值下的唯一性定理, 所得到的结果推广了 An V H, Khoai H H, Chao M 等人的结果.

关键词: 亚纯函数; 微分多项式; 唯一性

MR(2010) **主题分类号:** 30D30; 30D35 **中图分类号:** O174.52

文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2022)06-0533-16

1 引言

本文中的亚纯函数均指复平面上的亚纯函数. 设 f 是非常数亚纯函数, 采用亚纯函数唯一性理论中的一些基本记号和结论 [1−2], 如 $T(r,f)$, $N(r,f)$, $\overline{N}(r,f)$, $m(r,f)$ 等. 令 $S(r,f)$ 表示任意满足 $S(r,f)=o\{T(r,f)\}$ $(r\to+\infty, r\notin E)$ 的量, 其中 E 是一个有穷线性测度的集合, $S(r,f)$ 每次出现时 E 可能不相同. 若对亚纯函数 a, 有 $T(r,a)=S(r,f)$, 则称 a 为 f 的一个小函数. $N_k\left(r,\frac{1}{f}\right)$ 表示 f 的零点的计数函数, 其中当 f 的零点重数 $m\le k$ 时, 计 m 次; 当 $m>k$ 时, 计 k 次. $N_{k)}\left(r,\frac{1}{f}\right)$ 表示 $f-a$ 的零点重数 $m\le k$ 的计数函数, $N_{(k}\left(r,\frac{1}{f}\right)$ 表示 $f-a$ 的零点重数 $m\ge k$ 的计数函数.

下面我们介绍由 Lahiri I [3−4] 引进的权分担记号.

定义 1.1 设 f, g 是两个非常数亚纯函数, $a\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, k 为一正整数或 ∞. $E_k(a,f)$ 表示 $f-a$ 的所有零点, 若零点重数 $m\le k$ 时, 计 m 次; 若 $m>k$ 时, 计 $k+1$ 次. 若 $E_k(a,f)=E_k(a,g)$, 则称 f 和 g 以权 k 分担 a.

这里记 f 和 g 分担 (a,k) 表示 f 和 g 以权 k 分担 a. 显然若 f 和 g 分担 (a,k), 那么对任意的 p $(0\le p<k)$, p 为整数, 都有 f 和 g 分担 (a,p), 同时, 当且仅当 f 和 g 分担 $(a,0)$ (或 (a,∞)) 时, f 和 g 分担 a IM (或 a CM).

设 S 是一个复数集合, f 和 g 是两个非常数亚纯函数, 定义

$$E_f(S,k)=\bigcup_{a\in S}E_f(a,k),$$

若 $E_f(S,k)=E_g(S,k)$, 则称 f 和 g 以权 k 分担集合 S, 若 $E_f(S,\infty)=E_g(S,\infty)$, 则称 S 为 f 和 g 的 CM 公共值集; 若 $E_f(S,0)=E_g(S,0)$, 则称 S 为 f 和 g 的 IM 公共值集. 显然 $E_f(S,\infty)=E_f(S)$, $E_f(S,0)=\overline{E}_f(S)$.

*收稿日期: 2022-06-28 接收日期: 2022-08-31

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11801291); 福建省自然科学基金资助项目 (2020R0039; 2019J05047; 2019J01672).

作者简介: 刘登峰 (1996–), 男, 福建福州, 硕士, 主要研究方向: 复分析及其应用.

通讯作者: 潘飚 (1963–), 男, 福建宁德, 副教授, 主要研究方向: 复分析及其应用.

在亚纯函数值分布理论中, 一个著名的问题是 1959 年由 Hayman W K [5] 提出的, 即设 f 是复平面上超越亚纯函数, n 为正整数, 则 f^nf' 取可能为零以外的任意复数无穷多次. 上述问题直到 1995 年才被陈怀惠和方明亮 [6], Zalcman L [7] 分别证得. 针对上述著名的 Hayman 问题, 杨重骏与华歆厚 [8] 研究了微分单项式的唯一性并获得了下述定理.

定理 1.1 [8] 设 f, g 是两个非常数整函数 (亚纯函数), $n > 6$ ($n > 11$) 是正整数, 若 f^nf' 与 g^ng' 分担 1 CM, 则或者 $f = c_1e^{cz}$, $g = c_2e^{-cz}$, 其中 c_1, c_2, c 是非零常数, 且满足 $(c_1c_2)^{n+1}c^2 = -1$, 或者 $f(z) \equiv tg(z)$ 且满足 $t^{n+1} = 1$.

近 20 年来, 许多复分析学者对微分多项式的唯一性问题开始了广泛的研究并获得了丰富的成果, 详见文献 [9–13]. 注意到, $f(z)^nf(z)' = \frac{1}{n+1}(f(z)^{n+1})'$, 进而方明亮 [9] 考虑了定理 1.1 中 k 阶导数的情形并获得了下述结果.

定理 1.2 [9] 设 f, g 是两个非常数整函数, n, k 均为正整数且满足 $n > 2k + 4$, 若 $(f^n)^{(k)}$ 与 $(g^n)^{(k)}$ 分担 1 CM, 则或者 $f = c_1e^{cz}$, $g = c_2e^{-cz}$, 其中 c_1, c_2, c 是非零常数, 且满足 $(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k} = 1$, 或者 $f(z) \equiv tg(z)$ 且满足 $t^n = 1$.

定理 1.3 [9] 设 f, g 是两个非常数整函数, n, k 均为正整数且满足 $n > 2k + 8$, 若 $(f^n(f - 1))^{(k)}$ 与 $(g^n(g - 1))^{(k)}$ 分担 1 CM, 则 $f(z) \equiv g(z)$.

2008 年, 张晓宇等人 [10] 进一步将定理 1.3 中的 $(f^n(f - 1))^{(k)}$ 推广到 $(f^nP(f))^{(k)}$, 其中 $P(z) = a_mz^m + a_{m-1}z^{m-1} + \cdots + a_1z + a_0$ 为 m 次非零多项式, 得到了如下结果.

定理 1.4 [10] 设 f, g 是两个非常数整函数, n, k, m 均为正整数且满足 $n > 3m + 2k + 5$, $P(z) = a_mz^m + a_{m-1}z^{m-1} + \cdots + a_1z + a_0$ 或 $P(z) \equiv c_0$, 其中 $a_0 \neq 0$, a_1, $\cdots$, a_{m-1}, $a_m \neq 0$, $c_0 \neq 0$ 为常数, 若 $(f^n(P(f)))^{(k)}$ 与 $(g^n(P(g)))^{(k)}$ 分担 1 CM, 则

(I) 若 $P(z) = a_mz^m + a_{m-1}z^{m-1} + \cdots + a_1z + a_0$, 则下述情况之一成立:

(I.i) $f(z) \equiv tg(z)$, 其中 t 为非零常数且满足 $t^d = 1$, $d = GCD(n + m, \cdots, n + m - i, \cdots, n)$, 且存在一个 $i \in \{0, 1, \cdots, m\}$, 使得 $a_{m-i} \neq 0$;

(I.ii) $R(f, g) \equiv 0$, 其中 $R(\omega_1, \omega_2) = \omega_1^n(a_m\omega_1^m + \cdots + a_1\omega_1 + a_0) - \omega_2^n(a_m\omega_2^m + \cdots + a_1\omega_2 + a_0)$.

(II) 若 $P(z) \equiv c_0$, 则下述情况之一成立:

(II.i) $f(z) \equiv tg(z)$, 其中 t 为非零常数且满足 $t^n = 1$;

(II.ii) $f = c_1/\sqrt[n]{c_0}e^{cz}$, $g = c_2/\sqrt[n]{c_0}e^{-cz}$, 其中 c_1, c_2, c 是非零常数, 且满足 $(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k} = 1$.

近年来, 一些学者考虑了上述微分多项式中当分担值 a 替换为集合 S 时, 其中 $S = \{a \in \mathbb{C} : a^s = 1\}$, 是否还能获得上述定理中 f 与 g 类似的关系. 2018 年, An V H 等人 [11] 考虑了 $(f^n)^{(k)}$ 与 $(g^n)^{(k)}$ CM 分担 S 的情况, 得到了下述结果.

定理 1.5 [11] 设 f, g 是非常数亚纯函数, n, k, s 均为正整数且满足 $n > 2k + \frac{2k+8}{s}$, $s \geq 2$, $S = \{a \in \mathbb{C} : a^s = 1\}$, 若 $E_{(f^n)^{(k)}}(S, \infty) = E_{(g^n)^{(k)}}(S, \infty)$, 则下述情况之一成立:

(i) $f(z) \equiv tg(z)$, 其中 t 为非零常数且满足 $t^{ns} = 1, t \in \mathbb{C}$;

(ii) $f = c_1e^{cz}$, $g = c_2e^{-cz}$, 其中 c_1, c_2, c 是非零常数, 且满足 $(-1)^{ks}(c_1c_2)^{ns}(nc)^{2ks} = 1$.

2020 年, Chao M 等人 [12] 考虑了 $(f^n)^{(k)}$ 与 $(g^n)^{(k)}$ IM 分担集合 S 与权 1 分担集合 S 的情况, 得到了下述定理.

定理 1.6 [12] 设 f, g 是非常数亚纯函数, n, k, s 均为正整数且满足 $n > 2k + \frac{3k+9}{s}$, $s \geq 2$, $S = \{a \in \mathbb{C} : a^s = 1\}$, 若 $E_{(f^n)^{(k)}}(S, 1) = E_{(g^n)^{(k)}}(S, 1)$, 则定理 1.5 的结论成立.

定理 1.7 [12] 设 f, g 是非常数亚纯函数, $n,\ k,\ s$ 均为正整数且满足 $n > 2k+\frac{8k+14}{s}$, $s \geq 2$, $S=\{a\in\mathbb{C}: a^s=1\}$, 若 $E_{(f^n)^{(k)}}(S,0)=E_{(g^n)^{(k)}}(S,0)$, 则定理 1.5 的结论成立.

为了寻求这个方向上更多的结果, 本文结合多项式加权和的概念进一步探讨将定理 1.5, 定理 1.6 以及定理 1.7 中 $(f^n)^{(k)}$ 替换为 $(f^n(P(f))^{(k)}$ 时的情形, 为了方便本文的叙述, 我们引入下述定义.

定义 1.2 设 $P(z)=a_mz^m+\cdots+a_1z+a_0$ 为 m 次非零多项式, 其中 v $(1\leq\ v\ \leq\ m)$ 个不同的零点分别记为 $d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_v$, 相对应的零点重数分别记为 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_v$ 且满足 $p_1\ \leq\ p_2\ \leq\ \cdots\ \leq\ p_v$. 令

$$\gamma=\sum_{i=1}^{v}\lambda\cdot[p_i-(k+1)],$$

其中 $\lambda=\begin{cases}0,\ p_i\leq k\\ 1,\ p_i>k\end{cases}$, 称 γ 为 $P(z)$ 的零点重数关于 k 的加权和.

当 t 为 $P(z)$ 重数不超过 k 的零点个数 (不计重数) 时, 则

$$\gamma=\sum_{i=t+1}^{v}[p_i-(k+1)],$$

且由定义可知 $0\leq\gamma\leq m$. 特别地, 当 $\displaystyle\sum_{i=1}^{t}p_i=m$ 时有 $\gamma=0$.

结合加权和的定义, 本文得到了下述定理, 定理中的 $P(z)$ 相关符号与定义 1.2 中的符号含义一致, 下文中不再一一叙述.

定理 1.8 设 f, g 是非常数亚纯函数, $n,\ k,\ s$ 均为正整数, $s\ \geq\ 2$, $P(z)\ =\ a_mz^m+a_{m-1}z^{m-1}+\cdots+a_1z+a_0$ 或 $P(z)\equiv c_0$, 其中 $a_0\neq 0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{m-1},\ a_m\neq 0$, $c_0\neq 0$ 为常数, $P(z)$ 中相关符号如定义 1.2 所设, $S=\{a\in\mathbb{C}: a^s=1\}$, 若 $E_{(f^nP(f))^{(k)}}(S,k)=E_{(g^nP(g))^{(k)}}(S,k)$, 则

(I) 当 $k=0$ 时,

(I.i) 若 $P(z)=a_mz^m+a_{m-1}z^{m-1}+\cdots+a_1z+a_0$ 且满足 $n>max\{2k+m+1, 2k+\frac{8k+14+7m-5\gamma}{s}-\gamma\}$, 则下述情况之一成立:

(I.i.i) $f(z)\equiv tg(z)$, 其中 t 为常数且满足 $t^{sd}=1, d=GCD(n+m,\cdots,n+m-i,\cdots,n)$;

(I.i.ii) $R(f,g)\equiv 0$, 其中 $R(\omega_1,\omega_2)=\omega_1^n(a_m\omega_1^m+\cdots+a_1\omega_1+a_0)-h\omega_2^n(a_m\omega_2^m+\cdots+a_1\omega_2+a_0)$ 且 $h^s=1$;

(I.i.iii) $(f^nP(f))^{(k)}(g^nP(g))^{(k)}\equiv h$, 其中 $h^s=1$.

(I.ii) 若 $P(z)\equiv c_0$ 且满足 $n>2k+\frac{8k+14}{s}$, 则下述情况之一成立:

(I.ii.i) $f(z)\equiv tg(z)$, 其中 t 为非零常数且满足 $t^{ns}=1$;

(I.ii.ii) $f=c_1e^{cz}$, $g=c_2e^{-cz}$, 其中 $c_1,\ c_2,\ c$ 是非零常数且满足 $c_0^{2s}(-1)^{ks}(c_1c_2)^{ns}(nc)^{2ks}=1$.

(II) 当 $k=1$ 时,

(II.i) 若 $P(z)=a_mz^m+a_{m-1}z^{m-1}+\cdots+a_1z+a_0$ 且满足 $n>max\{2k+m+1, 2k+\frac{3k+9+\frac{9}{2}m-\frac{5}{2}\gamma}{s}-\gamma\}$, 则 (I.i) 的结论成立;

(II.ii) 若 $P(z)\equiv c_0$ 且满足 $n>2k+\frac{3k+9}{s}$, 则 (I.ii) 的结论成立.

(III) 当 $k\geq 2$ 时,

(III.i) 若 $P(z)=a_mz^m+a_{m-1}z^{m-1}+\cdots+a_1z+a_0$ 且满足 $n>max\{2k+m+1,2k+\frac{2k+8+4m-2\gamma}{s}-\gamma\}$, 则 (I.i) 的结论成立;

(III.ii) 若 $P(z)\equiv c_0$ 且满足 $n>2k+\frac{2k+8}{s}$, 则 (I.ii) 的结论成立.

备注 1.1 特别地, 当 $P(z)\equiv c_0$ 时, 由定理 1.8 可得到定理 1.5 – 1.7, 因此定理 1.8 推广了定理 1.5 – 1.7.

2 相关引理

引理 2.1 [2] 设 f,g 是两个非常数亚纯函数且 $a_n(z)(\not\equiv 0),a_{n-1}(z),\cdots,a_0(z)$ 是满足 $T(r,a_i)=S(r,f),\ i=0,1,2,\cdots,n$ 的亚纯函数, 则

$$T(r,a_nf^n+a_{n-1}f^{n-1}+\cdots+a_1f+a_0)=nT(r,f)+S(r,f).$$

设 f,g 是两个非常数亚纯函数, 构造如下函数.

$$H=\left(\frac{f''}{f'}-\frac{2f'}{f-1}\right)-\left(\frac{g''}{g'}-\frac{2g'}{g-1}\right).$$

引理 2.2 [13] 设 f,g 是两个非常数亚纯函数, 若 f,g 分担 $(1,k),k\geq 2$ 且 $H\not\equiv 0$, 则

$$T(r,f)\leq N_2(r,f)+N_2\left(r,\frac{1}{f}\right)+N_2(r,g)+N_2\left(r,\frac{1}{g}\right)+S(r,f)+S(r,g).$$

$T(r,g)$ 类同.

引理 2.3 [14] 设 f,g 是两个非常数亚纯函数, 若 f,g 分担 $(1,1)$ 且 $H\not\equiv 0$, 则

$$\begin{aligned}T(r,f)\leq&N_2(r,f)+N_2\left(r,\frac{1}{f}\right)+N_2(r,g)+N_2\left(r,\frac{1}{f}\right)\\&+\frac{1}{2}\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\frac{1}{2}\overline{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g).\end{aligned}$$

$T(r,g)$ 类同.

引理 2.4 [14] 设 f,g 是两个非常数亚纯函数, 若 f,g 分担 $(1,0)$ 且 $H\not\equiv 0$, 则

$$\begin{aligned}T(r,f)\leq&N_2(r,f)+N_2\left(r,\frac{1}{f}\right)+N_2(r,g)+N_2\left(r,\frac{1}{g}\right)+2\overline{N}(r,f)+2\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)\\&+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\overline{N}(r,g)+S(r,f)+S(r,g).\end{aligned}$$

$T(r,g)$ 类同.

引理 2.5 [15] 设 f 是非常数亚纯函数, $p,\ k$ 为正整数, 则

$$N_p\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)\leq N_{p+k}\left(r,\frac{1}{f}\right)+k\overline{N}(r,f)+S(r,f).$$

引理 2.6 设 f 是非常数亚纯函数, $P(z)$ 中相关符号如定义 1.2 所设, n, k 为正整数且 $n>k$, 则

$$(n-2k+\gamma)T(r,f)+kN(r,f)+N\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right)\leq T(r,(f^nP(f))^{(k)})+S(r,f).$$

证明: 由对数导数引理可得

$$\begin{aligned}
&(n+m-k)m(r,f)\leq m(r,f^{n-k}P(f))\leq m(r,(f^nP(f))^{(k)})+m\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right)+O(1)\\
\leq& m(r,(f^nP(f))^{(k)})+T\left(r,\frac{(f^nP(f))^{(k)}}{f^{n-k}P(f)}\right)-N\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right)+S(r,f)\\
=& m(r,(f^nP(f))^{(k)})+m\left(r,\frac{(f^nP(f))^{(k)}}{f^{n-k}P(f)}\right)+N\left(r,\frac{(f^nP(f))^{(k)}}{f^{n-k}P(f)}\right)\\
&-N\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right)+S(r,f)\leq m(r,(f^nP(f))^{(k)})+kN(r,f)+k\overline{N}(r,f)\\
&+N_{k)}\left(r,\frac{1}{P(f)}\right)+kN_{(k+1}\left(r,\frac{1}{P(f)}\right)+km(r,f)-N\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right)\\
&+S(r,f)\leq m(r,(f^nP(f))^{(k)})+kT(r,f)+k\overline{N}(r,f)+N_{k+1}\left(r,\frac{1}{P(f)}\right)\\
&-N\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right)+S(r,f).
\end{aligned}\tag{2.1}$$

且

$$N(r,(f^nP(f))^{(k)})=(m+n)N(r,f)+k\overline{N}(r,f).\tag{2.2}$$

将 $P(f)$ 改写为下述形式:

$$P(f)=a_m\prod_{i=1}^{t}(f-d_i)^{p_i}\prod_{j=t+1}^{v}(f-d_j)^{p_j},\tag{2.3}$$

其中 $p_1\leq p_2\leq\cdots p_t\leq k<k+1\leq p_{t+1}\leq\cdots\leq p_v$.

由定义 1.2 与 (2.3) 式, 得

$$\begin{aligned}
N_{k+1}\left(r,\frac{1}{P(f)}\right)&\leq\sum_{i=1}^{t}p_iN\left(r,\frac{1}{f-d_j}\right)+(k+1)\sum_{j=t+1}^{v}\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-d_j}\right)+S(r,f)\\
&\leq\left[\sum_{i=1}^{t}p_i+(k+1)(v-t)\right]T(r,f)+S(r,f)\\
&\leq\{m-\sum_{i=t+1}^{v}[p_i-(k+1)]\}T(r,f)+S(r,f)\\
&\leq(m-\tau)T(r,f)+S(r,f).
\end{aligned}\tag{2.4}$$

结合 (2.1), (2.2) 和 (2.4) 式, 得

$$\begin{aligned}&(n+m-k)T(r,f)+kN(r,f)=(n+m-k)m(r,f)+(m+n)N(r,f)\\ \leq& N(r,(f^nP(f))^{(k)})+m(r,(f^nP(f))^{(k)})-k\overline{N}(r,f)+kT(r,f)\\ &+k\overline{N}(r,f)+N_{k+1}\left(r,\frac{1}{P(f)}\right)-N\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right)+S(r,f)\\ \leq& T(r,(f^nP(f))^{(k)})+kT(r,f)+(m-\gamma)T(r,f)-N\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right)+S(r,f).\end{aligned}$$

因此

$$(n+\gamma-2k)T(r,f)+kN(r,f)+N\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right)\leq T(r,(f^nP(f))^{(k)})+S(r,f).$$

引理 2.7 [16] 设 f_1, f_2 是两个非常数亚纯函数, 若 $c_1f_1+c_2f_2=c_3$ 且 c_1, c_2, c_3 为非零常数, 则

$$T(r,f_1)\leq\overline{N}\left(r,f_1\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f_1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f_2}\right)+S(r,f_1).$$

引理 2.8 [17] 设 f 是非常数亚纯函数, a_1, $a_2,\cdots$ a_q 为 q 个判别的复数, 则

$$(q-1)T(r,f)<\overline{N}(r,f)+\sum_{i=1}^{q}\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)-\log r+O(1).$$

引理 2.9 设 f, g 是两个非常数亚纯函数, $P(z)=a_mz^m+\cdots+a_1z+a_0$ 为 m 次非零多项式, 若 $((f^nP(f))^{(k)})^s=((g^nP(g))^{(k)})^s$, 则

(I) 若 $P(z)=a_mz^m+a_{m-1}z^{m-1}+\cdots+a_1z+a_0$, 且 $n>2k+m+1$, 则下述结论之一成立:

(I.i) $f(z)\equiv tg(z)$, 其中 t 为常数且满足 $t^{sd}=1$, $d=GCD(n+m,\cdots,n+m-i,\cdots,n)$;

(I.ii) $R(f,g)=0$, 其中 $R(\omega_1,\omega_2)=\omega_1^n(a_m\omega_1^m+\cdots+a_1\omega_1+a_0)-h\omega_2^n(a_m\omega_2^m+\cdots+a_1\omega_2+a_0)$, $h^s=1$.

(II) 若 $P(z)\equiv c_0$, 且 $n\geq 2k+1$, 则 $f(z)\equiv tg(z)$, 其中 t 为非零常数且满足 $t^{ns}=1$.

证 我们分两种情形讨论.

情形 1 当 $P(z)=a_mz^m+a_{m-1}z^{m-1}+\cdots+a_1z+a_0$ 时, 因为 $((f^nP(f))^{(k)})^s=((g^nP(g))^{(k)})^s$, 从而 $(f^nP(f))^{(k)}=h(g^nP(g))^{(k)}=(hg^nP(g))^{(k)}$, 其中 $h^s=1$, 因此 $f^nP(f)=hg^nP(g)+Q(z)$, $Q(z)$ 为 $deg(Q(z))\leq k-1$ 多项式. 下证 $deg(Q(z))\equiv 0$, 假设 $Q(z)\not\equiv 0$, 则

$$\frac{f^nP(f)}{Q(z)}=h\frac{g^nP(g)}{Q(z)}+1. \tag{2.5}$$

结合引理 2.7 与 (2.5) 式, 得

$$T(r,\frac{f^nP(f)}{Q(z)})\leq\overline{N}\left(r,\frac{f^nP(f)}{Q(z)}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{Q(z)}{f^nP(f)}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{Q(z)}{g^nP(g)}\right)+S(r,f). \tag{2.6}$$

由 (2.6) 式, 得

$$
\begin{aligned}
T(r,f^nP(f)) \le & T\left(r,\frac{f^nP(f)}{Q(z)}\right)+T(r,Q(z))+O(1)\le \overline{N}\left(r,\frac{f^nP(f)}{Q(z)}\right)\\
&+\overline{N}\left(r,\frac{Q(z)}{f^nP(f)}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{Q(z)}{g^nP(g)}\right)+T(r,Q(z))+S(r,f)\le \overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)\\
&+\overline{N}\left(r,\frac{1}{P(f)}\right)+\overline{N}(r,f)+\overline{N}(r,\frac{1}{Q(z)})+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{P(g)}\right)\\
&+T(r,Q(z))+S(r,f)\le \overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{P(f)}\right)\\
&+\overline{N}\left(r,\frac{1}{P(g)}\right)+2(k-1)\log r+S(r,f).
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

同理

$$
\begin{aligned}
T(r,g^nP(g)) \le & \overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\overline{N}(r,g)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{P(f)}\right)\\
&+\overline{N}\left(r,\frac{1}{P(g)}\right)+2(k-1)\log r+S(r,g).
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

因为 f,g 为非常数亚纯函数, 故 $T(r,f)\ge \log r+O(1), T(r,g)\ge \log r+O(1)$, 结合 (2.7) 与 (2.8) 式, 得

$$
(m+n)[T(r,f)+T(r,g)]\le (2k+2m+1)[T(r,f)+T(r,g)]+S(r,f)+S(r,g). \tag{2.9}
$$

由 (2.9) 式可知, 这与 $n>2k+m+1$ 矛盾, 因此 $Q(z)\equiv 0$. 从而 $f^nP(f)=hg^nP(g)$, 即

$$
f^n(a_mf^m+a_{m-1}f^{m-1}\cdots+a_0)=hg^n(a_mg^m+a_{m-1}g^{m-1}\cdots+a_0). \tag{2.10}
$$

接下来, 我们再分两种子情形讨论.

情形 1.1 若 $\frac{f}{g}=t$, 其中 t 为非零常数, 将 $f=tg$ 带入 (2.10) 式可得 $a_mg^{n+m}(t^{n+m}-h)+a_{m-1}g^{n+m-1}(t^{n+m-1}-h)+\cdots+a_1g^{n+1}(t^{n+1}-h)+a_0g^n(t^n-h)\equiv 0$. 因为 g 为非常数亚纯函数, 从而 $t^d=h$, 其中 $d=GCD(n+m,\cdots,n+m-i,\cdots,n)$, 进一步有 $(t^d)^s=h^s=1$, 因此 $f(z)\equiv tg(z)$, 其中 t 为常数且满足 $t^{sd}=1, d=GCD(n+m,\cdots,n+m-i,\cdots,n)$.

情形 1.2 若 $\frac{f}{g}=t$, 其中 t 不为常数, 将 $f=tg$ 带入 (2.10) 式可得 $R(f,g)=0$, 其中 $R(\omega_1,\omega_2)=\omega_1^n(a_m\omega_1^m+\cdots+a_1\omega_1+a_0)-h\omega_2^n(a_m\omega_2^m+\cdots+a_1\omega_2+a_0)$ 且 $h^s=1$.

情形 2 当 $P(z)\equiv c_0$ 时, 因为 $((f^n)^{(k)})^s=((g^n)^{(k)})^s$, 从而 $(f^n)^{(k)}=h(g^n)^{(k)}=(hg^n)^{(k)}$, 其中 $h^s=1$, 因此 $f^n=hg^n+Q(z)$, $Q(z)$ 为 $deg(Q(z))\le k-1$ 多项式. 下证 $deg(Q(z))\equiv 0$, 假设 $Q(z)\not\equiv 0$.

置

$$
F=\frac{f^n}{Q(z)},\ \ G=\frac{g^n}{Q(z)}. \tag{2.11}
$$

因此 $F=hG+1$, 进一步, 有

$$
\overline{N}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)=\overline{N}\left(r,\frac{1}{G}\right). \tag{2.12}
$$

结合引理 2.1 与 (2.11) 式, 得

$$nT(r,f)=T(r,f^n)\le T(r,F)+T(r,Q(z))\le T(r,F)+(k-1)\log r+O(1). \tag{2.13}$$

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)=\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)\le T(r,f),\quad \overline{N}\left(r,\frac{1}{G}\right)=\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)\le T(r,g). \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}\overline{N}(r,F)&=\overline{N}(r,f^n)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{Q(z)}\right)\le\overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{Q(z)}\right)\\&\le T(r,f)+(k-1)\log r+O(1).\end{aligned} \tag{2.15}$$

由 $g^n=\frac{1}{h}f^n-\frac{1}{h}Q(z)$ 可知

$$\begin{aligned}nT(r,g)=T(r,hg^n)&\le nT(r,f)+T(r,Q(z))+O(1)\\&\le nT(r,f)+(k-1)\log r+O(1).\end{aligned}$$

进一步, 有

$$T(r,g)\le T(r,f)+\frac{k-1}{n}\log r+O(1)\le T(r,f)+\frac{1}{2}\log r+O(1). \tag{2.16}$$

结合引理 2.8 与 (2.12), (2.14) – (2.16) 式, 得

$$\begin{aligned}T(r,F)&\le\overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)+\overline{N}(r,F)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F-1}\right)-\log r+O(1)\\&\le T(r,f)+T(r,f)+(k-1)\log r+T(r,g)-\log r+O(1)\\&\le T(r,f)+T(r,f)+(k-1)\log r+T(r,f)+\frac{1}{2}\log r-\log r+O(1)\\&\le 3T(r,f)+(k-\frac{3}{2})\log r+O(1).\end{aligned} \tag{2.17}$$

由 (2.13) 与 (2.17) 式, 得

$$nT(r,f)-(k-1)\log r\le 3T(r,f)+(k-\frac{3}{2})\log r+O(1),$$

即

$$(n-3)T(r,f)-2(k-1)\log r+\frac{1}{2}\log r\le O(1). \tag{2.18}$$

因为 f 为非常数亚纯函数, 故 $T(r,f)\ge\log r+O(1)$, 结合 (2.18) 式得

$$(n-2k-1)\log r+\frac{1}{2}\log r\le O(1).$$

这与已知条件 $n\ge 2k+1$ 矛盾, 因此 $Q(z)\equiv 0$. 进而 $f^n=hg^n$, 从而 $f(z)\equiv tg(z)$, 其中 t 为非零常数且满足 $t^{ns}=1$. 引理 2.9 证毕.

引理 2.10 [10] 设 f, g 是两个非常数整函数, n, k 为正整数, 且 $n>k$, 如果 $(c_0f^n)^{(k)}(c_0g^n)^{(k)}\equiv h$, h 为非零常数, 则 $f=c_1e^{cz}$, $g=c_2e^{-cz}$, 其中 c_0, c_1, c_2, c 是非零常数, 且满足 $c_0^2(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k}=h$.

3 定理的证明

设
$$F=((f^nP(f))^{(k)})^s\ ,\qquad G=((g^nP(g))^{(k)})^s. \tag{3.1}$$
置
$$H=\left(\frac{F''}{F'}-\frac{2F'}{F-1}\right)-\left(\frac{G''}{G'}-\frac{2G'}{G-1}\right).$$

下面, 我们分三种情形讨论.

情形 3 当 $k=0$ 时, 即 $E_{(f^nP(f))^{(k)}}(S,0)=E_{(g^nP(g))^{(k)}}(S,0)$, 从而 F,G 分担 (1,0), 假设 $H\not\equiv 0$, 由引理 2.4, 得
$$\begin{aligned}T(r,F)\le &N_2(r,F)+N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_2(r,G)+N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)+2\overline{N}(r,F)\\&+2\overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{G}\right)+\overline{N}(r,G)+S(r,F)+S(r,G).\end{aligned} \tag{3.2}$$

同理
$$\begin{aligned}T(r,G)\le &N_2(r,F)+N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_2(r,G)+N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)+2\overline{N}(r,G)\\&+2\overline{N}\left(r,\frac{1}{G}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)+\overline{N}(r,F)+S(r,F)+S(r,G).\end{aligned} \tag{3.3}$$

由引理 2.5, 得
$$\begin{aligned}N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)&=N_2\left(r,\frac{1}{((f^nP(f))^{(k)})^s}\right)=2\overline{N}\left(r,\frac{1}{(f^nP(f))^{(k)}}\right)\\&\le 2N_{k+1}\left(r,\frac{1}{f^nP(f)}\right)+2k\overline{N}(r,f^nP(f))+S(r,(f^nP(f))^{(k)})\\&\le 2\left(N_{k+1}\left(r,\frac{1}{f^n}\right)+N_{k+1}\left(r,\frac{1}{P(f)}\right)\right)+2k\overline{N}(r,f^nP(f))+S(r,f)\\&\le 2(k+1)\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+2N_{k+1}\left(r,\frac{1}{P(f)}\right)+2k\overline{N}(r,f)+S(r,f).\end{aligned} \tag{3.4}$$

同理
$$N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)\le 2(k+1)\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+2N_{k+1}\left(r,\frac{1}{P(g)}\right)+2k\overline{N}(r,g)+S(r,g). \tag{3.5}$$

由引理 2.5, 得
$$\begin{aligned}\overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)&=\overline{N}\left(r,\frac{1}{((f^nP(f))^{(k)})^s}\right)=\overline{N}\left(r,\frac{1}{(f^nP(f))^{(k)}}\right)\\&\le N_{k+1}\left(r,\frac{1}{f^nP(f)}\right)+k\overline{N}(r,f^nP(f))+S(r,(f^nP(f))^{(k)})\\&\le N_{k+1}\left(r,\frac{1}{f^n}\right)+N_{k+1}\left(r,\frac{1}{P(f)}\right)+k\overline{N}(r,f^nP(f))+S(r,f)\\&\le (k+1)\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+N_{k+1}\left(r,\frac{1}{P(f)}\right)+k\overline{N}(r,f)+S(r,f).\end{aligned} \tag{3.6}$$

同理

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{G}\right)\leq(k+1)\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+N_{k+1}\left(r,\frac{1}{P(g)}\right)+k\overline{N}(r,g)+S(r,g). \tag{3.7}$$

且

$$\begin{aligned}N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)&=N_2\left(r,\frac{1}{((f^nP(f))^{(k)})^s}\right)=2\overline{N}\left(r,(f^nP(f))^{(k)})\right)\\&\leq 2\left(\overline{N}\left(r,\frac{1}{f^{n-k}P(f)}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right)\right)\\&\leq 2\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+2\overline{N}\left(r,\frac{1}{P(f)}\right)+2\overline{N}\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right).\end{aligned} \tag{3.8}$$

同理

$$N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)\leq 2\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+2\overline{N}\left(r,\frac{1}{P(g)}\right)+2\overline{N}\left(r,\frac{g^{n-k}P(g)}{(g^nP(g))^{(k)}}\right). \tag{3.9}$$

根据定义 1.2, 类同引理 2.6 的证明可得

$$N_{k+1}\left(r,\frac{1}{P(f)}\right)\leq(m-\tau)T(r,f)+S(r,f). \tag{3.10}$$

同理

$$N_{k+1}\left(r,\frac{1}{P(g)}\right)\leq(m-\tau)T(r,g)+S(r,g). \tag{3.11}$$

结合 (3.2), (3.4), (3.6), (3.7), (3.9)–(3.11) 式, 得

$$\begin{aligned}T(r,F)\leq&(4k+4)\overline{N}(r,f)+(4k+4)\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+(k+3)\overline{N}(r,g)\\&+(k+3)\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+4(m-\gamma)T(r,f)+(m-\gamma)T(r,g)\\&+2\overline{N}\left(r,\frac{1}{p(g)}\right)+2\overline{N}\left(r,\frac{g^{n-k}P(g)}{(g^nP(g))^{(k)}}\right)+S(r,f)+S(r,g).\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}T(r,((f^nP(f))^{(k)})^s)\leq&(6k+8+4m-4\gamma)T(r,f)+(2k+6+3m-\gamma)T(r,g)\\&+2k\overline{N}(r,f)+2\overline{N}\left(r,\frac{g^{n-k}P(g)}{(g^nP(g))^{(k)}}\right)+S(r,f)+S(r,g).\end{aligned} \tag{3.12}$$

同理

$$\begin{aligned}T(r,((g^nP(g))^{(k)})^s)\leq&(6k+8+4m-4\gamma)T(r,g)+(2k+6+3m-\gamma)T(r,f)\\&+2k\overline{N}(r,g)+2\overline{N}\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right)+S(r,f)+S(r,g).\end{aligned} \tag{3.13}$$

由引理 2.1, 得

$$\begin{aligned}T(r,((f^nP(f))^{(k)})^s) &= sT(r,(f^nP(f))^{(k)})+S(r,(f^nP(f))^{(k)})\\ &= sT(r,(f^nP(f))^{(k)})+S(r,f).\end{aligned}\tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}T(r,((g^nP(g))^{(k)})^s) &= sT(r,(g^nP(g))^{(k)})+S(r,(g^nP(g))^{(k)})\\ &= sT(r,(g^nP(g))^{(k)})+S(r,g).\end{aligned}\tag{3.15}$$

结合引理 2.6 与 (3.14) 式, 得

$$\begin{aligned}&(n-2k+\gamma)sT(r,f)+ksN(r,f)+sN\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right)\\ \le& sT(r,(f^nP(f))^{(k)})+S(r,f).\end{aligned}\tag{3.16}$$

同理

$$\begin{aligned}&(n-2k+\gamma)sT(r,g)+ksN(r,g)+sN\left(r,\frac{g^{n-k}P(g)}{(g^nP(g))^{(k)}}\right)\\ \le& sT(r,(g^nP(g))^{(k)})+S(r,g).\end{aligned}\tag{3.17}$$

结合 (3.12), (3.13), (3.16) 与 (3.17) 式, 得

$$\begin{aligned}&(n-2k+\gamma)sT(r,f)+(n-2k+\gamma)sT(r,g)+ksN(r,f)+sN\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right)\\ &+ksN(r,g)+sN\left(r,\frac{g^{n-k}P(g)}{(g^nP(g))^{(k)}}\right)\le(8k+14+7m-5\gamma)T(r,f)\\ &+(8k+14+7m-5\gamma)T(r,g)+2k\overline{N}(r,f)+2\overline{N}\left(r,\frac{g^{n-k}P(g)}{(g^nP(g))^{(k)}}\right)\\ &+2k\overline{N}(r,g)+2\overline{N}\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right)+S(r,f)+S(r,g).\end{aligned}\tag{3.18}$$

由于 $s\ge 2$, 因此

$$sN\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right)\ge 2\overline{N}\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right),\tag{3.19}$$

$$sN\left(r,\frac{g^{n-k}P(g)}{(g^nP(g))^{(k)}}\right)\ge 2\overline{N}\left(r,\frac{g^{n-k}P(g)}{(g^nP(g))^{(k)}}\right),\tag{3.20}$$

$$ksN(r,f)\ge 2k\overline{N}(r,f),\tag{3.21}$$

$$ksN(r,g)\ge 2k\overline{N}(r,g).\tag{3.22}$$

结合 (3.18)–(3.22) 式, 得

$$\begin{aligned}&(ns-2ks+\gamma s-8k-14-7m+5\gamma)T(r,f)\\ &+(ns-2ks+\gamma s-8k-14-7m+5\gamma)T(r,g)\le S(r,f)+S(r,g).\end{aligned}$$

这与 $n > 2k + \frac{8k+14+7m-5\gamma}{s} - \gamma$ 矛盾. 因此 $H \equiv 0$, 即

$$\frac{F''}{F'} - \frac{2F'}{F-1} = \frac{G''}{G'} - \frac{2G'}{G-1}. \tag{3.23}$$

对 (3.23) 式连续积分两次可得

$$\frac{1}{G-1} = \frac{A}{F-1} + B. \tag{3.24}$$

其中 A, B 为常数且 $A \neq 0$. 由 (3.24) 式, 得

$$G = \frac{(B+1)F + (A-B-1)}{BF + (A-B)}, \tag{3.25}$$

$$F = \frac{(B-A)G + (A-B-1)}{BG - (B+1)}. \tag{3.26}$$

接下来我们分三种子情形讨论.

情形 3.1 若 $B \neq 0, -1$, 由 (3.26) 式, 得

$$\overline{N}(r, F) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{G - \frac{B+1}{B}}\right). \tag{3.27}$$

结合第二基本定理及 (3.9) 与 (3.27) 式, 得

$$\begin{aligned} T(r,G) \leq & \overline{N}(r,G) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{G}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{G - \frac{B+1}{B}}\right) + S(r,G) \\ \leq & \overline{N}(r,G) + N_2\left(r, \frac{1}{G}\right) + \overline{N}(r,F) + S(r,G) \\ \leq & \overline{N}(r,g) + 2\overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + 2\overline{N}\left(r, \frac{1}{P(g)}\right) + 2\overline{N}\left(r, \frac{g^{n-k}P(g)}{(g^nP(g))^{(k)}}\right) \\ & + \overline{N}(r,f) + S(r,g). \end{aligned} \tag{3.28}$$

若 $A - B - 1 \neq 0$, 由 (3.25) 式, 得

$$\overline{N}(r, \frac{1}{G}) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{F - \frac{B+1-A}{B+1}}\right). \tag{3.29}$$

结合第二基本定理及 (3.7), (3.8) 与 (3.29) 式, 得

$$\begin{aligned} T(r,F) \leq & \overline{N}(r,F) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{F}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{F - \frac{B+1-A}{B+1}}\right) + S(r,F) \\ \leq & \overline{N}(r,F) + N_2\left(r, \frac{1}{F}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{G}\right) + S(r,F) \\ \leq & \overline{N}(r,f) + 2\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + 2\overline{N}\left(r, \frac{1}{P(f)}\right) + 2\overline{N}\left(r, \frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right) \\ & + (k+1)\overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + N_{k+1}\left(r, \frac{1}{P(g)}\right) + k\overline{N}(r,g) + S(r,f) + S(r,g). \end{aligned} \tag{3.30}$$

结合 (3.16), (3.17), (3.28) 与 (3.30) 式, 得

$$
\begin{aligned}
&(n-2k+\gamma)sT(r,f)+(n-2k+\gamma)sT(r,g)+ksN(r,f)+sN\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right)\\
&+ksN(r,g)+sN\left(r,\frac{g^{n-k}P(g)}{(g^nP(g))^{(k)}}\right)\le(2m+2)T(r,f)+(3m+3+k-\gamma)T(r,g)\\
&+2\overline{N}(r,f)+2\overline{N}\left(r,\frac{g^{n-k}P(g)}{(g^nP(g))^{(k)}}\right)+(k+1)\overline{N}(r,g)+2\overline{N}\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right)\\
&+S(r,f)+S(r,g).
\end{aligned}\tag{3.31}
$$

由于 $s\ge 2$, 因此

$$ksN(r,g)\ge(k+1)\overline{N}(r,g).\tag{3.32}$$

结合 (3.18) $-$ (3.20), (3.31) 与 (3.32) 式, 得

$$
\begin{aligned}
&(ns-2ks+\gamma s-2m-2)T(r,f)+(ns-2ks+\gamma s-3m-3-k+\gamma)T(r,g)\\
\le&S(r,f)+S(r,g).
\end{aligned}
$$

因为 $2k+\frac{8k+14+7m-5\gamma}{s}-\gamma=2k+\frac{8k+14+3m-\gamma+4(m-\gamma)}{s}-\gamma>2k+\frac{k+3+3m-\gamma}{s}-\gamma$, 且 $m\ge\gamma$, 这与 $n>2k+\frac{8k+14+7m-5\gamma}{s}-\gamma$ 矛盾, 因此 $A-B-1=0$, 带入 (3.25) 式可得

$$\overline{N}(r,G)=\overline{N}\left(r,\frac{1}{F+\frac{1}{B}}\right).\tag{3.33}$$

结合第二基本定理及 (3.8) 与 (3.33) 式, 得

$$
\begin{aligned}
T(r,F)\le&\overline{N}(r,F)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{F+\frac{1}{B}}\right)+S(r,F)\\
\le&\overline{N}(r,F)+N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)+\overline{N}(r,G))+S(r,f)\\
\le&\overline{N}(r,f)+2\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+2\overline{N}\left(r,\frac{1}{P(f)}\right)+2\overline{N}\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right)\\
&+\overline{N}(r,g)+S(r,f).
\end{aligned}\tag{3.34}
$$

结合 (3.16), (3.17), (3.28) 与 (3.34) 式, 得

$$
\begin{aligned}
&(n-2k+\gamma)sT(r,f)+(n-2k+\gamma)sT(r,g)+ksN(r,f)+sN\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right)\\
&+ksN(r,g)+sN\left(r,\frac{g^{n-k}P(g)}{(g^nP(g))^{(k)}}\right)\le(2m+2)T(r,f)+(2m+2)T(r,g)\\
&+2\overline{N}(r,f)+2\overline{N}\left(r,\frac{g^{n-k}P(g)}{(g^nP(g))^{(k)}}\right)+2\overline{N}(r,g)+2\overline{N}\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right)\\
&+S(r,f)+S(r,g).
\end{aligned}\tag{3.35}
$$

结合 (3.19)–(3.22) 与 (3.35) 式, 得

$$(ns-2ks+\gamma s-2m-2)T(r,f)+(ns-2ks+\gamma s-2m-2)T(r,g)\le S(r,f)+S(r,g).$$

这与 $n > 2k + \frac{8k+14+7m-5\gamma}{s} - \gamma$ 矛盾.

情形 3.2 若 $B=-1$, 由 (3.25) 与 (3.26) 式, 得

$$G = \frac{A}{A+1-F}, \tag{3.36}$$

$$F = \frac{(1+A)G-A}{G}. \tag{3.37}$$

若 $A+1 \neq 0$, 由 (3.36) 与 (3.37) 式, 得

$$\overline{N}(r,G) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{F-A-1}\right), \tag{3.38}$$

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{G-\frac{A}{1+A}}\right). \tag{3.39}$$

结合第二基本定理及 (3.6), (3.9), (3.38) 与 (3.39) 式, 得

$$\begin{aligned} T(r,G) \leq & \overline{N}(r,G) + \overline{N}\left(r,\frac{1}{G}\right) + \overline{N}\left(r,\frac{1}{G-\frac{A}{1+A}}\right) + S(r,G) \\ \leq & \overline{N}(r,G) + N_2\left(r,\frac{1}{G}\right) + \overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right) + S(r,G) \\ \leq & \overline{N}(r,g) + 2\overline{N}\left(r,\frac{1}{g}\right) + 2\overline{N}\left(r,\frac{1}{P(g)}\right) + 2\overline{N}\left(r,\frac{g^{n-k}P(g)}{(g^nP(g))^{(k)}}\right) \\ & + (k+1)\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) + N_{k+1}\left(r,\frac{1}{P(f)}\right) + k\overline{N}(r,f) + S(r,f) + S(r,g). \end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned} T(r,F) \leq & \overline{N}(r,F) + \overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right) + \overline{N}\left(r,\frac{1}{F-A-1}\right) + S(r,F) \\ \leq & \overline{N}(r,F) + N_2\left(r,\frac{1}{F}\right) + \overline{N}(r,G) + S(r,F) \\ \leq & \overline{N}(r,f) + 2\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) + 2\overline{N}\left(r,\frac{1}{P(f)}\right) + 2\overline{N}\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(g^nP(g))^{(k)}}\right) \\ & + \overline{N}(r,g) + S(r,f). \end{aligned} \tag{3.41}$$

结合 (3.16), (3.17), (3.40) 与 (3.41) 式, 得

$$\begin{aligned} & (n-2k+\gamma)sT(r,f) + (n-2k+\gamma)sT(r,g) + ksN(r,f) + sN\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right) \\ & + ksN(r,g) + sN\left(r,\frac{g^{n-k}P(g)}{(g^nP(g))^{(k)}}\right) \leq (k+3+3m-\gamma)T(r,f) \\ & + (2m+2)T(r,g) + (k+1)\overline{N}(r,f) + 2\overline{N}\left(r,\frac{g^{n-k}P(g)}{(g^nP(g))^{(k)}}\right) + 2\overline{N}(r,g) \\ & + 2\overline{N}\left(r,\frac{f^{n-k}P(f)}{(f^nP(f))^{(k)}}\right) + S(r,f) + S(r,g). \end{aligned} \tag{3.42}$$

由于 $s \geq 2$, 因此

$$ksN(r,f) \geq (k+1)\overline{N}(r,f). \tag{3.43}$$

结合 (3.19), (3.20), (3.22), (3.42) 与 (3.43) 式, 得

$$(ns-2ks+\gamma-k-3-3m+\gamma)T(r,f)+(ns-2ks+\gamma s-2m-2)T(r,g) \leq S(r,f)+S(r,g).$$

这与 $n > 2k+\frac{8k+14+7m-5\gamma}{s}-\gamma$ 矛盾, 因此 $A+1=0$, 将其带入 (3.36) 式可得 $FG \equiv 1$. 若 $P(z)=a_m z^m+a_{m-1}z^{m-1}+\cdots+a_1 z+a_0$, 则 $(f^nP(f))^{(k)}(g^nP(g))^{(k)} \equiv h$, 其中 $h^s=1$. 若 $P(z) \equiv c_0$, 则 $(c_0f^n)^{(k)}(c_0g^n)^{(k)} \equiv h$, 易见 $f \neq 0$, $f \neq \infty$, $g \neq 0$, $g \neq \infty$, 故 f, g 为非常数整函数. 从而由引理 2.10 得 $f=c_1e^{cz}$, $g=c_2e^{-cz}$, 其中 c_1, c_2, c 是非零常数, 且满足 $c_0^{2s}(-1)^{ks}(c_1c_2)^{ns}(nc)^{2ks}=1$.

情形 3.3 若 $B=0$, 将其带入 (3.25) 与 (3.26) 式, 得

$$G=\frac{F+A-1}{A}, \tag{3.44}$$

$$F=AG+1-A. \tag{3.45}$$

与情况 1.2 的证明类同, 可得到 $A-1=0$, 将其带入 (3.44) 式可得 $F \equiv G$, 即 $((f^nP(f))^{(k)})^s \equiv ((g^nP(g))^{(k)})^s$, 再应用引理 2.9 的结论, 这就完成了 $k=0$ 时情况的证明. $k=1$ 与 $k \geq 2$ 情况的证明与 $k=0$ 情况的证明完全类似, 不再赘述. 至此, 定理 1.8 证毕.

参 考 文 献

[1] Hayman W K. Meromorphic functions[M]. Oxford：Clarendon Press, 1964.

[2] Yi H X, Yang C C. Uniqueness theory of meromorphic functions[M]. Beijing: Science Press, 2003.

[3] Lahiri I. Weighted sharing and uniqueness of meromorphic functions[J]. Nagoya Mathematical Journal, 2001, 161: 193–206.

[4] Lahiri I. Weighted value sharing and uniqueness of meromorphic functions[J]. Complex Variables and Elliptic Equations, 2001, 46(3): 241–253.

[5] Hayman W K. Research problems in function theory[M]. London: Athione Press University, 1967.

[6] 陈怀惠, 方明亮. 关于 f^nf' 的值分布 [J]. 中国科学 (A 辑), 1995, 25(2): 121–127.

[7] Zalcman L. On some problems of Hayman[J]. Preprint(Bar-Ilan University), 1995.

[8] Yang C C, Hua X H. Uniqueness and value-sharing of meromorphic functions[J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math, 1997, 22: 395–406.

[9] Fang M L. Uniqueness and value-sharing of entire functions[J]. Comput. Math. Appl., 2002, 44(5–6): 823–831.

[10] Zhang X Y, Chen J F, Lin W C. Entire or meromorphic functions sharing one value[J]. Comput. Math. Appl, 2008, 56(7): 1876–1883.

[11] An V H, Khoai H H. On uniqueness for meromorphic functions and their nth derivatives[J]. Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp, 2018, 47: 117–126.

[12] Chao M, Xu L. On unicity of meromorphic functions and their derivatives[J]. The Journal of Analysis, 2020, 28(3): 879–894.

[13] Lin S H, Lin W C. Uniqueness of meromorphic functions concerning weakly weighted-sharing[J]. Kodai Mathematical Journal, 2006, 29(2): 269–280.

[14] Banerjee A. Meromorphic functions sharing one value [J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2005, 2005(22): 3587–3598.

[15] Zhang Q C. Meromorphic function that shares one small function with its derivative[J]. J. Inequal. Pure Appl. Math, 2005, 6(4): 116.

[16] Xu J F, Lü F, Yi H X. Fixed-points and uniqueness of meromorphic functions[J]. Comput. Math. Appl, 2010, 59(1): 9–17.

[17] An V H, Hoa P N, Khoai H H. Value sharing problems for differential and difference polynomials of meromorphic functions in a non-Archimedean field[J]. p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications, 2017, 9(1): 1–14.

UNIQUENESS ON THE DIFFERENTIAL POLYNOMIAL OF MEROMORPHIC FUNCTIONS

LIU Deng-feng, PAN Biao

(*School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou 350117, China*)

Abstract: Using nevanlinna theory and the concept of polynomial weighted, we investigate the uniqueness problems of certain differential polynomials generated by two meromorphic functions, and obtain a result on uniqueness theorem for differential polynomials of meromorphic functions satisfying the condition of sharing values, which extends the previous results given by An V H, Khoai H H and Chao M.

Keywords: Meromorphic function; differential polynomials; uniqueness theorem

2010 MR Subject Classification: 30D30; 30D35