

度量空间上 $\mathcal{A}_*$ - 隐式压缩映射族的唯一公共不动点

朴勇杰

(延边大学理学院数学系, 吉林 延吉 133002)

摘 要: 本文研究了度量空间上自映射族的唯一公共不动点存在性问题. 通过引入一个新的三元函数类 $\mathcal{A}_*$, 类 $\mathcal{A}_*$ 是已知类 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}^*$ 的推广, 并利用类 $\mathcal{A}_*$ 建立映射族的隐式压缩条件, 获得了度量空间上映射族具有唯一公共不动点的定理, 所得结果很好地推广和改进了 Banach 型及 Kannan 型 (公共) 不动点定理及相应结果. 最后, 给出具体实例验证了所得结果的正确性.

关键词: $\mathcal{A}$ - 压缩; $\mathcal{A}^*$ - 压缩; $\mathcal{A}_*$ - 压缩; 公共不动点

MR(2010) 主题分类号: 47H10; 54H25; 55M20

中图分类号: O177.3; O189.11

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2022)06-0503-10

1 引言与基本概念

Akram M, Zafar A A, Siddiqui A A^[1] 于 2008 年引进了 3- 元实函数类 $\mathcal{A}$ 如下:

设 $\mathbb{R}^+$ 是所有非负实数集, $\mathcal{A}$ 是所有满足下列条件的函数 $\alpha: (\mathbb{R}^+)^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$ 的集合:

($\alpha 1$) α 是 $(\mathbb{R}^+)^3$ 上连续的;

($\alpha 2$) 存在 $k \in [0, 1)$ 使得当 $a \leq \alpha(a, b, b)$ 或 $a \leq \alpha(b, a, b)$ 或 $a \leq \alpha(b, b, a) \forall a, b \in [0, \infty)$ 时 $a \leq kb$.

他们引进了称之为 $\mathcal{A}$ - 压缩的概念: 度量空间 X 上的自映射 T 是 $\mathcal{A}$ - 压缩的是指存在 $\alpha \in \mathcal{A}$ 成立

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha(d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty)), \forall x, y \in X.$$

文献 [1] 的作者利用 $\mathcal{A}$ - 压缩得到了一些重要的不动点定理, 文献 [1] 中主要定理是 Banach 压缩原理^[2] 和 Kannan 不动点定理^[3] 及一些其它不动点定理的新的推广.

2012 年, Mantu Saha, Debashis Dey^[4] 利用 $\mathcal{A}$ - 压缩条件把文献 [1] 中的结果推广到积分型的结果. 文献 [1] 中指出 $\mathcal{A}$ - 压缩条件推广和改进了 M - 压缩^[5], K - 压缩^[2], B - 压缩^[6] 和 R - 压缩^[7] 及其它. 显然, $\mathcal{A}$ - 压缩也是下列压缩条件的推广

$$d(Tx, Ty) \leq a d(x, y) + b d(x, Tx) + c d(y, Ty), \forall x, y \in X,$$

其中 $a, b, c \in [0, 1)$ 满足 $a + b + c < 1$. 因此它也是下列压缩条件的推广

$$d(Tx, Ty) \leq k [d(x, y) + d(x, Tx) + d(y, Ty)], \forall x, y \in X,$$

其中 $k \in [0, \frac{1}{3})$. 于是文献 [1] 中主要结果也推广和改进了 Kannan 型不动点定理的变形结果^[8]. 另一方面, 石和朴^[9] 在复值度量空间上重新定义了 $\mathcal{A}$ - 压缩概念并讨论了文献 [1] 中

*收稿日期: 2021-10-14

接收日期: 2022-03-07

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11761072).

作者简介: 朴勇杰 (1962 -), 男, 吉林九台, 教授, 主要研究方向: 非线性分析及不动点理论.

的相应结果. 朴^[10] 引进了 $\mathcal{A}$ -压缩的一个推广概念, 即 $\mathcal{A}^*$ -压缩, 其中条件 $(\alpha 2)$ 中的 $a \leq kb$ (此处 $k \in [0, 1)$) 用 $a < b$ 代替, 并在 $\mathcal{A}^*$ -压缩条件下讨论了若干个不动点和公共不动点存在性问题. 文献 [10] 中所得结果大大推广和改进了文献 [1] 中的结论.

在本文, 我们将把 $\mathcal{A}$ 及 $\mathcal{A}^*$ 定义中的条件 $a \leq kb$ 及 $a < b$ 用 $a \leq b$ 代替并引进一个新的实函数类 $\mathcal{A}_*$, 然后在完备或非完备的度量空间上讨论具有 $\mathcal{A}_*$ -压缩条件的自映射族的唯一公共不动点存在性问题. 最后, 给出两个实例验证主要定理的正确性.

2 唯一公共不动点

首先, 定义如下新的 3-元实函数类 $\mathcal{A}_*$.

定义 2.1 $\alpha \in \mathcal{A}_*$ 当且仅当 α 满足如下两个条件

$(\alpha_* 1)$: $\alpha : (\mathbb{R}^+)^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是关于三个变元是连续的;

$(\alpha_* 2)$: 若 $x_1 \leq \alpha(x_1, x_2, x_2)$ 或 $x_1 \leq \alpha(x_2, x_1, x_2)$ 或 $x_1 \leq \alpha(x_2, x_2, x_1)$, 则 $x_1 \leq x_2$.

注记 2.1 显然, $\alpha \in \mathcal{A} \implies \alpha \in \mathcal{A}_*$. $\mathcal{A}_*$ 不同于 [10] 中定义的类 $\mathcal{A}^*$.

例 2.1 定义 $\alpha : (\mathbb{R}^+)^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$ 为 $\alpha(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$, $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^+$. 显然, $\alpha \in \mathcal{A}_*$. 若取 $x_1 = x_2$, 则 $x_1 \leq \alpha(x_1, x_2, x_2)$, 但是不存在 $k \in [0, 1)$ 使得 $x_1 \leq kx_2$ 成立. 因此 $\alpha \notin \mathcal{A}$. 于是 $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{A}_*$. 另外, 当 $x_1 = x_2$ 时成立 $x_1 \leq \alpha(x_1, x_2, x_2)$, 但 $x_1 < x_2$ 不成立, 于是 $\alpha \notin \mathcal{A}^*$.

下面是另一个满足 $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{A}_*$ 的实例.

例 2.2 定义 $\alpha : (\mathbb{R}^+)^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$ 如下:

$$\alpha(x_1, x_2, x_2) = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3 + 2(x_1 + x_2 + x_3)}, \forall (x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}^+)^3.$$

则 $\alpha(x_1, x_2, x_3)$ 显然是连续的.

如果 $x_1 \leq \alpha(x_1, x_2, x_2)$, 即 $x_1 \leq \frac{x_1 + x_2 + x_2}{3 + 2(x_1 + x_2 + x_2)} = \frac{x_1 + 2x_2}{3 + 2(x_1 + 2x_2)}$, 则 $x_1[3 + 2(x_1 + 2x_2)] \leq x_1 + 2x_2$, 因此

$$x_1(1 + x_1 + 2x_2) \leq x_2,$$

于是 $x_1 \leq x_2$. 类似地, 当 $x_1 \leq \alpha(x_2, x_1, x_2)$ 或 $x_1 \leq \alpha(x_2, x_2, x_1)$ 时成立 $x_1 \leq x_2$. 这说明 $\alpha \in \mathcal{A}_*$.

由 $x_1 \leq \alpha(x_1, x_2, x_2)$ 推出 $x_1(1 + x_1 + 2x_2) \leq x_2$, 因此

$$x_1 \leq \frac{1}{1 + x_1 + 2x_2} x_2.$$

由于 $\sup_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+} \frac{1}{1 + x_1 + 2x_2} = 1$, 因此对任何给定的 $k \in [0, 1)$, $x_1 \leq kx_2$ 是不成立的. 于是 $\alpha \notin \mathcal{A}$. 另一方面, 取 $x_1 = x_2 = 0$, 则 $x_1 \leq \alpha(x_1, x_2, x_2)$ 成立, 但 $x_1 < x_2$ 不成立, 于是 $\alpha \notin \mathcal{A}^*$.

下列定理是本文中的第一个主要结果.

定理 2.1 设 (X, d) 是完备的度量空间, $\alpha \in \mathcal{A}_*$ 且 $S, T : X \rightarrow X$ 是两个映射. 假设对任何 $x, y \in X$,

$$d(Tx, Sy) \leq \alpha(d(x, y), d(x, Tx), d(y, Sy)). \quad (2.1)$$

如果 $z \leq \alpha(z, z, z)$ 当且仅当 $z = 0$, 则 S 和 T 有唯一公共不动点.

证 任取一个 $x_0 \in X$ 并在 X 中构造一个序列 $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ 使其满足如下条件

$$Tx_{2n} = x_{2n+1}, \quad Sx_{2n+1} = x_{2n+2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

对任何固定的 $n \in \mathbb{N}$, 利用 (2.1) 得到

$$\begin{aligned} d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &= d(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) \leq \alpha(d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n}, Tx_{2n}), d(x_{2n+1}, Sx_{2n+1})) \\ &= \alpha(d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n+1}, x_{2n+2})), \end{aligned}$$

因此根据 $(\alpha_*)2$ 得到

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq d(x_{2n}, x_{2n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

类似地,

$$\begin{aligned} d(x_{2n+3}, x_{2n+2}) &= d(Tx_{2n+2}, Sx_{2n+1}) \leq \alpha(d(x_{2n+2}, x_{2n+1}), d(x_{2n+2}, Tx_{2n+2}), d(x_{2n+1}, Sx_{2n+1})) \\ &= \alpha(d(x_{2n+2}, x_{2n+1}), d(x_{2n+2}, x_{2n+3}), d(x_{2n+1}, x_{2n+2})), \end{aligned}$$

因此再次根据 $(\alpha_*)2$ 得到

$$d(x_{2n+2}, x_{2n+3}) \leq d(x_{2n+1}, x_{2n+2}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

结合 (2.3) 和 (2.4), 则

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq d(x_n, x_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

因此 $\{d(x_n, x_{n+1})\}_{n=1}^\infty$ 是单调递减非负实序列, 于是存在 $a \in [0, \infty)$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = a$. 在下列已知式子的两边取 $n \rightarrow \infty$

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq \alpha(d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n}, x_{2n+1}), d(x_{2n+1}, x_{2n+2}))$$

且利用 $(\alpha_*)1$, 则得到 $a \leq \alpha(a, a, a)$. 因此根据 α 的性质得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = a = 0. \quad (2.6)$$

假设序列 $\{x_n\}$ 不是柯西的, 则存在 $c \in \mathbb{R}$ 且 $c > 0$ 使得对任何 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $m(k), n(k) \in \mathbb{N}$ 且 $m(k) > n(k) > k$ 使得下列关系式成立

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geq c, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.7)$$

根据 (2.6), 可以假设 $m(k)$ 和 $n(k)$ 的奇偶性不同. 对任何 $k \in \mathbb{N}$, 令 $m(k)$ 是大于 $n(k)$ 且满足 (2.7) 的最小整数, 则有

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geq c, \quad d(x_{m(k)-2}, x_{n(k)}) < c, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

根据 (2.8) 得到

$$\begin{aligned} c &\leq d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \\ &\leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{m(k)-2}) + d(x_{m(k)-2}, x_{n(k)}) \\ &< d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{m(k)-2}) + c \end{aligned}$$

在上式的两边取 $k \rightarrow \infty$ 且利用 (2.6), 则得到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)-2}, x_{n(k)}) = c. \quad (2.9)$$

因为

$$\begin{aligned} &|d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) - d(x_{m(k)}, x_{n(k)})| \\ &\leq |d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) - d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)})| + |d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}) - d(x_{m(k)}, x_{n(k)})| \\ &\leq d(x_{n(k)+1}, x_{n(k)}) + d(x_{m(k)+1}, x_{m(k)}), \end{aligned}$$

因此结合 (2.6) 和 (2.9) 得到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) = c. \quad (2.10)$$

如果 $m(k)$ 是偶数且 $n(k)$ 是奇数, 则根据 (2.1) 得到

$$d(Tx_{m(k)}, Sx_{n(k)}) \leq \alpha(d(x_{m(k)}, x_{n(k)}), d(x_{m(k)}, Tx_{m(k)}), d(x_{n(k)}, Sx_{n(k)})),$$

即

$$d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) \leq \alpha(d(x_{m(k)}, x_{n(k)}), d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}), d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1})).$$

在上式的两边取 $k \rightarrow \infty$ 且利用 (α_*1) 及 (2.6) 和 (2.10) 得到 $c \leq \alpha(c, 0, 0)$, 于是根据 (α_*2) 得到 $c = 0$, 这是一个矛盾. 类似地, 如果 $m(k)$ 是奇数且 $n(k)$ 是偶数, 则根据 (2.1) 得到

$$d(Tx_{n(k)}, Sx_{m(k)}) \leq \alpha(d(x_{n(k)}, x_{m(k)}), d(x_{n(k)}, Tx_{n(k)}), d(x_{m(k)}, Sx_{m(k)})),$$

即

$$d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1}) \leq \alpha(d(x_{n(k)}, x_{m(k)}), d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}), d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1})).$$

在上式的两边取 $k \rightarrow \infty$ 且利用 (α_*1) 及 (2.6) 和 (2.10) 得到 $c \leq \alpha(c, 0, 0)$, 于是根据 (α_*2) 得到 $c = 0$, 这也是一个矛盾. 这些矛盾说明 $\{x_n\}$ 是柯西序列, 根据 (X, d) 的完备性, 存在 $z \in X$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) = 0.$$

根据 (2.1) 有 $d(Tz, Sx_{2n+1}) \leq \alpha(d(z, x_{2n+1}), d(z, Tz), d(x_{2n+1}, Sx_{2n+1}))$, 即

$$d(Tz, x_{2n+2}) \leq \alpha(d(z, x_{2n+1}), d(z, Tz), d(x_{2n+1}, x_{2n+2})).$$

在上式的两边取 $n \rightarrow \infty$ 且利用 (α_*1) , 则得到

$$d(Tz, z) \leq \alpha(0, d(z, Tz), 0),$$

于是根据 $(\alpha_*)2$ 得到 $d(Tz, z) = 0$, 从而 $Tz = z$.

再次根据 (2.1) 有 $d(z, Sz) = d(Tz, Sz) \leq \alpha(d(z, z), d(z, Tz), d(z, Sz)) = \alpha(0, 0, d(z, Sz))$, 因此根据 $(\alpha_*)2$ 得到 $d(z, Sz) = 0$, 于是 $Sz = z = Tz$.

假设 w 也是 S 和 T 的公共不动点, 则根据 (2.1) 得到

$$d(w, z) = d(Tw, Sz) \leq \alpha(d(w, z), d(w, Tw), d(z, Sz)) = \alpha(d(w, z), 0, 0),$$

因此根据 $(\alpha_*)2$ 得到 $d(w, z) = 0$, 即得 $w = z$. 于是 z 是 S 和 T 的唯一公共不动点.

例 2.3 设 $X = [0, \frac{1}{4}]$ 且 $d(x, y) = |x - y|$, $\forall x, y \in X$, 则 (X, d) 是完备的. 定义两个映射 $T, S : X \rightarrow X$ 如下

$$Tx = \frac{1}{5}x, \quad Sx = \frac{1}{6}x, \quad \forall x \in X.$$

考虑例 2.2 中的 $\alpha \in \mathcal{A}_*$. 如果 $x \leq \alpha(x, x, x)$, 则

$$x \leq \frac{3x}{3+6x} = \frac{1}{1+2x}x,$$

因此 $x = 0$.

对任何 $x, y \in X$, 可以假设 $0 \leq x \leq y \leq \frac{1}{4}$, 则

$$d(Tx, Sy) = d(\frac{1}{5}x, \frac{1}{6}y) = |\frac{1}{5}x - \frac{1}{6}y| \leq \frac{1}{5}(y-x) + \frac{1}{30}y$$

且

$$\begin{aligned} & \alpha(d(x, y), d(x, Tx), d(y, Sy)) \\ &= \alpha((y-x), \frac{4}{5}x, \frac{5}{6}y) \\ &= \frac{1}{3+2[(y-x)+\frac{4}{5}x+\frac{5}{6}y]}(y-x) + \frac{1}{3+2[(y-x)+\frac{4}{5}x+\frac{5}{6}y]} \times \frac{4}{5}x \\ & \quad + \frac{1}{3+2[(y-x)+\frac{4}{5}x+\frac{5}{6}y]} \times \frac{5}{6}y \\ &\geq \frac{1}{3+2[\frac{1}{4}+\frac{4}{5} \times \frac{1}{4}+\frac{5}{6} \times \frac{1}{4}]}(y-x) + 0 + \frac{1}{3+2[\frac{1}{4}+\frac{4}{5} \times \frac{1}{4}+\frac{5}{6} \times \frac{1}{4}]} \times \frac{5}{6}y \\ &\geq \frac{1}{5}(y-x) + \frac{1}{30}y. \end{aligned}$$

因此

$$d(Tx, Sy) \leq \alpha(d(x, y), d(x, Tx), d(y, Sy)), \forall x, y \in X,$$

即 (2.1) 成立. 于是定理 2.1 的所有条件被满足, 因此 T 和 S 有唯一公共不动点 0.

考虑一个函数 $\alpha : (\mathbb{R}^+)^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\alpha(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3$, $\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^+$, 其中 $a, b, c \in [0, \infty)$ 满足 $a + b + c < 1$. 则 $\alpha \in \mathcal{A}_*$ 且 α 满足 $x \leq \alpha(x, x, x)$ 当且仅当 $x = 0$. 因此根据定理 2.1 及满足 $a = 0$ 及 $b = c$ 或 $a = b = c$ 的上述函数 α , 可以得到度量空间上的 Kannan 型公共不动点定理及推广的 Kannan 型公共不动点定理.

推论 2.1 设 (X, d) 是完备的度量空间, $S, T : X \rightarrow X$ 是两个映射. 如果对任何 $x, y \in X$,

$$d(Tx, Sy) \leq b[d(x, Tx) + d(y, Sy)],$$

其中 $b \in [0, \frac{1}{2})$. 则 S 和 T 有唯一公共不动点.

推论 2.2 设 (X, d) 是完备的度量空间, $S, T : X \rightarrow X$ 是两个映射. 如果对任何 $x, y \in X$,

$$d(Tx, Sy) \leq a[d(x, y) + d(x, Tx) + d(y, Sy)],$$

其中 $a \in [0, \frac{1}{3})$. 则 S 和 T 有唯一公共不动点.

下列结果是定理 2.1 在度量空间的非完备条件下的表现形式.

定理 2.2 设 (X, d) 是度量空间, $\alpha \in \mathcal{A}_*$ 且 $S, T : X \rightarrow X$ 是两个映射. 假设

(i) 对任何给定点 $x_0 \in X$, 由满足条件 $x_{2n+1} = Tx_{2n}$ 及 $x_{2n+2} = Sx_{2n+1}$ 所构造出的序列 $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ 有一个子序列 $\{x_{n_i}\}$ 收敛于某个点 $z \in X$;

(ii) (2.1) 成立.

如果 $z \leq \alpha(z, z, z)$ 当且仅当 $z = 0$, 则 S 和 T 有唯一公共不动点.

证 利用 (ii), 并采用定理 2.1 的证明过程, 可证明 $\{x_n\}$ 是柯西的. 因此根据 (i), 存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_i}\}$ 使得 $\{x_{n_i}\}$ 收敛于某点 $z \in X$, 即

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(x_{n_i}, z) = 0.$$

于是根据 $\{x_n\}$ 的柯西性容易得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) = 0.$$

根据 (ii) 有 $d(Tz, Sx_{2n+1}) \leq \alpha(d(z, x_{2n+1}), d(z, Tz), d(x_{2n+1}, Sx_{2n+1}))$, 即

$$d(Tz, x_{2n+2}) \leq \alpha(d(z, x_{2n+1}), d(z, Tz), d(x_{2n+1}, x_{2n+2})).$$

在上式的两边取 $n \rightarrow \infty$ 且利用 (α_*1) , 则得到

$$d(Tz, z) \leq \alpha(0, d(z, Tz), 0),$$

于是根据 (α_*2) 得到 $Tz = z$.

再次根据 (ii) 有 $d(z, Sz) = d(Tz, Sz) \leq \alpha(d(z, z), d(z, Tz), d(z, Sz)) = \alpha(0, 0, d(z, Sz))$, 因此根据 (α_*2) 得到 $d(z, Sz) = 0$, 于是 $Sz = z = Tz$.

假设 w 也是 S 和 T 的公共不动点, 则根据 (2.1) 得到

$$d(w, z) = d(Tw, Sz) \leq \alpha(d(w, z), d(w, Tw), d(z, Sz)) = \alpha(d(w, z), 0, 0),$$

因此根据 (α_*2) 得到 $d(w, z) = 0$, 即有 $w = z$. 于是 z 是 S 和 T 的唯一公共不动点.

现在, 将给出度量空间上满足 $\mathcal{A}_*$ -压缩条件的无穷多个映射的公共不动点存在定理.

定理 2.3 设 (X, d) 是完备的度量空间, $\{T_i\}_{i=1}^\infty$ 是 X 上无穷多个自映射. 假设对任何 $i, j = 1, 2, \dots$ 且 $i \neq j$ 及任何 $x, y \in X$,

$$d(T_i x, T_j y) \leq \alpha(d(x, y), d(x, T_i x), d(y, T_j y)), \quad (2.11)$$

其中 $\alpha \in \mathcal{A}_*$ 满足 $z \leq \alpha(z, z, z)$ 当且仅当 $z = 0$. 则 $\{T_i\}_{i=1}^\infty$ 有唯一公共不动点.

证 令 $x_0 \in X$ 并构造一个序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 使其满足 $x_n = T_n x_{n-1}$, $\forall n = 1, 2, \dots$.

对任何 $n = 1, 2, \dots$, 根据 (2.11) 得到

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(T_n x_{n-1}, T_{n+1} x_n) \leq \alpha(d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, T_n x_{n-1}), d(x_n, T_{n+1} x_n)),$$

即

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha(d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})). \quad (2.12)$$

因此根据 $(\alpha_*)2)$ 得到

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_{n-1}, x_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

因此 $\{d(x_n, x_{n+1})\}_{n=1}^\infty$ 是单调递减非负实序列, 于是存在 $a \in [0, \infty)$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = a$. 在 (2.12) 的两边取 $n \rightarrow \infty$ 且利用 $(\alpha_*)1)$ 得到

$$a \leq \alpha(a, a, a).$$

因此根据 α 的性质可知 (2.6) 成立.

假设序列 $\{x_n\}$ 不是柯西的, 则存在 $c \in \mathbb{R}$ 且 $c > 0$ 使得对任何 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $m(k), n(k) \in \mathbb{N}$ 且 $m(k) > n(k) > k$ 使得 (2.7) 成立. 令 $m(k)$ 是大于 $n(k)$ 且满足 (2.7) 的最小整数, 则有

$$d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geq c, \quad d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) < c, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.13)$$

根据 (2.13) 得到

$$c \leq d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) \leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + c.$$

在上式的两边取 $k \rightarrow \infty$ 且利用 (2.6), 则得到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) = c. \quad (2.14)$$

于是用与定理 2.1 的证明完全相同方式能得到 (2.10).

根据 (2.11) 得到

$$d(T_{m(k)+1} x_{m(k)}, T_{n(k)+1} x_{n(k)}) \leq \alpha(d(x_{m(k)}, x_{n(k)}), d(x_{m(k)}, T_{m(k)+1} x_{m(k)}), d(x_{n(k)}, T_{n(k)+1} x_{n(k)})),$$

整理得

$$d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) \leq \alpha(d(x_{m(k)}, x_{n(k)}), d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}), d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1})).$$

在上式两边取 $k \rightarrow \infty$, 则根据 (2.6) 和 (2.10) 得到 $c \leq \alpha(c, 0, 0)$, 因此得到 $c = 0$, 这是一个矛盾. 这一矛盾说明 $\{x_n\}$ 是柯西序列. 于是根据完备性, 存在 $z \in X$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) = 0.$$

任意固定 $n = 1, 2, \dots$, 并任取 $i \in \mathbb{N}$ 且 $i > n$, 则根据 (2.11) 有

$$d(T_{i+1} x_i, T_n z) \leq \alpha(d(x_i, z), d(x_i, T_{i+1} x_i), d(z, T_n z)),$$

即

$$d(x_{i+1}, T_n z) \leq \alpha(d(x_i, z), d(x_i, x_{i+1}), d(z, T_n z)). \quad (2.15)$$

在 (2.15) 的两边取 $i \rightarrow \infty$, 则得到

$$d(z, T_n z) \leq \alpha(0, 0, d(z, T_n z)),$$

这推出

$$T_n z = z, \forall n = 1, 2, \dots$$

因此 z 是 $\{T_i\}_{i=1}^\infty$ 的公共不动点. 如果 y 也是 $\{T_i\}_{i=1}^\infty$ 的公共不动点, 则根据 (2.11) 得到

$$d(z, y) = d(T_1 z, T_2 y) \leq \alpha(d(z, y), d(z, T_1 z), d(y, T_2 y)) = \alpha(d(z, y), 0, 0),$$

因此 $d(z, y) = 0$, 即 $z = y$. 于是 z 是 $\{T_i\}_{i=1}^\infty$ 的唯一公共不动点.

根据定理 2.3, 给出比定理 2.3 更一般形式的公共不动点存在定理.

定理 2.4 设 (X, d) 是完备的度量空间, $\{T_i\}_{i=1}^\infty$ 是 X 上的自映射族, $\{m_i\}_{i=1}^\infty$ 是自然数组. 假设对任何 $i, j = 1, 2, \dots$ 且 $i \neq j$ 及任何 $x, y \in X$,

$$d(T_i^{m_i} x, T_j^{m_j} y) \leq \alpha(d(x, y), d(x, T_i^{m_i} x), d(y, T_j^{m_j} y)), \quad (2.16)$$

其中 $\alpha \in \mathcal{A}_*$ 满足 $z \leq \alpha(z, z, z)$ 当且仅当 $z = 0$. 则 $\{T_i\}_{i=1}^\infty$ 有唯一公共不动点.

证 令 $f_i = T_i^{m_i}$, $\forall i = 1, 2, \dots$, 则 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ 满足定理 2.3 的所有条件, 因此 $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ 有唯一公共不动点 $u \in X$.

任意固定 $i \in \mathbb{N}$. 因为 $f_i T_i u = T_i f_i u = T_i u$, 因此 $T_i u$ 是 f_i 的不动点. 对任何 $j \in \mathbb{N}$ 且 $j \neq i$, 根据 (2.16) 有 $d(f_i T_i u, f_j T_j u) \leq \alpha(d(T_i u, T_j u), d(T_i u, f_i T_i u), d(T_i u, f_j T_j u))$, 即

$$d(T_i u, f_j T_j u) \leq \alpha(0, 0, d(T_i u, f_j T_j u)),$$

这导出 $d(T_i u, f_j T_j u) = 0$. 因此 $T_i u$ 是 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 的公共不动点, 于是根据 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 的公共不动点的唯一性得到 $T_i u = u (\forall i \in \mathbb{N})$, 这说明 u 是 $\{T_i\}_{i=1}^\infty$ 的公共不动点. 显然, u 是 $\{T_i\}_{i=1}^\infty$ 的唯一公共不动点.

例 2.4 考虑例 2.3 中的完备度量空间及 $\alpha \in \mathcal{A}_*$. 令 $T_i x = \frac{1}{3^i} x$, $m_i = 2i$, $\forall i = 1, 2, \dots$ 及任意 $x \in X$. 对任何 $x, y \in X$ 及 $i, j = 1, 2, \dots$, 我们可以假设 $0 \leq x \leq y \leq \frac{1}{4}$ 且 $1 \leq i < j$. 因为

$$d(T_i^{m_i} x, T_j^{m_j} y) = \left| \frac{1}{(3i)^{2i}} x - \frac{1}{(3j)^{2j}} y \right| \leq \frac{1}{(3i)^{2i}} (y - x) + \left[\frac{1}{(3i)^{2i}} - \frac{1}{(3j)^{2j}} \right] y \leq \frac{1}{4} (y - x) + \frac{1}{5} y,$$

且

$$\begin{aligned}
 \alpha(d(x, y), d(x, T_i^{m_i} x), d(y, T_j^{m_j} y)) &= \alpha((y-x), (1 - \frac{1}{(3i)^{2i}})x, (1 - \frac{1}{(3j)^{2j}})y) \\
 &= \frac{(y-x) + (1 - \frac{1}{(3i)^{2i}})x + (1 - \frac{1}{(3j)^{2j}})y}{3 + 2[(2 - \frac{1}{(3j)^{2j}})y - \frac{1}{(3i)^{2i}}x]} \\
 &\geq \frac{(y-x) + (1 - \frac{1}{(3i)^{2i}}) \times 0 + (1 - \frac{1}{(3j)^{2j}})y}{3 + 2[(2 - \frac{1}{(3j)^{2j}}) \times \frac{1}{4} - \frac{1}{(3i)^{2i}} \times 0]} \\
 &= \frac{(y-x)}{4 - \frac{1}{2(3j)^{2j}}} + \frac{(1 - \frac{1}{(3j)^{2j}})y}{4 - \frac{1}{2(3j)^{2j}}} \\
 &\geq \frac{1}{4}(y-x) + \frac{2((3j)^{2j} - 1)y}{8(3j)^{2j} - 1} \\
 &\geq \frac{1}{4}(y-x) + \frac{1}{5}y. (\because (3j)^{2j} > 9),
 \end{aligned}$$

因此 (2.16) 成立. 于是 $\{T_i\}_{i=1}^\infty$, $\{m_i\}_{i=1}^\infty$ 及 α 满足定理 2.4 的所有条件, 故 $\{T_i\}_{i=1}^\infty$ 有唯一公共不动点 0.

最后, 将给出非完备的度量空间上满足 $\mathcal{A}_*$ - 压缩条件的无穷多的映射的公共不动点定理.

定理 2.5 设 (X, d) 是度量空间且 $\{T_i\}_{i=1}^\infty$ 是 X 上的自映射族. 假设

(i) 对任何 $x_0 \in X$, 由满足条件 $x_{n+1} = T_{n+1}x_n$ 所构造的序列 $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ 有一个收敛于某个点 $z \in X$ 子序列 $\{x_{n_i}\}$;

(ii) 存在 $\alpha \in \mathcal{A}_*$ 使得 (2.11) 成立.

如果 $\alpha \in \mathcal{A}_*$ 满足 $z \leq \alpha(z, z, z)$ 当且仅当 $z = 0$. 则 $\{T_i\}_{i=1}^\infty$ 有一个公共不动点.

证 在定理 2.3 的证明中, 仅利用 (ii) 证明了 (i) 中构造出的序列 $\{x_n\}$ 是柯西的. 根据 (i), 存在其子序列 $\{x_{n_i}\}$ 使得收敛于点 $z \in X$, 即 $\lim_{i \rightarrow \infty} d(x_{n_i}, z) = 0$. 因此根据 $\{x_n\}$ 的柯西性得知 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z) = 0$. 余下的证明完全类似于定理 2.3 的后半部分的证明, 因此省去其详细证明.

定理 2.5 的推广形式如下.

定理 2.6 设 (X, d) 是度量空间, $\{T_i\}_{i=1}^\infty$ 是 X 上的自映射族, $\{m_i\}_{i=1}^\infty$ 是自然数组. 假设

(i) 对任何 $x_0 \in X$, 由满足条件 $x_{n+1} = T_{n+1}^{m_{n+1}}x_n$ 所构造的序列 $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ 有一个子序列 $\{x_{n_i}\}$ 收敛于某个点 $z \in X$;

(ii) 存在 $\alpha \in \mathcal{A}_*$ 使得 (2.16) 成立.

如果 $\alpha \in \mathcal{A}_*$ 满足 $z \leq \alpha(z, z, z)$ 当且仅当 $z = 0$. 则 $\{T_i\}_{i=1}^\infty$ 有唯一公共不动点.

参 考 文 献

- [1] Akram M, Zafar A A, Siddiqui A A. A general class of contractions: $\mathcal{A}$ -contractions [J]. Novi Sad J. Math., 2008, 38(1): 25-33.
- [2] Banach S. Sur les operations dans ensembles abstraits et application aux equations integere [J]. Fand Math., 1922, 43(3): 28-31.
- [3] Kannan R. Some results on fixed points [J]. Bull. Calcutta Math. Soc., 1968, 60: 71-76.

- [4] Mantu Saha, Debashis Dey. Fixed point theorems for $\mathcal{A}$ -contraction mappings of integral type [J]. Journal of Nonlinear Science and Applications., 2012, 5(2): 84–92.
- [5] Khan M O. On fixed point theorem [J]. Math. Japonica., 1978/1979, 23(2): 201–204.
- [6] Bianchini R. Su un Problema di S. Reich riguardante la teori dei punti fissi [J]. Boll. Un. Mat. Ital., 1972, 5(4): 103–108.
- [7] Reich S. Kannan's fixed point theorem [J]. Boll. Un. Mat. Ital., 1971, 4(1): 1–11.
- [8] Shukla D P, Tiwari S K. Unique fixed point for s -weak contractive mappings [J]. Gen. Math., 2011, 4(1): 28–34.
- [9] 石仁淑, 朴勇杰. 复值度量空间上 $\mathcal{A}$ - 隐式收缩的映射的不动点和公共不动点 [J]. 吉林大学学报 (理学版), 2016, 54(4): 743–747.
- [10] 朴勇杰. 度量空间上 $\mathcal{A}$ - 收缩映射的不动点定理的改进 [J]. 数学物理学报, 2018, 58(5): 855–863.

UNIQUE COMMON FIXED POINTS FOR $\mathcal{A}_*$ -IMPLICIT CONTRACTIVE MAPPINGS ON METRIC SPACES

PIAO Yong-jie

(*Department of Mathematics, College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China*)

Abstract: In this paper, we study the existence of unique fixed points of self-mapping families on metric spaces. By introducing a new ternary function class $\mathcal{A}_*$, which is a generalization of the known classes $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}^*$, and using class $\mathcal{A}_*$ to establish the implicit contractive condition for the mapping family, we obtain the theorem that the mapping family has a unique common fixed point on metric space. Our results generalize and improve the (common) fixed point theorems and corresponding results of Banach type and Kannan type. Finally, some specific examples are given to verify the correctness of the results.

Keywords: $\mathcal{A}$ -contraction; $\mathcal{A}^*$ -contraction; $\mathcal{A}_*$ -contraction; common fixed point

2010 MR Subject Classification: 47H10; 54H25; 55M20