Vol. 42 (2022)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

β-Hermite 系综关于 β-Laguerre 系综的逼近

蔡孟纯 [1]，雷良贞 [2]，马宇韬 [1]

(1. 北京师范大学数学科学学院, 北京 100875)
(2. 首都师范大学数学科学学院, 北京 100048)

摘 要: 本文研究了 β-Hermite 系综关于 β-Laguerre 系综在 Kullback-Leibler 距离和全变差距离下逼近的问题. 利用 Pinsker 不等式和 β-Hermite 系综的中心极限定理以及 β-Laguerre 系综的三阶矩, 我们获得了两种距离下逼近的充要条件. 此结果推广了文献 [4] 中的结果 .

关 键 词: Beta-Hermite 系综; Beta-Laguerre 系综; Kullback-Leibler 距离; 全变差距离
MR(2010) **主题分类号**: 15B52; 39B62; 60B12　　**中 图 分 类 号**: O211.4
文 献 标 识 码: A　　**文 章 编 号**: 0255-7797(2022)05-0437-08

1 引言

给定 $\beta > 0$ 且 n 为正整数, 若 n 维随机向量 $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$ 具有联合密度函数:

$$f_\beta(x_1, ..., x_n) = K_n^\beta \prod_{1\le i\le j\le n} |x_i - x_j|^\beta \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} {x_i}^2}, \tag{1.1}$$

则称其为一个以 n 和 β 为参数的 β-Hermite 系综. 其中

$$K_n^\beta = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma\left(1+\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\beta}{2}i\right)}$$

是规范化系数.

设 n, p 为正整数且 $p > n$, 若非负随机向量 $\lambda := (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ 具有联合概率密度:

$$f_{n,\beta}(x_1, ..., x_n) = c_n^{\beta,p} \prod_{1\le i\le j\le n} |x_i - x_j|^\beta \prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{\beta}{2}(p-n+1)-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}, \tag{1.2}$$

则称其为一个以 p , n 和 β 为参数的 β-Laguerre 系综. 其中

$$c_n^{\beta,p} = 2^{-\frac{\beta np}{2}} \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma\left(1+\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\beta}{2}i\right)\Gamma\left((p-n+i)\frac{\beta}{2}\right)}$$

*收稿日期: 2021-01-13　　接收日期: 2021-03-01
基金项目: 国家自然科学基金资助 (NSFC12171038; 11871008).
作者简介: 蔡孟纯 (1993–), 男, 云南, 博士研究生, 主要研究方向: 随机矩阵.

是规范化系数.

β 系综为量子力学中非常重要的一个研究主体. 与著名的 GOE、GUE 以及 Wishart 矩阵、正交多项式和 Selberg 积分都有紧密的联系. 其相关研究也非常热烈, 有很多成熟的结果.

Dumitriu 和 Edelman 在其著名工作 [1] 中将 β-Hermite 系综和 β-Laguerre 系综分别对应为两个对称的三对角随机矩阵特征值的联合密度函数 (也见文献 [2]), 文献 [3] 在文献 [1] 的基础上, 给出了 β-Hermite 和 β-Laguerre 系综矩的极限定理.

接下来, 我们简单介绍本文中需要用到的两个距离. 设 π_1 和 π_2 为定义在 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ 上的两个概率测度, 其中 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维欧氏空间, $\mathcal{B}$ 为 Borel-σ 代数. 定义 π_1 和 π_2 的全变差距离 $\|\pi_1-\pi_2\|_{\mathrm{TV}}$ 为:

$$\|\pi_1-\pi_2\|_{\mathrm{TV}}=2\sup_{A\in\mathcal{B}}|\pi_1(A)-\pi_2(A)|=\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)-g(x)|\,dx,$$

其中 f 和 g 分别为 π_1 和 π_2 相对于 Lebesgue 测度的密度函数.

定义 π_1 与 π_2 的 Kullback-Leibler 距离为:

$$D_{\mathrm{KL}}(\pi_1|\pi_2)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{d\pi_1}{d\pi_2}\log\frac{d\pi_1}{d\pi_2}d\pi_2.$$

两个距离之间满足 Pinsker 不等式:

$$\|\pi_1-\pi_2\|_{\mathrm{TV}}^2\leq 2D_{\mathrm{KL}}(\pi_1|\pi_2). \tag{1.3}$$

设随机向量 μ 和 λ 分别具有如 (1.1) 和 (1.2) 的概率密度函数. 对 $1\leq i\leq n$, 令 $\nu_i=\frac{\lambda_i-\beta p}{\sqrt{2\beta p}}$. 分别用 $\mathcal{L}(\nu)$ 和 $\mathcal{L}(\mu)$ 表示 ν 和 μ 的联合分布. Jiang 在文献 [4] 中证明了, 在 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3}{p}=0$ 的条件下, $\|\mathcal{L}(\nu)-\mathcal{L}(\mu)\|_{\mathrm{TV}}$ 趋于 0. 第三作者和合作者在文献 [5] 即在此条件下, 一个 β-Laguerre 系综本质上可以看作一个 β-Hermite 系综. 之后本文第三作者和 Jiang 综合 Pinsker 不等式和随机正交矩阵的特点, 给出了正交矩阵被独立标准正态逼近的充要条件. 之后本文第三作者和 Shen 在文献 [6] 中给出了 β-Laguerre 系综逼近 β-Jacobi 系综的充要条件. 从文献 [4] 的结果出发, 我们关心的问题是:

(1) 在同样的条件下, 是否可以把全变差距离换成其他比较强的距离, 比如 Kullback-Leibler 距离?

(2) 在全变差距离下, 条件 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3}{p}=0$ 是否已达最优? 利用 Jiang 和 Ma 在文献 [5] 中的方法, 得到本文的主要结果如下:

Theorem 1.1 设随机向量 $\mu=(\mu_1,...,\mu_n)$ 的联合概率密度 f_β 如 (1.1) 中所示, 非负随机向量 $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_n)$ 的联合概率密度函数 $f_{n,\beta}$ 如 (1.2) 中所示. 对 $1\leq i\leq n$, 令 $\nu_i=\frac{\lambda_i-\beta p}{\sqrt{2\beta p}}$. 记 $d(\mathcal{L}(\nu),\mathcal{L}(\mu))$ 为 $\mathcal{L}(\nu)$ 与 $\mathcal{L}(\mu)$ 的全变差距离或 Kullback-Leibler 距离, 我们有:

(1) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3}{p}=0$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}d(\mathcal{L}(\nu),\mathcal{L}(\mu))=0$,

(2) 若 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3}{p}=\gamma\in(0,+\infty)$, 则 $\varliminf\limits_{n\to+\infty}d(\mathcal{L}(\nu),\mathcal{L}(\mu))>0$.

2 (a) 定理证明前准备

在主要证明过程开始前, 我们先给出随机向量 $\nu=(\nu_1,...\nu_n)$ 的联合密度函数 $\tilde{f}_{n,\beta}$. 由 $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_n)$ 的联合密度函数 $f_{n,\beta}$ 易知, 当 $\nu_i\geq-\sqrt{\frac{\beta p}{2}}$, 对任意 $1\leq i\leq n$,

$$\tilde{f}_{n,\beta}(x)=\tilde{c}_n^{\beta,p}\prod_{1\leq i\leq j\leq n}|x_i-x_j|^\beta\prod_{i=1}^n\left(1+\sqrt{\frac{2}{\beta p}}x_i\right)^{\frac{\beta}{2}(p-n+1)-1}\cdot\exp\left(-\sqrt{\frac{\beta p}{2}}\sum_{i=1}^n x_i\right),\quad(2.1)$$

否则为 0, 其中 $\tilde{c}_n^{\beta,p}=c_n^{\beta,p}(\beta p)^{\frac{\beta np}{2}-\frac{n(n-1)\beta}{4}-\frac{n}{2}}2^{\frac{\beta n(n-1)}{4}+\frac{n}{2}}e^{-\frac{\beta np}{2}}$ 为规范化系数. 由此可得,

$$D_{\mathrm{KL}}\left(\mathcal{L}(\nu)|\mathcal{L}(\mu)\right)=\int_{\mathbb{R}^n}\log\frac{\tilde{f}_{n,\beta}(x)}{f_\beta(x)}\tilde{f}_{n,\beta}(x)\,dx_1...dx_n=\mathbb{E}\left(\log\frac{\tilde{f}_{n,\beta}(\nu)}{f_\beta(\nu)}\right),\quad(2.2)$$

其中随机向量 ν 具有如 (2.1) 的联合概率密度 $\tilde{f}_{n,\beta}$.

同时,

$$\|\mathcal{L}(\nu)-\mathcal{L}(\mu)\|_{\mathrm{TV}}=\int_{\mathbb{R}^n}\left|\tilde{f}_{n,\beta}(x)-f_\beta(x)\right|\,dx_1...dx_n=\mathbb{E}\left|\frac{\tilde{f}_{n,\beta}(\mu)}{f_\beta(\mu)}-1\right|.\quad(2.3)$$

其中随机向量 μ 具有如 (1.1) 的密度函数 f_β. 以下分两部分证明定理结论.

2 (b) 定理 1.(1) 的证明

先引入如下引理:

引理 2.1 假设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{p}=0$, 当 n 充分大时, 有 $\log\frac{\tilde{c}_n^{\beta,p}}{K_n^\beta}=-\frac{\beta n^3}{12p}+o\left(\frac{n^3}{p}\right)$.

证 由定义可得:

$$\begin{aligned}\log\frac{\tilde{c}_n^{\beta,p}}{K_n^\beta}=&-\frac{\beta}{2}np+\left(\frac{\beta}{4}n(n-1)+\frac{n}{2}-\frac{\beta np}{2}\right)\log 2+\frac{n}{2}\log(2\pi)\\&+\left(\frac{\beta np}{2}-\frac{\beta n(n-1)}{4}-\frac{n}{2}\right)\log(\beta p)-\sum_{i=0}^{n-1}\log\Gamma\left(\frac{\beta}{2}(p-i)\right).\end{aligned}\quad(2.4)$$

根据 Stirling 公式, 当 x 充分大时, 有:

$$\log\Gamma(x)=x\log x-x-\frac{1}{2}\log x+\log\sqrt{2\pi}+\frac{1}{12x}+O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

从而对任意 $0\leq i\leq n-1$, 当 p 充分大时,

$$\log\Gamma\left(\frac{\beta}{2}(p-i)\right)=(\frac{\beta}{2}(p-i)-\frac{1}{2})\log\frac{\beta\,(p-i)}{2}-\frac{\beta}{2}(p-i)+\log\sqrt{2\pi}+O\left(\frac{1}{p}\right).$$

回忆条件 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{p}=0$, 不难得到任意 $0\le i\le n-1$, 当 p 充分大时,

$$\log\frac{\beta(p-i)}{2}=\log\frac{\beta p}{2}-\frac{i}{p}-\frac{i^2}{2p^2}+O\left(\frac{i^3}{p^3}\right).$$

从而通过简单求和, 合并 $O(\frac{n^2}{p})$, 有

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}\log\Gamma\left(\frac{\beta}{2}(p-i)\right)&=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\beta}{2}(p-i)-\frac{1}{2}\right)\left(\log\frac{\beta p}{2}-\frac{i}{p}-\frac{i^2}{2p^2}\right)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\beta}{2}(p-i)\\&\quad+\frac{n}{2}\log(2\pi)+O\left(\frac{n^4}{p^2}\right)\\&=\left(\frac{\beta pn}{2}-\frac{\beta n(n-1)}{4}-\frac{n}{2}\right)\log\frac{\beta p}{2}-\frac{\beta pn}{2}+\frac{n^3}{12p}\\&\quad+\frac{n}{2}\log(2\pi)+O(\frac{n^2}{p}).\end{aligned}$$

回到 (2.4) 式, 最后得到在 p 充分大时, $\log\frac{\tilde{c}_n^{\beta,p}}{K_n^\beta}=-\frac{\beta n^3}{12p}+O\left(\frac{n^2}{p}\right)$.

定理 1. (1) 的证明

证 由 Pinsker 不等式 (1.3), 只需证明 $\mathcal{L}(\nu)$ 与 $\mathcal{L}(\mu)$ 的 Kullback-Leibler 距离在 $n\to+\infty$ 时趋于 0 即可. 记 $r:=\frac{\beta}{2}(p-n+1)-1$, 由 (2.1), 我们有

$$\begin{aligned}&D_{\mathrm{KL}}(\mathcal{L}(\nu)|\mathcal{L}(\mu))=\mathbb{E}\left(\log\frac{\tilde{f}_{n,\beta}(\nu)}{f_\beta(\nu)}\right)\\&=\log\frac{\tilde{c}_n^{\beta,p}}{K_n^\beta}+r\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\ \log\left(1+\sqrt{\frac{2}{\beta p}}\nu_i\right)-\sqrt{\frac{\beta p}{2}}\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\nu_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\nu_i^2\\&\le\log\frac{\tilde{c}_n^{\beta,p}}{K_n^\beta}+r\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\left(\sqrt{\frac{2}{\beta p}}\nu_i-\frac{\nu_i^2}{\beta p}+\left(\sqrt{\frac{2}{\beta p}}\right)^3\frac{\nu_i^3}{3}\right)-\sqrt{\frac{\beta p}{2}}\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\nu_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\nu_i^2\\&=\log\frac{\tilde{c}_n^{\beta,p}}{K_n^\beta}-\frac{\beta(n-1)+2}{\sqrt{2\beta p}}\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\nu_i+\frac{\beta(n-1)+2}{2\beta p}\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\nu_i^2+\frac{r}{3}\left(\sqrt{\frac{2}{\beta p}}\right)^3\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\nu_i^3.\end{aligned}\tag{2.5}$$

上式中不等号利用了基础不等式:

$$\log(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3},\qquad x>-1.$$

由文献 [5] 中引理 2.3 知:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\nu_i=0,\\&\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\nu_i^2=\tfrac{\beta n^2}{2}+o\left(n^2\right),\\&\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\nu_i^3=\sqrt{\tfrac{\beta}{8}}\tfrac{n^3}{\sqrt{p}}+o\left(\tfrac{n^3}{\sqrt{p}}\right).\end{aligned}\tag{2.6}$$

结合引理 2.1 , (2.5) 式以及 (2.6) 式可得到当 $n \to +\infty$ 时,

$$D_{\mathrm{KL}}\left(\mathcal{L}(\nu)|\mathcal{L}(\mu)\right) \leq -\frac{n^3}{12p}+\frac{\beta n^3}{6p}+\frac{\beta(n-1)n^2+n^2}{4p}+o\left(\frac{n^3}{p}\right).$$

因此在条件 $\lim\limits_{p\to\infty}\frac{n^3}{p}=0$ 下, 有 $\lim\limits_{p\to\infty}D_{\mathrm{KL}}\left(\mathcal{L}(\nu)|\mathcal{L}(\mu)\right)=0$.

3 定理 1. (2) 的证明

定理 1.(2) 的证明只需要考虑全变差距离情形下成立. 鉴于此目的, 我们需要给出 $\log\frac{\tilde{f}_{n,\beta}(\mu)}{f_\beta(\mu)}$ 的中心极限定理, 此处 μ 为 Hermite 系综. 为此, 先列出几个需要的引理.

引理 3.1 设随机向量 $\mu=(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)$ 为一个参数为 n, β 的 Hermite 系综, 则 $\forall\, k\in\mathbb{N}^+$,

$$\mathbb{E}\sum_{i=1}^n\left(\frac{\mu_i}{\sqrt{2n\beta}}\right)^k=\begin{cases}\frac{n}{16^m(m+1)}\binom{2m}{m}+o(n), & k=2m;\\ 0, & k=2m-1.\end{cases}$$

下一个引理, 来自文献 [3] Claim 3.2.1 和 3.2.2 中部分结论.

引理 3.2 设随机向量 $\mu=(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)$ 为一个参数为 n, β 的 Hermite 系综. $\forall\, k\in\mathbb{N}^+$, 有

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n\left(\frac{\mu_i}{\sqrt{2n\beta}}\right)^k\right)=\begin{cases}\frac{m}{\beta 16^m}\binom{2m}{m}^2+o(1), & k=2m;\\ \frac{8(2m-1)}{\beta 16^m}\binom{2(m-1)}{m-1}^2+o(1), & k=2m-1;\end{cases}$$

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^n\frac{\mu_i}{\sqrt{2n\beta}},\sum_{i=1}^n\left(\frac{\mu_i}{\sqrt{2n\beta}}\right)^3\right)=\frac{9}{16\beta}+o(1).$$

引理 3.3 设随机向量 $\mu=(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)$ 具有如 (1.1) 的联合概率密度 f_β, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{p}=\gamma\in(0,+\infty)$, 则 $n\to+\infty$ 时,

$$\eta_n:=-\frac{\beta(n-1)+2}{\sqrt{2\beta p}}\sum_{i=1}^n\mu_i+\frac{r}{3}\left(\sqrt{\frac{2}{\beta p}}\right)^3\sum_{i=1}^n\mu_i^3\xrightarrow{w}N(0,\frac{\beta\gamma}{6}).$$

此处 $\xrightarrow{w}$ 表示弱收敛.

证 由文献 [3] 中的定理 1.4, 可知 η_n 作为 $\sum_{i=1}^n\mu_i$ 和 $\sum_{i=1}^n\mu_i^3$ 的线性组合, 只要系数合适就会弱收敛到正态分布, 下面计算其期望和方差. 由引理 3.1, 易得 $\mathbb{E}\eta_n=0$. 关于 $\mathrm{Var}(\eta_n)$,

$$\mathrm{Var}(\eta_n)=C_1^2\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n\mu_i)+C_3^2\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n\mu_i^3)+2C_1C_3\mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^n\mu_i,\sum_{i=1}^n\mu_i^3).$$

由引理 3.2, 有

$$C_1^2\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n}\mu_i)=2n\beta C_1^2\left(\frac{1}{2\beta}+o(1)\right)=\frac{\beta n^3}{2p}+o\left(\frac{n^3}{p}\right);$$
$$C_3^2\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3)=8\beta^3n^3C_3^2\left(\frac{3}{8\beta}+o(1)\right)=\frac{2\beta n^3}{3p}+o\left(\frac{n^3}{p}\right);$$
$$2C_1C_3\mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^{n}\mu_i,\sum_{i=1}^{n}\mu_i^3)=-\frac{8\beta^2n^3}{3p}\left(\frac{9}{16\beta}+o(1)\right)=-\frac{3\beta n^3}{2p}+o(\frac{n^3}{p}).$$

故在 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{p}=\gamma$ 下, $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Var}(\eta_n)=\frac{\beta\gamma}{6}$. 证毕.

引理 3.4 设 $\sigma_n=p^{-\frac{3}{2}}\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i^5\,h\left(\sqrt{\frac{2}{\beta p}}\mu_i\right)$, 其中 μ 具有如 (1.1) 的联合概率密度 f_β, $h(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上连续. 在条件 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3}{p}=\gamma\in(0,+\infty)$ 下, 当 $n\to+\infty$ 时, σ_n 依概率收敛到 0.

证 对任意 $\epsilon>0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|\sigma_n|>\epsilon\right)&=\mathbb{P}\left(|\sigma_n|>\epsilon,\ \max_i\left|\sqrt{\frac{2}{\beta p}}\mu_i\right|\le\frac{1}{2}\right)+\mathbb{P}\left(|\sigma_n|>\epsilon,\ \max_i\left|\sqrt{\frac{2}{\beta p}}\mu_i\right|>\frac{1}{2}\right)\\&\le\mathbb{P}\left(|\sigma_n|>\epsilon,\ \max_i\left|\sqrt{\frac{2}{\beta p}}\mu_i\right|\le\frac{1}{2}\right)+\mathbb{P}\left(\max_i\left|\sqrt{\frac{2}{\beta p}}\mu_i\right|>\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

令 $\tau:=\sup\limits_{|x|\le\frac{1}{2}}|h(x)|$, 由 $h(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上的连续性可知 $\tau<+\infty$.
在 $\max\limits_i\left|\sqrt{\frac{2}{\beta p}}\mu_i\right|\le\frac{1}{2}$ 限制下, 有 $|\sigma_n|\le\tau\cdot p^{-\frac{3}{2}}\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i^5$. 由引理 3.1 和引理 3.2, 易知:

$$\mathbb{E}\left(p^{-\frac{3}{2}}\sum_{i=1}^{n}\mu_i^5\right)=0,\ \ \mathrm{Var}\left(p^{-\frac{3}{2}}\sum_{i=1}^{n}\mu_i^5\right)=O\left(\frac{n^5}{p^3}\right).$$

故在 $n\to+\infty$ 时, $p^{-\frac{3}{2}}\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i^5\xrightarrow{\mathbb{P}}0$. 因此, 在 $n\to+\infty$ 时, 不等式右端第一项趋于 0. 由文献 [4] 中引理 4.1, 知道 $\max\limits_{1\le i\le n}\left|\sqrt{\frac{2}{\beta p}}\mu_i\right|\xrightarrow{\mathbb{P}}0$. 故在 $n\to+\infty$ 时, 不等式右端第二项也趋于 0. 因此有:

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(|\sigma_n|>\epsilon\right)=0.$$

证毕.

定理 1.(2) 的证明 由 (2.1) 式易得:

$$\log\frac{\tilde{f}_{n,\beta}(\mu)}{f_\beta(\mu)}=r\sum_{i=1}^{n}\log\left(1+\sqrt{\frac{2}{\beta p}}\mu_i\right)-\sqrt{\frac{\beta p}{2}}\sum_{i=1}^{n}\mu_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2+\log\frac{\tilde{c}_n^{n,\beta}}{K_n^\beta},\tag{3.1}$$

其中 $r=\frac{\beta}{2}(p-n+1)-1$.

根据 Taylor 公式, 存在 $(-1,+\infty)$ 上的连续函数 $h(x)$, 使得:

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+x^5h(x). \tag{3.2}$$

由 (3.2) 式以及引理 , 可将 (3.1) 式化为, 在 n 充分大时,

$$\begin{aligned}\log\frac{\tilde{f}_{n,\beta}(\mu)}{f_\beta(\mu)}=&-\frac{\beta\gamma}{12}+C_1\sum_{i=1}^n\mu_i+C_2\sum_{i=1}^n\mu_i^2+C_3\sum_{i=1}^n\mu_i^3\\&+C_4\sum_{i=1}^n\mu_i^4+C_5\sum_{i=1}^n h\left(\sqrt{\frac{2}{\beta p}}\mu_i\right)\mu_i^5+o(1),\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 C_1,C_3 如上述引理中所给定义, 且

$$C_2=\frac{\beta(n-1)+1}{2\beta p},\ C_4=-\frac{r}{\beta^2p^2},\ C_5=\left(\sqrt{\frac{2}{\beta p}}\right)^5 r.$$

接下来我们证明

$$\log\frac{\tilde{f}_{n,\beta}(\mu)}{f_\beta(\mu)}\xrightarrow{w}\xi\sim N(-\frac{7\beta\gamma}{192},\frac{\beta\gamma}{6}),\ n\to\infty. \tag{3.4}$$

由表达式 (3.3)、引理 3.3 和引理 3.4, 我们只需要证明

$$C_2\sum_{i=1}^n\mu_i^2+C_4\sum_{i=1}^n\mu_i^4$$

依概率收敛到 $\frac{3\beta\gamma}{64}$. 由引理 3.1 知,

$$C_2\mathbb{E}\sum_{i=1}^n\mu_i^2+C_4\mathbb{E}\sum_{i=1}^n\mu_i^4=C_2(2\beta n^2)\mathbb{E}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(\frac{\mu_i}{\sqrt{2n\beta}}\right)^2+C_4(4\beta^2n^3)\mathbb{E}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left(\frac{\mu_i}{\sqrt{2n\beta}}\right)^4$$

收敛到

$$\frac{\beta\gamma}{16}-\frac{\beta\gamma}{64}=\frac{3\beta\gamma}{64}.$$

又由引理 3.2,

$$\mathrm{Var}\left(C_2\sum_{i=1}^n\mu_i^2\right)=O\left(\frac{n^4}{p^2}\right)\quad 和\quad \mathrm{Var}\left(C_4\sum_{i=1}^n\mu_i^4\right)=O\left(\frac{n^4}{p^2}\right)$$

都收敛到 0. 故

$$C_2\sum_{i=1}^n\mu_i^2+C_4\sum_{i=1}^n\mu_i^4$$

依概率收敛到 $\frac{3\beta\gamma}{64}$. 从而 (3.4) 得证. 最后由 Fatou 引理, 得到:

$$\varliminf_{n\to+\infty} \|\mathcal{L}(\nu)-\mathcal{L}(\mu)\|_{\mathrm{TV}} = \varliminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left|\frac{\tilde{f}_{n,\beta}(\mu)}{f_\beta(\mu)}-1\right| > 0.$$

至此, 我们证明了在 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3}{p}=\gamma\in(0,+\infty)$ 条件下, $\varliminf\limits_{n\to+\infty} d\left(\mathcal{L}(\nu),\mathcal{L}(\mu)\right)>0$.

参 考 文 献

[1] Dumitriu I., Edelman A. Matrix models for beta ensembles[J]. J. Math. Phys., 2002, 43(11): 5830–5847.

[2] Dumitriu I. Eigenvalues statistics for Beta-ensemble. Phd thesis. 1999.

[3] Dumitriu I., Edelman A. Global spectrum flucuations for the β-Hermite and β-Laguerre ensembles via matrix models[J]. J. Math. Phys., 2006, 47: 063302.

[4] Jiang T., Li D. Approximation of rectangular β Laguerre ensembles and large deviations[J]. J. Theor. Probab., 2015, 28: 804–847.

[5] Jiang T., Ma Y. Distances between random orthogonal matrices and independent normals[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 2019, 372: 1509–1553.

[6] Ma Y., Shen X. Approximation of rectangular beta-Jacobi ensembles by beta-Laguerre ensembles[J]. preprint.

APPROXIMATION OF β-LAGUERRE ENSEMBLES BY β-HERMITE ENSEMBLES

CAI Meng-chun[1], LEI Liang-zhen[2], MA Yu-tao[1]

(*1. School of Mathematical Sciences & Laboratory of Mathematics and Complex Systems of Ministry of Education, Beijing Normal University, Beijing 100875, China*)

(*2. School of Mathematical Science, Capital Normal University, Beijing 100048, China*)

Abstract: In this note, we consider the approximation of beta-Laguerre ensembles by beta-Hermite ensembles with respect to the total variation distance and the Kullback-Leibler divergence. Utilizing the Pinsker inequality, the central limit theorem of beta-Hermite ensembles and the explicit expression on the third moment of beta-Laguerre ensembles, we are able to offer sufficient and necessary conditions to this approximation. This result extends that in [4].

Keywords: β-Laguerre ensembles; β-Hermite ensembles; Kullback-Leibler divergence; total variation distance

2010 MR Subject Classification: 15B52; 39B62; 60B12