

RLW-KdV 方程的紧致有限差分格式

邓雅清, 王晓峰, 何育宇

(闽南师范大学数学与统计学院, 福建 漳州 363000)

摘 要: 本文研究了 RLW-KdV 方程的一个三层线性紧致有限差分格式. 该格式是质量守恒和能量守恒的, 用离散能量法证明了差分格式的收敛性和稳定性. 所建格式的收敛阶为 $O(\tau^2 + h^4)$. 数值实验验证了该格式的有效性和可靠性.

关键词: RLW-KdV 方程; 紧致有限差分格式; 守恒性; 稳定性; 收敛性

MR(2010) 主题分类号: 65M06; 65M12; 65M15

中图分类号: O241.82

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2022)05-0425-12

1 引言

非线性波是应用研究的重要领域之一. 目前, 已有很多科研人员建立了数学模型来研究非线性波动现象. Diederik Korteweg 和 Gustav de Vries^[1] 于 1895 年发现的 KdV 方程是描述单向运动的浅水波偏微分方程, 是非线性色散方程的典型代表. 自从发现 KdV 方程, 人们便对这个方程及其变化形式进行了大量研究. 盛秀兰^[2] 基于 Crank-Nicolson 方法对 KdV 方程周期边界问题提出一个两层线性化隐式差分格式, 其收敛阶数为 $O(\tau + h^2)$. 李家永^[3] 对定界的 KdV 方程提出一个二阶三层线性差分格式. Poochinapan 等人^[4] 对齐次边界的 KdV 方程提出两个四阶精度的有限差分格式. 何育宇等人^[5] 对 KdV 方程提出一个四阶三层线性紧致有限差分格式, 并证明了该格式是绝对稳定的. 正则化长波 (RLW) 方程最早是 Peregrine^[6] 提出的一种河道内小振幅长波的模型. Santarelli^[7] 研究了广义 RLW 方程中两个孤立波的非弹性碰撞. Chugini et al.^[8] 采用非多项式样条 (NPS) 基函数得到正则化长波 (RLW) 方程的近似解. Koide 和 Furihata^[9] 对 RLW 方程提出了四种守恒格式, 并用离散能量法证明了其中一种格式数值解的稳定性和收敛性.

Ghiloufi et al.^[10] 对 RLW-KdV 方程提出一种非线性守恒差分格式, 该格式在时间上二阶收敛, 在空间上四阶收敛. 利用能量法证明了近似解的存在性和差分格式的收敛性. Rouatbi et al.^[11] 提出了一种求解非线性色散 RLW-KdV 方程的高阶非线性保守差分格式方法. 利用 Brouwer 不动点定理证明了解的存在性. 此外, 证明了差分格式的无条件稳定性和唯一性. 在离散 L^∞ -范数下, 证明了该方法在空间上是四阶收敛, 在时间上是二阶收敛. 此外, 还给出了不同振幅的孤立波的相互作用. Rouatbi 和 Omrani^[12] 提出了非线性色散 RLW-KdV 方程的两种保守差分格式. 第一种格式是二阶非线性隐式, 第二种是三层线性隐式, 证明了解的存在性. 用离散能量法证明了这两种格式是唯一可解和无条件稳定的, 并且在 L^∞ -范数上具有二阶收敛性, 提出了一种求解非线性格式的迭代算法. Bayarassou 等人^[13]

*收稿日期: 2020-12-15 接收日期: 2022-03-14

基金项目: 福建省自然科学基金项目资助 (2020J01796).

作者简介: 邓雅清 (1995-), 女, 广东湛江, 研究生, 主要研究方向: 微分方程数值解.

通讯作者: 王晓峰 (1977-), 男, 教授, 主要研究方向: 微分方程数值解.

对 RLW-KdV 方程提出了一个系数矩阵为七对角矩阵的三层线性化隐式格式, 并利用离散能量法证明了该格式在空间上四阶收敛, 在时间上二阶收敛.

本文考虑一维三阶的非线性 RLW-KdV 方程^[13]

$$u_t - u_{xxt} + \alpha u_{xxx} + u_x + \beta u^p u_x = 0, \quad (x, t) \in [x_l, x_r] \times (0, T], \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [x_l, x_r], \quad (1.2)$$

$$u(x_l, t) = u(x_r, t) = 0, \quad u_x(x_l, t) = u_x(x_r, t) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (1.3)$$

其中 $u_0(x)$ 是已知的光滑函数, α 和 β 是任意实数. 本文利用 Taylor 展开式建立了一个三层线性紧致差分格式, 在时间上为二阶收敛, 在空间上为四阶收敛, 格式的系数矩阵只有五对角, 这与七对角相比减少了运算量.

2 紧致差分格式的构造

对求解区域 $[x_l, x_r] \times [0, T]$ 进行网格剖分, 取正整数 J, N , 并令空间步长为 $h = (x_r - x_l)/J$ 及时间步长为 $\tau = T/N$, 网格点 (x_j, t^n) 定义为 $x_j = x_l + jh, 0 \leq j \leq J$ 和 $t^n = n\tau, 0 \leq n \leq N$. 设 $u_j^n = (x_j, t^n)$ 为精确解, $U_j^n \approx (x_j, t^n)$ 为数值解. 定义

$$Z_h^0 = \{U = (U_j) | U_{-1} = U_0 = U_1 = U_J = U_{J+1} = 0, \quad -1 \leq j \leq J+1\}.$$

对任意 $U^n, V^n \in Z_h^0$, 定义如下差分算子、内积和范数

$$\begin{aligned} (U_j^n)_x &= \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{h}, \quad (U_j^n)_{\bar{x}} = \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{h}, \quad (U_j^n)_{\hat{x}} = \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h}, \\ (U_j^n)_t &= \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau}, \quad (U_j^n)_{\hat{t}} = \frac{U_j^{n+1} - U_j^{n-1}}{2\tau}, \quad \bar{U}_j^n = \frac{U_j^{n+1} + U_j^{n-1}}{2}, \\ \langle U^n, V^n \rangle &= h \sum_{j=1}^{J-1} U_j^n V_j^n, \quad \|U^n\|^2 = \langle U^n, U^n \rangle, \quad \|U^n\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq J-1} |U_j^n|. \end{aligned}$$

令

$$w = u_{xxt} - \alpha u_{xxx} - u_x - \frac{\beta}{p+1} (u^{p+1})_x, \quad (2.1)$$

则方程 (1.1) 可以写成 $w = u_t$. 由 Taylor 展开式, 得

$$w_j^n = (\partial_t u)_j^n = (U_j^n)_{\hat{t}} + O(\tau^2), \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} w_j^n &= [(U_j^n)_{x\bar{x}\hat{t}} - \frac{h^2}{12} (\partial_x^4 \partial_t u)_j^n] - \alpha [(U_j^n)_{x\bar{x}\hat{x}} - \frac{h^2}{4} (\partial_x^5 u)_j^n] - [(U_j^n)_{\hat{x}} - \frac{h^2}{6} (\partial_x^3 u)_j^n] \\ &\quad - \frac{\beta}{p+1} \left\{ [(U_j^n)^{p+1}]_{\hat{x}} - \frac{h^2}{6} (\partial_x^3 u^{p+1})_j^n \right\} + O(h^4). \end{aligned} \quad (2.3)$$

由 (2.1) 式, 可得

$$\alpha (\partial_x^5 u)_j^n = -(\partial_x^2 w)_j^n + (\partial_x^4 \partial_t u)_j^n - (\partial_x^3 u)_j^n - \frac{\beta}{p+1} (\partial_x^3 u^{p+1})_j^n. \quad (2.4)$$

将 (2.4) 式代入 (2.3) 式, 得

$$\begin{aligned} w_j^n &= (U_j^n)_{x\bar{x}\bar{t}} - \alpha(U_j^n)_{x\bar{x}\bar{x}} - (U_j^n)_{\hat{x}} - \frac{\beta}{p+1}[(U_j^n)^{p+1}]_{\hat{x}} + \frac{h^2}{6}(\partial_x^4 \partial_t u)_j^n - \frac{h^2}{12}(\partial_x^3 u)_j^n \\ &\quad - \frac{\beta h^2}{12(p+1)}(\partial_x^3 u^{p+1})_j^n - \frac{h^2}{4}(\partial_x^2 w)_j^n + O(h^4). \end{aligned} \quad (2.5)$$

用二阶精度进行逼近, 有

$$(\partial_x^4 \partial_t u)_j^n = (U_j^n)_{xx\bar{x}\bar{x}\bar{t}} + O(h^2), \quad (2.6)$$

$$(\partial_x^3 u)_j^n = (U_j^n)_{x\bar{x}\bar{x}} + O(h^2), \quad (2.7)$$

$$(\partial_x^3 u^{p+1})_j^n = [(U_j^n)^{p+1}]_{x\bar{x}\bar{x}} + O(h^2), \quad (2.8)$$

$$(\partial_x^2 w)_j^n = (W_j^n)_{x\bar{x}} + O(h^2). \quad (2.9)$$

将 (2.6)–(2.9) 式代入 (2.5) 式, 我们得到以下紧致差分格式

$$\begin{aligned} (U_j^n)_{\hat{t}} - (1 - \frac{h^2}{4})(U_j^n)_{x\bar{x}\bar{t}} + (\alpha + \frac{h^2}{12})(\bar{U}_j^n)_{x\bar{x}\bar{x}} + (\bar{U}_j^n)_{\hat{x}} - \frac{h^2}{6}(\bar{U}_j^n)_{xx\bar{x}\bar{x}\bar{t}} + \frac{\beta}{p+1}[(U_j^n)^p(\bar{U}_j^n)]_{\hat{x}} \\ + \frac{\beta h^2}{12(p+1)}[(U_j^n)^p(\bar{U}_j^n)]_{x\bar{x}\bar{x}} = 0, \quad 1 \leq j \leq J-1, \quad 1 \leq n \leq N-1, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$U_j^0 = u_0(x_j), \quad 0 \leq j \leq J, \quad (2.11)$$

$$U_0^n = U_J^n = 0, \quad (U_0^n)_{\hat{x}} = (U_J^n)_{\hat{x}} = 0, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (2.12)$$

由于差分格式 (2.10)–(2.12) 是三层线性隐式格式, 所以需要下面的两层线性格式来计算 U^1

$$\begin{aligned} (U_j^0)_{\hat{t}} - (1 - \frac{h^2}{4})(U_j^0)_{x\bar{x}\bar{t}} + (\alpha + \frac{h^2}{12})(U_j^{\frac{1}{2}})_{x\bar{x}\bar{x}} + (U_j^{\frac{1}{2}})_{\hat{x}} - \frac{h^2}{6}(U_j^{\frac{1}{2}})_{xx\bar{x}\bar{x}\bar{t}} + \frac{\beta}{p+1}[(U_j^0)^p(\bar{U}_j^{\frac{1}{2}})]_{\hat{x}} \\ + \frac{\beta h^2}{12(p+1)}[(U_j^0)^p(\bar{U}_j^{\frac{1}{2}})]_{x\bar{x}\bar{x}} = 0, \quad 1 \leq j \leq J-1, \end{aligned} \quad (2.13)$$

其中 $U_j^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(U_j^1 + U_j^0)$.

3 差分格式的守恒性

引理 3.1^[14] 对任意两个网格函数 $U^n, V^n \in Z_h^0$, 则

$$\begin{aligned} \langle U_{\bar{x}}, V^n \rangle &= -\langle U^n, V_x \rangle, \quad \langle U_{\hat{x}}, V^n \rangle = -\langle U^n, V_{\hat{x}} \rangle, \quad \langle U_{\hat{x}}, U^n \rangle = 0, \quad \langle U_{x\bar{x}\bar{x}}, U^n \rangle = 0, \\ \langle U_{\hat{t}}, 2\bar{U}^n \rangle &= \|U^n\|_{\hat{t}}^2, \quad \langle U_{x\bar{x}}, U^n \rangle = -\|U_x^n\|^2, \quad \langle U_{xx\bar{x}\bar{x}}, U^n \rangle = \|U_{x\bar{x}}^n\|^2. \end{aligned}$$

定理 3.1 设 $u_0 \in H_0^2[x_l, x_r]$, $u(x, t) \in C_{x,t}^{6,3}[x_l, x_r]$, 则差分格式 (2.10)–(2.12) 关于以下离散质量和离散能量是守恒的, 即

$$Q^n = Q^{n-1} = \dots = Q^0, \quad (3.1)$$

$$E^n = E^{n-1} = \dots = E^0, \quad (3.2)$$

其中

$$Q^n = h \sum_{j=1}^{J-1} (U_j^{n+1} + U_j^n),$$

$$\begin{aligned} E^n &= \|U^{n+1}\|^2 + \|U^n\|^2 + (1 - \frac{h^2}{4})(\|U_x^{n+1}\|^2 + \|U_x^n\|^2) - \frac{h^2}{6}(\|U_{x\bar{x}}^{n+1}\|^2 + \|U_{x\bar{x}}^n\|^2) \\ &\quad + \frac{\beta\tau h}{3(p+1)} \sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^{J-1} [(U_j^\ell)^p (\bar{U}_j^\ell)]_{\hat{x}} (\bar{U}_{j-1}^\ell + 10\bar{U}_j^\ell + \bar{U}_{j+1}^\ell), \quad 0 \leq n \leq N. \end{aligned}$$

证 将 (2.10) 式两端乘以 h 后对 j 求和, 根据边界条件 (2.12), 可得

$$h \sum_{j=1}^{J-1} (U_j^{n+1} - U_j^{n-1}) = 0,$$

即 $h \sum_{j=1}^{J-1} (U_j^{n+1} + U_j^n) = h \sum_{j=1}^{J-1} (U_j^n + U_j^{n-1})$, 从而 (3.1) 式得证. 将 (2.10) 式两端与 $2\bar{U}^n$ 作内积, 由引理 3.1 可得

$$\begin{aligned} &\|U^n\|_{\hat{t}}^2 + (1 - \frac{h^2}{4})\|U_x^n\|_{\hat{t}}^2 - \frac{h^2}{6}\|U_{x\bar{x}}^n\|_{\hat{t}}^2 + \frac{\beta}{p+1} \langle [(U^n)^p (\bar{U}^n)]_{\hat{x}}, 2\bar{U}^n \rangle \\ &\quad + \frac{\beta h^2}{12(p+1)} \langle [(U^n)^p (\bar{U}^n)]_{x\bar{x}\hat{x}}, 2\bar{U}^n \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

由引理 3.1, 有

$$\begin{aligned} &\frac{\beta}{p+1} \langle [(U^n)^p (\bar{U}^n)]_{\hat{x}}, 2\bar{U}^n \rangle + \frac{\beta h^2}{12(p+1)} \langle [(U^n)^p (\bar{U}^n)]_{x\bar{x}\hat{x}}, 2\bar{U}^n \rangle \\ &= \frac{12\beta h}{6(p+1)} \sum_{j=1}^{J-1} [(U_j^n)^p (\bar{U}_j^n)]_{\hat{x}} (\bar{U}_j^n) + \frac{\beta h}{6(p+1)} \sum_{j=1}^{J-1} [(U_j^n)^p (\bar{U}_j^n)]_{\hat{x}} (\bar{U}_{j+1}^n - 2\bar{U}_j^n + \bar{U}_{j-1}^n) \\ &= \frac{\beta h}{6(p+1)} \sum_{j=1}^{J-1} [(U_j^n)^p (\bar{U}_j^n)]_{\hat{x}} (\bar{U}_{j+1}^n + 10\bar{U}_j^n + \bar{U}_{j-1}^n). \end{aligned} \quad (3.4)$$

将 (3.4) 式代入 (3.3) 式, 可得

$$\begin{aligned} &\|U^n\|_{\hat{t}}^2 + (1 - \frac{h^2}{4})\|U_x^n\|_{\hat{t}}^2 - \frac{h^2}{6}\|U_{x\bar{x}}^n\|_{\hat{t}}^2 + \frac{\beta h}{6(p+1)} \sum_{j=1}^{J-1} [(U_j^n)^p (\bar{U}_j^n)]_{\hat{x}} (\bar{U}_{j+1}^n + 10\bar{U}_j^n + \bar{U}_{j-1}^n) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

即

$$\begin{aligned} &\|U^{n+1}\|^2 + \|U^n\|^2 + (1 - \frac{h^2}{4})(\|U_x^{n+1}\|^2 + \|U_x^n\|^2) - \frac{h^2}{6}(\|U_{x\bar{x}}^{n+1}\|^2 + \|U_{x\bar{x}}^n\|^2) \\ &\quad + \frac{\beta h\tau}{3(p+1)} \sum_{j=1}^{J-1} [(U_j^n)^p (\bar{U}_j^n)]_{\hat{x}} (\bar{U}_{j+1}^n + 10\bar{U}_j^n + \bar{U}_{j-1}^n) \\ &= \|U^n\|^2 + \|U^{n-1}\|^2 + (1 - \frac{h^2}{4})(\|U_x^n\|^2 + \|U_x^{n-1}\|^2) - \frac{h^2}{6}(\|U_{x\bar{x}}^n\|^2 + \|U_{x\bar{x}}^{n-1}\|^2). \end{aligned} \quad (3.6)$$

在 (3.6) 式两端同时加上 $\frac{\beta h \tau}{3(p+1)} \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{J-1} [(U_j^\ell)^p (\bar{U}_j^\ell)]_{\bar{x}} (\bar{U}_{j+1}^\ell + 10\bar{U}_j^\ell + \bar{U}_{j-1}^\ell)$, 得

$$\begin{aligned} & \|U^{n+1}\|^2 + \|U^n\|^2 + (1 - \frac{h^2}{4})(\|U_x^{n+1}\|^2 + \|U_x^n\|^2) - \frac{h^2}{6}(\|U_{x\bar{x}}^{n+1}\|^2 + \|U_{x\bar{x}}^n\|^2) \\ & + \frac{\beta h \tau}{3(p+1)} \sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^{J-1} [(U_j^\ell)^p (\bar{U}_j^\ell)]_{\bar{x}} (\bar{U}_{j+1}^\ell + 10\bar{U}_j^\ell + \bar{U}_{j-1}^\ell) \\ & = \|U^n\|^2 + \|U^{n-1}\|^2 + (1 - \frac{h^2}{4})(\|U_x^n\|^2 + \|U_x^{n-1}\|^2) - \frac{h^2}{6}(\|U_{x\bar{x}}^n\|^2 + \|U_{x\bar{x}}^{n-1}\|^2) \\ & + \frac{\beta h \tau}{3(p+1)} \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{J-1} [(U_j^\ell)^p (\bar{U}_j^\ell)]_{\bar{x}} (\bar{U}_{j+1}^\ell + 10\bar{U}_j^\ell + \bar{U}_{j-1}^\ell), \end{aligned} \quad (3.7)$$

即得 $E^n = E^{n-1}$. 用 ℓ 代替 (3.5) 式的 n , 然后对 ℓ 从 1 到 n 求和, 得

$$\begin{aligned} & \|U^{n+1}\|^2 + \|U^n\|^2 + (1 - \frac{h^2}{4})(\|U_x^{n+1}\|^2 + \|U_x^n\|^2) - \frac{h^2}{6}(\|U_{x\bar{x}}^{n+1}\|^2 + \|U_{x\bar{x}}^n\|^2) \\ & + \frac{\beta h \tau}{3(p+1)} \sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^{J-1} [(U_j^\ell)^p (\bar{U}_j^\ell)]_{\bar{x}} (\bar{U}_{j+1}^\ell + 10\bar{U}_j^\ell + \bar{U}_{j-1}^\ell) \\ & = \|U^0\|^2 + \|U^1\|^2 + (1 - \frac{h^2}{4})(\|U_x^0\|^2 + \|U_x^1\|^2) - \frac{h^2}{6}(\|U_{x\bar{x}}^0\|^2 + \|U_{x\bar{x}}^1\|^2), \end{aligned} \quad (3.8)$$

即 $E^n = E^{n-1}$. (3.7) 式和 (3.8) 式表明 $E^n = E^{n-1} = \dots = E^0$. 证毕.

4 差分格式的收敛性和稳定性

引理 4.1^[14] 对任意的 $U^n \in Z_h^0$, 则有 $\|U_{\bar{x}}\|^2 \leq \|U_x\|^2$.

引理 4.2 对任意的 $U^n \in Z_h^0$, 有 $\|U_{xx}\|^2 \leq \frac{4}{h^2} \|U_x\|^2$.

证 $\|U_{xx}^n\|^2 = h \sum_{j=1}^{J-1} (U_j^n)_{xx}^2 = h \sum_{j=1}^{J-1} \left[\frac{(U_j^n)_x - (U_{j-1}^n)_x}{h} \right]^2 \leq \frac{2}{h} \sum_{j=1}^{J-1} [(U_j^n)_x^2 + (U_{j-1}^n)_x^2] = \frac{4}{h^2} \|U_x^n\|^2$.

引理 4.3^[14] (离散 Sobolev 不等式) 对任意的 $U^n \in Z_h^0$, 则存在两个正常数 C_1 和 C_2 使得

$$\|U^n\|_\infty \leq C_1 \|U^n\| + C_2 \|U_x^n\|.$$

引理 4.4^[14] (离散 Gronwall 不等式) 设 $\{G^n\}_{n=0}^\infty$ 是非负数列, 且满足

$$G^0 \leq A, \quad G^n \leq A + Bk \sum_{i=0}^{n-1} G^i, \quad n = 1, 2, \dots,$$

其中 A 和 B 均为非负常数, 则 $G^n \leq Ae^{Bnk}$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

定理 4.1 设 $u_0 \in H_0^2[x_l, x_r]$, 则差分格式 (2.10)–(2.12) 的解满足下列不等式

$$\|U^n\| \leq C, \quad \|U_x^n\| \leq C, \quad \|U^n\|_\infty \leq C.$$

证 用数学归纳法来证明. 由初值条件 (2.11) 有 $\|U^0\|^2 \leq C$. 由两层格式 (2.13) 可以算出 U^1 , 所以有 $\|U^1\| \leq C$, $\|U_x^1\| \leq C$, $\|U^1\|_\infty \leq C$. 假设

$$\|U^k\| \leq C, \quad \|U_x^k\| \leq C, \quad \|U^k\|_\infty \leq C, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (4.1)$$

将 (2.10) 式两端与 $2\bar{U}$ 作内积, 并且运用引理 3.1, 可得

$$\begin{aligned} & \|U^n\|_t^2 + (1 - \frac{h^2}{4})\|U_x^n\|_t^2 - \frac{h^2}{6}\|U_{x\bar{x}}^n\|_t^2 \\ &= -\frac{\beta}{p+1}\langle[(U^n)^p(\bar{U}^n)]_{\hat{x}}, 2\bar{U}^n\rangle - \frac{\beta h^2}{12(p+1)}\langle[(U^n)^p(\bar{U}^n)]_{x\bar{x}\hat{x}}, 2\bar{U}^n\rangle. \end{aligned} \quad (4.2)$$

由引理 3.1 和引理 4.1, 得

$$\begin{aligned} & -\frac{\beta}{p+1}\langle[(U^n)^p(\bar{U}^n)]_{\hat{x}}, 2\bar{U}^n\rangle - \frac{\beta h^2}{12(p+1)}\langle[(U^n)^p(\bar{U}^n)]_{x\bar{x}\hat{x}}, 2\bar{U}^n\rangle \\ &= \frac{2\beta h}{p+1}\sum_{j=1}^{J-1}(U_j^n)^p(\bar{U}_j^n)(\bar{U}_j^n)_{\hat{x}} + \frac{\beta h}{6(p+1)}\sum_{j=1}^{J-1}(U_j^n)^p(\bar{U}_j^n)(\bar{U}_{j+1}^n - 2\bar{U}_j^n + \bar{U}_{j-1}^n)_{\hat{x}} \\ &\leq C(\|U^n\|^2 + \|U^{n+1}\|^2 + \|U^{n-1}\|^2 + \|U_x^{n+1}\|^2 + \|U_x^{n-1}\|^2). \end{aligned} \quad (4.3)$$

令

$$A^n = \|U^{n+1}\|^2 + \|U^n\|^2 + (1 - \frac{h^2}{4})(\|U_x^{n+1}\|^2 + \|U_x^n\|^2) - \frac{h^2}{6}(\|U_{x\bar{x}}^{n+1}\|^2 + \|U_{x\bar{x}}^n\|^2). \quad (4.4)$$

应用引理 4.2, 有

$$\begin{aligned} A^n + A^{n-1} &= \|U^{n+1}\|^2 + 2\|U^n\|^2 + \|U^{n-1}\|^2 + (1 - \frac{h^2}{4})(\|U_x^{n+1}\|^2 + 2\|U_x^n\|^2 + \|U_x^{n-1}\|^2) \\ &\quad - \frac{h^2}{6}(\|U_{x\bar{x}}^{n+1}\|^2 + 2\|U_{x\bar{x}}^n\|^2 + \|U_{x\bar{x}}^{n-1}\|^2) \\ &\geq \|U^{n+1}\|^2 + 2\|U^n\|^2 + \|U^{n-1}\|^2 + (\frac{1}{3} - \frac{h^2}{4})(\|U_x^{n+1}\|^2 + 2\|U_x^n\|^2 + \|U_x^{n-1}\|^2). \end{aligned} \quad (4.5)$$

由 (4.2)–(4.5) 式, 可得

$$\begin{aligned} A^n - A^{n-1} &\leq C\tau(\|U^{n+1}\|^2 + \|U^n\|^2 + \|U^{n-1}\|^2 + \|U_x^{n+1}\|^2 + \|U_x^{n-1}\|^2) \\ &\leq C\tau(A^n + A^{n-1}), \end{aligned}$$

根据引理 4.2 和引理 4.4, 当 τ 足够小使得 $2C\tau \leq \frac{N-1}{2N}$ 时, 有

$$\begin{aligned} A^n &\leq A^0 e^{4C\tau} \\ &\leq \left[\|U^1\|^2 + \|U^0\|^2 + (1 - \frac{h^2}{4})(\|U_x^1\|^2 + \|U_x^0\|^2) + \frac{h^2}{6}(\|U_{x\bar{x}}^1\|^2 + \|U_{x\bar{x}}^0\|^2) \right] e^{4C\tau} \\ &\leq \left[\|U^1\|^2 + \|U^0\|^2 + (\frac{5}{3} - \frac{h^2}{4})(\|U_x^1\|^2 + \|U_x^0\|^2) \right] e^{4C\tau}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

由 (4.1) 式, 得 (4.6) 式的左边 A^n 有界. 又由引理 4.2, 得

$$\begin{aligned} & \|U^{n+1}\|^2 + \|U^n\|^2 + (\frac{1}{3} - \frac{h^2}{4})(\|U_x^{n+1}\|^2 + \|U_x^n\|^2) \\ &\leq \|U^{n+1}\|^2 + \|U^n\|^2 + (1 - \frac{h^2}{4})(\|U_x^{n+1}\|^2 + \|U_x^n\|^2) - \frac{h^2}{6}(\|U_{x\bar{x}}^{n+1}\|^2 + \|U_{x\bar{x}}^n\|^2) \\ &= A^n \leq C. \end{aligned}$$

当 h 足够小时, 有 $\|U^n\| \leq C$, $\|U_x^n\| \leq C$. 由引理 4.3 即可得 $\|U^n\|_\infty \leq C$. 证毕.

定理 4.2 假设 $u_0 \in H_0^2[x_l, x_r]$, 则差分格式 (2.10)–(2.12) 的解 U^n 依 L^∞ 范数收敛到 (1.1)–(1.3) 的精确解, 并且收敛阶为 $O(\tau^2 + h^4)$.

证 设 $e_j^n = u_j^n - U_j^n$, 则 (2.10)–(2.12) 式的截断误差为

$$\begin{aligned} r_j^n &= (e_j^n)_{\hat{t}} - (1 - \frac{h^2}{4})(e_j^n)_{x\bar{x}\hat{t}} + (\alpha + \frac{h^2}{12})(\bar{e}_j^n)_{x\bar{x}\hat{x}} + (\bar{e}_j^n)_{\hat{x}} - \frac{h^2}{6}(\bar{e}_j^n)_{xx\bar{x}\hat{t}} \\ &\quad + \frac{\beta}{p+1}[(u_j^n)^p(\bar{u}_j^n)]_{\hat{x}} - \frac{\beta}{p+1}[(U_j^n)^p(\bar{U}_j^n)]_{\hat{x}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} &\quad + \frac{\beta h^2}{12(p+1)}\{[(u_j^n)^p(\bar{u}_j^n)]_{x\bar{x}\hat{x}} - [(U_j^n)^p(\bar{U}_j^n)]_{x\bar{x}\hat{x}}\}, \quad 1 \leq j \leq J-1, \quad 1 \leq n \leq N-1, \\ e_j^0 &= 0, \quad 0 \leq j \leq J, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$e_0^n = e_J^n = 0, \quad (e_0^n)_{\hat{x}} = (e_J^n)_{\hat{x}} = 0, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (4.9)$$

由 Taylor 展开式可得

$$\max_{j,n} |r_j^n| \leq C(\tau^2 + h^4). \quad (4.10)$$

将 (4.7) 式两端与 $2\bar{e}$ 作内积, 且运用引理 3.1, 得

$$\begin{aligned} \|e^n\|_{\hat{t}}^2 + (1 - \frac{h^2}{4})\|e_x^n\|_{\hat{t}}^2 - \frac{h^2}{6}\|e_{x\bar{x}}^n\|_{\hat{t}}^2 &= 2\langle r^n, \bar{e}^n \rangle - \frac{\beta}{p+1}\langle [(u^n)^p(\bar{u}^n) - (U^n)^p(\bar{U}^n)]_{\hat{x}}, 2\bar{e}^n \rangle \\ &\quad - \frac{\beta h^2}{12(p+1)}\langle [(u^n)^p(\bar{u}^n) - (U^n)^p(\bar{U}^n)]_{x\bar{x}\hat{x}}, 2\bar{e}^n \rangle. \end{aligned} \quad (4.11)$$

根据引理 3.1, 引理 4.1 及定理 4.1, 可得

$$\begin{aligned} &-\frac{\beta}{p+1}\langle [(u^n)^p(\bar{u}^n) - (U^n)^p(\bar{U}^n)]_{\hat{x}}, 2\bar{e}^n \rangle = \frac{2\beta h}{p+1} \sum_{j=1}^{J-1} [(u_j^n)^p(\bar{u}_j^n) - (U_j^n)^p(\bar{U}_j^n)](\bar{e}_j^n)_{\hat{x}} \\ &= \frac{2\beta h}{p+1} \sum_{j=1}^{J-1} [(u_j^n)^p(\bar{u}_j^n) - (u_j^n)^p(\bar{U}_j^n) + (u_j^n)^p(\bar{U}_j^n) - (U_j^n)^p(\bar{U}_j^n)](\bar{e}_j^n)_{\hat{x}} \\ &= \frac{2\beta h}{p+1} \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^n)^p(\bar{e}_j^n)(\bar{e}_j^n)_{\hat{x}} + \frac{2\beta h}{p+1} \sum_{j=1}^{J-1} (\bar{e}_j^n) \left[\sum_{k=0}^{p-1} (u_j^n)^{p-1-k} (U_j^n)^k \right] (\bar{U}_j^n)(\bar{e}_j^n)_{\hat{x}} \\ &\leq C(\|e^n\|^2 + \|\bar{e}_x^n\|^2 + \|\bar{e}\|^2). \end{aligned} \quad (4.12)$$

同理, 有

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\beta h^2}{12(p+1)} \langle [(u^n)^p(\bar{u}^n) - (U^n)^p(\bar{U}^n)]_{x\bar{x}\hat{x}}, 2\bar{e}^n \rangle \\
 = & \frac{\beta h^3}{6(p+1)} \sum_{j=1}^{J-1} [(u_j^n)^p(\bar{u}_j^n) - (U_j^n)^p(\bar{U}_j^n)] (\bar{e}_j^n)_{x\bar{x}\hat{x}} \\
 = & \frac{\beta h}{6(p+1)} \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^n)^p (e_j^n) (\bar{e}_{j+1}^n - 2\bar{e}_j^n + \bar{e}_{j-1}^n)_{\hat{x}} \\
 & + \frac{\beta h}{6(p+1)} \sum_{j=1}^{J-1} (e_j^n) \left[\sum_{k=0}^{p-1} (u_j^n)^{p-1-k} (U_j^n)^k \right] (\bar{U}_j^n) (\bar{e}_{j+1}^n - 2\bar{e}_j^n + \bar{e}_{j-1}^n)_{\hat{x}} \\
 \leq & C(\|e^n\|^2 + \|\bar{e}_{\hat{x}}^n\|^2 + \|\bar{e}\|^2). \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

将 (4.12)–(4.13) 式代入 (4.11) 式可得

$$\|e^n\|_{\hat{t}}^2 + (1 - \frac{h^2}{4}) \|e_x^n\|_{\hat{t}}^2 - \frac{h^2}{6} \|e_{x\bar{x}}^n\|_{\hat{t}}^2 \leq C(\|e^n\|^2 + \|\bar{e}_{\hat{x}}^n\|^2 + \|\bar{e}\|^2) + \|r^n\|^2. \tag{4.14}$$

令 $G^n = \|e^{n+1}\|^2 + \|e^n\|^2 + (1 - \frac{h^2}{4})(\|e_x^{n+1}\|^2 + \|e_x^n\|^2) - \frac{h^2}{6}(\|e_{x\bar{x}}^{n+1}\|^2 + \|e_{x\bar{x}}^n\|^2)$, 则 (4.14) 式可以写成以下形式 $G^n - G^{n-1} \leq C\tau(G^n + G^{n-1}) + 2\tau\|r^n\|^2$. 进而有 $(1 - C\tau)(G^n - G^{n-1}) \leq 2C\tau G^{n-1} + 2\tau\|r^n\|^2$. 当 τ 足够小使得 $1 - C\tau > 0$ 时, 有

$$G^n - G^{n-1} \leq C\tau G^{n-1} + C\tau\|r^n\|^2. \tag{4.15}$$

对 (4.15) 式从 1 到 n 求和, 得 $G^n \leq G^0 + C\tau \sum_{k=0}^{n-1} G^k + C\tau \sum_{k=1}^n \|r^k\|^2$. 由 (2.13) 式可以求得 U^1 , 所以有

$$\|e^1\| \leq C(\tau^2 + h^4), \quad \|e_x^1\| \leq C(\tau^2 + h^4), \quad \|e_{x\bar{x}}^1\| \leq C(\tau^2 + h^4). \tag{4.16}$$

又由 (4.10) 式和 (4.16) 式, 可得 $G^n \leq C\tau \sum_{k=0}^{n-1} G^k + C(\tau^2 + h^4)^2$. 由引理 4.4, 得 $G^n \leq C(\tau^2 + h^4)^2 e^{CT} \leq C(\tau^2 + h^4)^2$, 即有 $\|e^n\| \leq C(\tau^2 + h^4)$, $\|e_x^n\| \leq C(\tau^2 + h^4)$, $\|e_{x\bar{x}}^n\| \leq C(\tau^2 + h^4)$. 由引理 4.3, 有 $\|e^n\|_{\infty} \leq C(\tau^2 + h^4)$. 证毕.

类似可证明下面的稳定性定理.

定理 4.3 在满足定理 4.2 的条件下, 差分格式 (2.10)–(2.12) 的解在离散的 L^∞ 范数下是稳定的.

5 数值实验

利用泰勒公式展开, 可得

$$(U_j^n)_t = \frac{U_j^{n+1} - U_j^{n-1}}{2\tau}, \quad (5.1)$$

$$(\bar{U}_j^n)_{\hat{x}} = \frac{1}{4h}(U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1} + U_{j+1}^{n-1} - U_{j-1}^{n-1}), \quad (5.2)$$

$$(\bar{U}_j^n)_{x\hat{x}\hat{x}} = \frac{1}{2h^3}(U_{j+2}^{n+1} - 2U_{j+1}^{n+1} + 2U_{j-1}^{n+1} - U_{j-2}^{n+1}) \\ - \frac{1}{2h^3}(U_{j+2}^{n-1} - 2U_{j+1}^{n-1} + 2U_{j-1}^{n-1} - U_{j-2}^{n-1}), \quad (5.3)$$

$$(U_j^n)_{x\hat{x}t} = \frac{1}{2\tau h^2}(U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}) - \frac{1}{2\tau h^2}(U_{j+1}^{n-1} - 2U_j^{n-1} + U_{j-1}^{n-1}), \quad (5.4)$$

$$(U_j^n)_{xx\hat{x}\hat{x}t} = \frac{1}{2\tau h^4}(U_{j+2}^{n+1} - 4U_{j+1}^{n+1} + 6U_j^{n+1} - 4U_{j-1}^{n+1} + U_{j-2}^{n+1}) \\ - \frac{1}{2\tau h^4}(U_{j+2}^{n-1} - 4U_{j+1}^{n-1} + 6U_j^{n-1} - 4U_{j-1}^{n-1} + U_{j-2}^{n-1}), \quad (5.5)$$

$$[(U_j^n)^p \bar{U}_j^n]_{\hat{x}} = \frac{1}{4h}[(U_{j+1}^n)^p U_{j+1}^{n+1} - (U_{j-1}^n)^p U_{j-1}^{n+1}] \\ + \frac{1}{4h}[(U_{j+1}^n)^p U_{j+1}^{n-1} - (U_{j-1}^n)^p U_{j-1}^{n-1}], \quad (5.6)$$

$$[(U_j^n)^p \bar{U}_j^n]_{x\hat{x}\hat{x}} = \frac{1}{2h^3}[(U_{j+2}^n)^p U_{j+2}^{n+1} - 2(U_{j+1}^n)^p U_{j+1}^{n+1} + 2(U_{j-1}^n)^p U_{j-1}^{n+1} - (U_{j-2}^n)^p U_{j-2}^{n+1}] \\ + \frac{1}{2h^3}[(U_{j+2}^n)^p U_{j+2}^{n-1} - 2(U_{j+1}^n)^p U_{j+1}^{n-1} + 2(U_{j-1}^n)^p U_{j-1}^{n-1} - (U_{j-2}^n)^p U_{j-2}^{n-1}], \quad (5.7)$$

将 (5.1)–(5.7) 式代入 (2.10) 式, 则差分格式 (2.10)–(2.12) 可以写成以下的方程组:

$$= \begin{pmatrix} c_1 & d_1 & e_1 & & & & \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & & & \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{J-3} & b_{J-3} & c_{J-3} & d_{J-3} & e_{J-3} \\ & & & a_{J-2} & b_{J-2} & c_{J-2} & d_{J-2} \\ & & & & a_{J-1} & b_{J-1} & c_{J-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ U_3^{n+1} \\ \vdots \\ U_{J-3}^{n+1} \\ U_{J-2}^{n+1} \\ U_{J-1}^{n+1} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 & a_1 & & & & \\ d_2 & c_2 & b_2 & a_2 & & & \\ e_3 & d_3 & c_3 & b_3 & a_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & e_{J-3} & d_{J-3} & c_{J-3} & b_{J-3} & a_{J-3} \\ & & & e_{J-2} & d_{J-2} & c_{J-2} & b_{J-2} \\ & & & & e_{J-1} & d_{J-1} & c_{J-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{n-1} \\ U_2^{n-1} \\ U_3^{n-1} \\ \vdots \\ U_{J-3}^{n-1} \\ U_{J-2}^{n-1} \\ U_{J-1}^{n-1} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq n \leq N,$$

其中,

$$\begin{aligned} a_j &= -\frac{\tau}{24h} - \frac{1}{6h^2} - \frac{\alpha\tau}{2h^3} - \frac{\beta\tau}{24h(p+1)}(U_{j-2}^n)^p, \quad j = 1, 2, \dots, J-1, \\ b_j &= \frac{1}{4} - \frac{5\tau}{12h} - \frac{1}{3h^2} + \frac{\alpha\tau}{h^3} - \frac{5\beta\tau}{12h(p+1)}(U_{j-1}^n)^p, \quad j = 1, 2, \dots, J-1, \\ c_j &= \frac{1}{2} + \frac{1}{h^2}, \quad j = 1, 2, \dots, J-1, \\ d_j &= \frac{1}{4} + \frac{5\tau}{12h} - \frac{1}{3h^2} - \frac{\alpha\tau}{h^3} + \frac{5\beta\tau}{12h(p+1)}(U_{j+1}^n)^p, \quad j = 1, 2, \dots, J-1, \\ e_j &= \frac{\tau}{24h} - \frac{1}{6h^2} + \frac{\alpha\tau}{2h^3} + \frac{\beta\tau}{24h(p+1)}(U_{j+2}^n)^p, \quad j = 1, 2, \dots, J-1. \end{aligned}$$

采用追赶法对以上系数矩阵为五对角矩阵的方程组逐层求解.

为验证紧致差分格式 (2.10)–(2.12) 的守恒性和收敛性, 我们选取以下模型^[13]:

$$u_t - u_{xxt} + u_{xxx} + u_x + uu_x = 0, \quad x \in [0, 100], \quad t \in [0, 10], \quad (5.8)$$

$$u(x, 0) = A \operatorname{sech}^2[B(x - x_0)], \quad x \in [0, 100]. \quad (5.9)$$

方程 (5.8)–(5.9) 精确解为

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}^2\{B[x - x_0 - (1 + c)t]\}, \quad x \in [0, 100].$$

其中 $c = 0.3$, $A = 3c$, $B = \sqrt{c/(4c + 8)}$, $x_0 = 40$.

设

$$\|e\|_\infty = \|U^n - u^n\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq J-1} |U_j^n - u_j^n|,$$

其中 $u_j^n = u(x_j, t^n)$ 为精确解, U_j^n 为格式 (2.10)–(2.12) 的解. 分别定义空间和时间的收敛阶为

$$\text{Order1} = \log_2 \left(\|e(h, \tau)\|_\infty / \|e(\frac{h}{2}, \frac{\tau}{4})\|_\infty \right), \quad \text{Order2} = \log_2 \left(\|e(h, \tau)\|_\infty / \|e(h, \frac{\tau}{2})\|_\infty \right).$$

分别取 $h = 0.5$, $\tau = 0.25$ 和 $h = 0.25$, $\tau = 0.125$ 对格式 (2.10)–(2.12) 进行计算, 两种步长下不同时刻的数值解见图 1; 分别取 $h = 0.5$ 和 $h = 0.25$, $\tau = h^2$ 时守恒量 (3.1)–(3.2) 的数值模拟见表 1; $\tau = h^2$, $T = 1$ 时, 不同步长下的误差和空间收敛阶见表 2; $h = 0.05$, $T = 2$ 时, 不同步长下的误差和时间收敛阶见表 3.

表 1 $h = 0.5$ 和 $h = 0.25$ 时, 不同 T 下 E^n 和 Q^n 的一些值

T	$h = 0.5, \tau = h^2$		$h = 0.25, \tau = h^2$	
	E^n	Q^n	E^n	Q^n
1	12.25415998088	19.93588630631	12.26753817094	19.93588569295
5	12.25512688967	19.93589062219	12.26759884884	19.93589022241
10	12.25624611405	19.93588933340	12.26766291617	19.93588879448
15	12.25724700975	19.93587739611	12.26771970484	19.93587731560

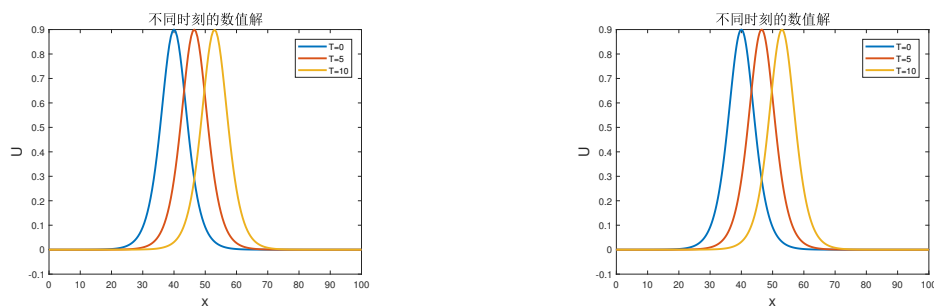


图 1: $h = 0.5, \tau = 0.25$ (左) 和 $h = 0.25, \tau = 0.125$ (右) 时不同时刻的数值解

表 2 $\tau = h^2$ 和 $T = 1$ 时的误差和空间收敛阶

	h	$\ e\ _{\infty}$	$Order1$
格式 (2.10)–(2.12)	0.5	4.3654×10^{-4}	—
	0.25	2.7699×10^{-5}	3.9782
	0.125	1.7368×10^{-6}	3.9953
文献 [13]	0.5	5.8370×10^{-4}	—
	0.25	3.6596×10^{-5}	3.9955
	0.125	2.2879×10^{-6}	3.9996

表 3 $h = 0.05$ 和 $T = 2$ 时的误差和时间收敛阶

	τ	$\ e\ _{\infty}$	$Order2$
格式 (2.10)–(2.12)	0.1	1.4309×10^{-4}	—
	0.05	3.5869×10^{-5}	1.9961
	0.025	8.9779×10^{-6}	1.9983
	0.0125	2.2455×10^{-6}	1.9993
文献 [13]	0.1	1.8289×10^{-4}	—
	0.05	4.5741×10^{-5}	1.9994
	0.025	1.1437×10^{-5}	1.9998
	0.0125	2.8609×10^{-6}	1.9992

从图 1 可以看出, 格式 (2.10)–(2.12) 的数值解与精确解具有很好的吻合, 表 1 验证了格式的质量和能量的守恒性, 表 2 验证了格式在空间上具有四阶的收敛精度, 表 3 验证了格式在时间上具有二阶的收敛精度. 另外, 从表 2 和表 3 可以看出, 格式 (2.10)–(2.12) 的误差比文献 [13] 的误差小. 以上结果均表明所提的差分格式 (2.10)–(2.12) 是可靠的.

参 考 文 献

- [1] Kortewe D J, De Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves [J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical

- Magazine and Journal of Science, 1895, 39(240): 422–443.
- [2] 盛秀兰. KdV 方程的 Crank-Nicolson 差分格式 [J]. 聊城大学学报 (自然科学版), 2012, 25(4): 23–26.
 - [3] 李家永, 阿不都热西提·阿不都外力. 解 KdV 方程的一个二阶三层差分格式 [J]. 工程数学学报, 2007(06): 1137–1140.
 - [4] Poochinapan K, Wongsaijai B, Disyadej T. Efficiency of high-order accurate difference schemes for the Korteweg-de Vries equation [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2014(3): 1–8.
 - [5] 何育宇, 王晓峰, 陆东等. Korteweg-de Vries 方程的守恒紧致有限差分格式 [J]. 闽南师范大学学报 (自然科学版), 2020, 33(02): 17–21.
 - [6] Peregrine D H. Long waves on a beach [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1967, 27(04): 815–827.
 - [7] Santarelli A R. Numerical analysis of the regularized long-wave equation: anelastic collision of solitary waves [J]. II Nuovo Cimento B, 1978, 46(1): 179–188.
 - [8] Chegini N. G. et al. Numerical solution of the regularized long wave equation using nonpolynomial splines [J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 69(1-2): 459–471.
 - [9] Koide S, Furihata D. Nonlinear and linear conservative finite difference schemes for regularized long wave equation [J]. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 2009, 26(1): 15–40.
 - [10] Ghiloufi A, Rouatbi A, Omrani K. A new conservative fourth-order accurate difference scheme for solving a model of nonlinear dispersive equations [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2018, 41(13): 5230–5253.
 - [11] Rouatbi A, Achouri T, Omrani K. High-order conservative difference scheme for a model of nonlinear dispersive equations [J]. Computational Applied Mathematics, 2018, 37(4): 4169–4195.
 - [12] Rouatbi A, Omrani K. Two conservative difference schemes for a model of nonlinear dispersive equations [J]. Chaos, Solitons Fractals, 2017, 104: 516–530.
 - [13] Bayarassou K, Rouatbi A, Omrani K. Uniform error estimates of fourth-order conservative linearized difference scheme for a mathematical model for long wave [J]. International Journal of Computer Mathematics, 2020, 97(8): 1678–1703.
 - [14] Ghiloufi A, Omrani K. New conservative difference schemes with fourth-order accuracy for some model equation for nonlinear dispersive waves [J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2017, 34(2): 451–500.

A COMPACT FINITE DIFFERENCE SCHEME FOR SOLVING THE RLW-KdV EQUATION

DENG Ya-qing, WANG Xiao-feng, HE Yu-yu

(School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China)

Abstract: In this paper, a three-level compact finite difference scheme for solving the RLW-KdV equation is proposed. The compact finite difference scheme has conservation of discrete mass and energy. The convergence and stability of the present scheme are proved by the discrete energy method. The rate of the convergence is $O(\tau^2 + h^4)$. The numerical experiment shows that the proposed scheme is efficient and reliable.

Keywords: RLW-KdV equation; compact finite difference scheme; conservation; stability; convergence

2010 MR Subject Classification: 65M06; 65M12; 65M15