

Heisenberg 群上由加权次椭圆 p -Laplace 不等方程 导出的 Hardy 型不等式及应用

张君丽

(西北工业大学数学与统计学院, 陕西 西安 710129)

摘要: 本文研究 Hardy 型不等式及它的应用. 首先从 Heisenberg 群上加权次椭圆 p -Laplace 不等方程出发, 得到非负 Lipschitz 函数的 Caccioppoli 不等式, 然后利用该不等式导出了关于另一 Lipschitz 函数的 Hardy 型不等式, 进而推出一个精确 Hardy-Poincaré 不等式. 需要强调的是, 我们这里的 Hardy 型不等式是对于 $1 < p < \infty$ 而言的, 且对无界的区域也成立.

关键词: Heisenberg 群; p -Laplace 不等方程; Hardy 型不等式; Lipschitz 函数

MR(2010) 主题分类号: 26D10; 35H20; 35J70; 35J60

中图分类号: O178

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2022)05-0410-15

1 引言

在欧氏空间中, Hardy 不等式最初由 Hardy 在文 [1] 中建立; Landou 在文 [2] 中给出了该不等式的最佳常数; Azorero 和 Alonso 在文 [3] 中获得了高维情形下的 Hardy 不等式; Skrzypczak 在文 [4]-[6] 中, 通过研究 Lipschitz 函数的包含偏微分不等方程非负弱解的 Caccioppoli 估计, 得到了区域上的 Hardy 型不等式. 近几年欧氏空间上关于 Hardy 不等式的研究还可参见 [7] 和 [8]. Hardy 不等式通常被用于嵌入定理, Gadliardo-Nirenberg 插值不等式和实插值理论等 (见 [9]-[15]).

本文将研究 Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 上由加权次椭圆 p -Laplace 不等方程导出的 Hardy 型不等式及应用. 先介绍 $\mathbb{H}^n$ 上已有的一些结果. 2001 年, Niu, Zhang 和 Wang 在文 [16] 中建立了 Picone 恒等式, 并利用 Picone 恒等式得到 Hardy 不等式, 这个结果包括了 Garofalo 和 Lanconelli 对 $p = 2$ 时建立的 Hardy 不等式; 此外, Wang 和 Dou 在 Heisenberg 型群上也利用广义 Picone 恒等式得到了 Hardy 不等式, 见 [23]. Niu 及其合作者在 $\mathbb{H}^n$ 上有关 Hardy 不等式的文章还有 [17]-[21]; 2004 年, D'Ambrosio 在文 [22] 中证明了有界域 $\Omega \subseteq \mathbb{H}^n$ 上的 Hardy 不等式.

我们知道, $\mathbb{H}^n$ 上现有工作通常需对区域加限制条件. 本文试图在不对区域加限制条件的情况下, 建立 $\mathbb{H}^n$ 中区域 (包括 $\mathbb{H}^n$) 的 Hardy 型不等式, 且该不等式与加权次椭圆 p -Laplace 不等方程的非负弱解有关.

考虑 Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$ 上加权次椭圆 p -Laplace 不等方程:

$$-\Delta_{H,p,v_1} u \geq f(u) v_2(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad (1.1)$$

*收稿日期: 2021-09-23

接收日期: 2021-12-09

基金项目: 国家自然科学基金 (11771354).

作者简介: 张君丽 (1993-), 女, 甘肃天水, 博士, 偏微分方程. E-mail: jlzhang@mail.nwpu.edu.cn.

其中 $\Omega \subseteq \mathbb{H}^n$ 为任意开集, 算子 $\Delta_{H,p,v_1} u := \operatorname{div}_H \left(v_1(\xi) |\nabla_H u|^{p-2} \nabla_H u \right)$ 是带权 $v_1(\cdot) : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ 的次椭圆 p -Laplace 算子, $1 < p < \infty$; $u : \Omega \rightarrow [0, \infty)$; 式 (1.1) 右端的权函数 $v_2(\cdot)$ 为定义在 Ω 上的可测函数; $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 为给定的连续函数. 本文的方法受到 [4]-[6] 中方法的启发, 我们将那里的方法应用于 Heisenberg 群.

本文主要结果如下.

定理 1.1 (Hardy 型不等式) 若假设 $(H_0) - (H_5)$ (见第二节) 成立, $1 < p < \infty$, $u \in H\mathcal{L}_{v_1,loc}^{1,p}(\Omega)$ (见第二节) 是 (1.1) 的非负弱解 (见第二节), 则对任意在 Ω 中有紧支集的 Lipschitz 函数 $\zeta \in H\mathcal{L}_{v_1}^{1,p}(\Omega)$, 成立不等式

$$\int_{\Omega} |\zeta|^p \mu_1(d\xi) \leq \int_{\Omega} |\nabla_H \zeta|^p \mu_2(d\xi), \quad (1.2)$$

其中

$$\begin{aligned} \mu_1(d\xi) &= \left(f(u) v_2(\xi) + \delta \frac{v_1(\xi)}{\omega(u)} |\nabla_H u|^p \right) \Xi(u) \chi_{\{u>0\}} d\xi, \\ \mu_2(d\xi) &= \left(\frac{p-1}{c-\delta} \right)^{p-1} v_1(\xi) \mathcal{H}(u) \chi_{\{u>0, |\nabla_H u| \neq 0\}} d\xi. \end{aligned}$$

本文组织如下: 在第二节我们介绍 Heisenberg 群及其上的带权 Beppo Levi 空间和 Sobolev 空间, 给出本文用到的假设条件和引理. 在第三节我们应用 (1.1) 导出了非负 Lipschitz 函数 φ 的包含 (1.1) 非负弱解 u 的 Caccioppoli 不等式. 在第四节利用 Caccioppoli 不等式, 证明定理 1.1, 并利用它导出一个精确 Hardy-Poincaré 不等式.

2 预备知识

我们首先介绍 Heisenberg 群 $\mathbb{H}^n$, 更多的细节见专著 [24]. $\mathbb{H}^n$ 是对 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 赋予群运算

$$\xi \circ \xi' = \left(x + x', y + y', t + t' + 2 \sum_{i=1}^n (x_i y'_i - x'_i y_i) \right)$$

所得的群, 其中

$$\xi = (z, t) = (x, y, t) = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, t) \in \mathbb{R}^{2n+1}, \quad n \geq 1;$$

$$\xi' = (z', t') = (x', y', t') = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n, t') \in \mathbb{R}^{2n+1}, \quad n \geq 1.$$

左不变向量场为

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + 2y_i \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} - 2x_i \frac{\partial}{\partial t}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

记水平梯度为

$$\nabla_H = (X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n).$$

散度为

$$\operatorname{div}_H (v_1, v_2, \dots, v_{2n}) = \sum_{i=1}^n (X_i v_i + Y_i v_{n+i}).$$

Heisenberg 群上的齐次维数为 $Q = 2n + 2$, Haar 测度等价于 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中的 Lebesgue 测度.

定义 2.1 设 $\Omega \subseteq \mathbb{H}^n$ 为开集, $\mathcal{M}(\Omega)$ 为定义在 Ω 上的所有 Borel 可测实函数构成的集合. 记

$$\mathcal{W}(\Omega) = \{v \in \mathcal{M}(\Omega) : 0 < v(\xi) < \infty, a.e. \xi \in \Omega\}.$$

若 $v \in \mathcal{W}(\Omega)$, 满足 $v^{-\frac{1}{p-1}} \in L^1_{loc}(\Omega)$, 其中 $p > 1$, 则称 v 满足 $B_p(\Omega)$ 条件, 简记为 $v \in B_p(\Omega)$.

若对开集 $\Omega \subseteq \mathbb{H}^n$ 和函数 u 有

$$\int_{\Omega} |u|^p v d\xi < \infty,$$

则称 $u \in L^p_v(\Omega)$. 相应地, $L^p_{v,loc}(\Omega)$ 定义为

$$L^p_{v,loc}(\Omega) = \left\{ u \mid \int_{\Omega'} |u|^p v d\xi < \infty, \forall \Omega' \subset\subset \Omega \right\}.$$

命题 2.1^[6] 设 $\Omega \subseteq \mathbb{H}^n$ 为开集, $p > 1$, $v \in B_p(\Omega)$, 则

$$L^p_{v,loc}(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega),$$

且当在 $L^p_{v,loc}(\Omega)$ 中 $u_n \rightarrow u$ 时, 在 $L^1_{loc}(\Omega)$ 中有 $u_n \rightarrow u$.

假设 $v \in B_p(\Omega)$, $D'(\Omega)$ 为广义函数组成的集合, 记 $\mathbb{H}^n$ 上带权 Beppo Levi 空间为

$$H\mathcal{L}^{1,p}_v(\Omega) = \{u \in D'(\Omega) : \nabla_H u \in L^p_v(\Omega)\};$$

$\mathbb{H}^n$ 上局部带权 Beppo Levi 空间为

$$H\mathcal{L}^{1,p}_{v,loc}(\Omega) := \{u \in D'(\Omega') : \nabla_H u \in L^p_{v,loc}(\Omega'), \forall \Omega' \subset\subset \Omega\}.$$

设 $v_1(\cdot) \in \mathcal{W}(\Omega)$, $v_2(\cdot) \in B_p(\Omega)$. 记 $\mathbb{H}^n$ 上带权 Sobolev 空间为

$$HW^{1,p}_{(v_1,v_2)}(\Omega) = L^p_{v_1}(\Omega) \cap H\mathcal{L}^{1,p}_{v_2}(\Omega),$$

即

$$HW^{1,p}_{(v_1,v_2)}(\Omega) := \{u \in L^p_{v_1}(\Omega) \cap D'(\Omega) : \nabla_H u \in L^p_{v_2}(\Omega)\}, \quad (2.1)$$

其上范数为

$$\|u\|_{HW^{1,p}_{(v_1,v_2)}(\Omega)} := \|u\|_{L^p_{v_1}(\Omega)} + \|\nabla_H u\|_{L^p_{v_2}(\Omega)}.$$

设 $\Omega \subseteq \mathbb{H}^n$ 为开集, $v_1(\cdot) \in \mathcal{W}(\Omega)$, $v_2(\cdot) \in B_p(\Omega)$, $p > 1$, 则 $HW^{1,p}_{(v_1,v_2)}(\Omega)$ 为 $C^\infty(\Omega)$ 在范数 $\|u\|_{HW^{1,p}_{(v_1,v_2)}(\Omega)}$ 下的完备化空间, $HW^{1,p}_{(v_1,v_2),0}(\Omega)$ 为 $C^\infty_0(\Omega)$ 在范数 $\|u\|_{HW^{1,p}_{(v_1,v_2)}(\Omega)}$ 下的完备化空间. 当 $v_1 = v_2$ 时, 记 $HW^{1,p}_{(v_1,v_2)}(\Omega)$ 为 $HW^{1,p}_{v_1}(\Omega)$, $HW^{1,p}_{(v_1,v_2),0}(\Omega)$ 为 $HW^{1,p}_{v_1,0}(\Omega)$. 若 $u \in H\mathcal{L}^{1,p}_{v,loc}(\Omega)$, $p > 1$, $v(\cdot) \in B_p(\Omega) \cap L^1_{loc}(\Omega)$, 则对任意 $\Omega' \subset\subset \Omega$, 有 $v|\nabla_H u|^{p-1} \in L^1_{loc}(\Omega)$. 进一步有 $v|\nabla_H u|^{p-2} \nabla_H u \in L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^{2n})$.

定义 2.2 给定权 $v_1(\cdot) \in B_p(\Omega) \cap L_{loc}^1(\Omega)$, $v_2(\cdot)$ 可测, $u \in H\mathcal{L}_{v_1, loc}^{1,p}(\Omega)$ 非负, 且不恒为 0, $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 为连续函数, $f(u)v_2 \in L_{loc}^1(\Omega)$. 若对每一个非负有紧支集, 满足

$$\int_{\Omega} f(u) v_2(\xi) h(\xi) d\xi > -\infty$$

的函数 $h \in H\mathcal{L}_{v_1}^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\langle -\Delta_{H,p,v_1} u, h \rangle \geq \int_{\Omega} f(u) v_2(\xi) h(\xi) d\xi, \quad (2.2)$$

则说 u 是 (1.1) 的弱解.

现在我们给出假设:

(H_0) $v_1 \in L_{loc}^1(\Omega) \cap B_p(\Omega)$, $v_2(\cdot)$ 可测;

(H_1) 设 Ξ 在 $(0, \infty)$ 中的任意闭区间上为 Lipschitz 函数, 且连续函数对 $(\Xi, \omega): (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) \times (0, \infty)$ 满足如下相容性条件:

1) 不等式

$$\omega(t) \Xi'(t) \leq -c \Xi(t) \quad (2.3)$$

在 $(0, \infty)$ 中几乎处处成立, 其中 $c \in \mathbb{R}$, 且 c 与 t 无关, Ξ 是单调的 (不必严格单调).

2) 函数

$$t \mapsto \mathcal{H}(t) := \Xi(t) \omega^{p-1}(t) \text{ 和 } t \mapsto \Xi(t) \cdot \omega^{-1}(t) \quad (2.4)$$

均在 0 的某邻域内非增或有界.

(H_2) 设 $u \in H\mathcal{L}_{v_1, loc}^{1,p}(\Omega)$ 非负, $\Omega \subseteq \mathbb{H}^n$ 为开集, (H_0) 成立, $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 连续, 对每一个非负有紧支集的函数 $h \in H\mathcal{L}_{v_1}^{1,p}(\Omega)$, 有

$$\int_{\Omega} f(u) v_2(\xi) h(\xi) d\xi > -\infty, \quad f(u) v_2 \in L_{loc}^1(\Omega).$$

更进一步地, 我们考虑集合 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ 由满足如下不等式的 $\delta \in \mathbb{R}$ 构成:

$$f(u) v_2(\xi) + \delta \frac{v_1(\xi)}{\omega(u)} |\nabla_H u|^p \geq 0, \quad a.e. \quad \xi \in \Omega \cap \{u > 0\}. \quad (2.5)$$

记

$$\delta_0 = \inf \mathfrak{A}. \quad (2.6)$$

因为 $\inf \emptyset = +\infty$, 所以 $\mathfrak{A}$ 既不能是空集, 也不能无下界.

(H_3) 在假设 (H_1) 和 (H_2) 下, 参数 δ 满足 $\delta_0 \leq \delta < c$, 其中 δ_0 和 c 分别由式 (2.6) 和 (2.3) 给出.

(H_4) 在假设 (H_1) 和 (H_2) 下, 对任意的 $R > 0$ 有

$$v_2^+(\xi) f(u) \Xi(u) \chi_{\{0 < u \leq R\}} \in L_{loc}^1(\Omega).$$

(H_5) 在假设 (H_1) 和 (H_2) 下, 对任意子集 $\Omega' \subset \subset \Omega$, 有

$$\Xi(R) \int_{\Omega' \cap \{u \geq \frac{R}{2}\}} |\nabla_H u(\xi)|^{p-1} v_1(\xi) d\xi \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty,$$

$$\Xi(R) \int_{\Omega' \cap \{u \geq \frac{R}{2}\}} f(u) v_2(\xi) d\xi \rightarrow 0, R \rightarrow \infty.$$

注 2.1 对 $\Xi(t) = t^{1-p}$, $\omega(t) = t$, $f(u) = u^{p-1}$, $1 < p < \infty$, 上述假设 (H_0) – (H_5) 满足.

引理 2.1^[6] 若假设 (H_0) – (H_2) 成立, $1 < p < \infty$, $u \in H\mathcal{L}_{v_1,loc}^{1,p}(\Omega)$ 是 (1.1) 的非负弱解, v_2 在 Ω 中 a.e. 大于 0, 则由式 (2.6) 给定的 δ_0 存在且有限的充要条件为 u a.e. 在 Ω 中不为常数.

3 Caccioppoli 不等式

本节主要目的是证明非负 Lipschitz 函数 φ 的包含 (1.1) 非负弱解 u 的 Caccioppoli 不等式.

定理 3.1 (Caccioppoli 不等式) 若假设 (H_0) – (H_5) 成立, $1 < p < \infty$, $u \in H\mathcal{L}_{v_1,loc}^{1,p}(\Omega)$ 是 (1.1) 的非负弱解, 则对任意在 Ω 中有紧支集且使得

$$\int_{\text{supp}\varphi \cap \{|\nabla_H u| \neq 0\}} |\nabla_H \varphi|^p \varphi^{1-p} v_1(\xi) d\xi < \infty$$

成立的非负 Lipschitz 函数 φ , 有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \cap \{u > 0\}} \left(f(u) v_2(\xi) + \delta \frac{v_1(\xi)}{\omega(u)} |\nabla_H u|^p \right) \Xi(u) \varphi d\xi \\ & \leq M \int_{\Omega \cap \{|\nabla_H u| \neq 0, u > 0\} \cap \text{supp}\varphi} v_1(\xi) \mathcal{H}(u) |\nabla_H \varphi|^p \varphi^{1-p} d\xi, \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中 $M := \frac{1}{p^p} \left(\frac{p-1}{c-\delta} \right)^{p-1}$.

为了证明定理 3.1, 我们需要四个引理.

引理 3.1 设 u, φ 如定理 3.1 中假设所示, 固定 $0 < r < R$, 记

$$u_{r,R}(\xi) = \min(u(\xi) + r, R), \quad \Psi(\xi) = \Xi(u_{r,R}(\xi)) \varphi(\xi), \quad (3.2)$$

则

$$u_{r,R} \in H\mathcal{L}_{v_1,loc}^{1,p}(\Omega), \quad \Psi \in H\mathcal{L}_{v_1,0}^{1,p}(\Omega).$$

证 证明分如下两步进行.

1). 先证 $u_{r,R} \in H\mathcal{L}_{v_1,loc}^{1,p}(\Omega)$. 事实上, 由式 (3.2) 得, $r \leq u_{r,R} \leq R$. 又因为 $u \in H\mathcal{L}_{v_1,loc}^{1,p}(\Omega)$, 即对任意的 $\Omega' \subset \subset \Omega$ 有

$$u \in D'(\Omega), \quad \nabla_H u \in L_{v_1}^p(\Omega'),$$

所以

$$u_{r,R} \in D'(\Omega), \quad |\nabla_H u_{r,R}| \leq |\nabla_H u| \in L_{v_1}^p(\Omega').$$

因此

$$u_{r,R} \in H\mathcal{L}_{v_1,loc}^{1,p}(\Omega).$$

2). 再证 $\Psi \in H\mathcal{L}_{v_1,0}^{1,p}(\Omega)$. 实际上, 因为 $r \leq u_{r,R} \leq R$, $u_{r,R} \in H\mathcal{L}_{v_1,loc}^{1,p}(\Omega)$, Ξ 属于 $C((0, \infty))$, 且在任意闭区间上为 Lipschitz 函数, 所以对 a.e. ξ 有

$$\begin{aligned}\nabla_H \Psi(\xi) &= \Xi'(u_{r,R}(\xi)) \nabla_H u_{r,R}(\xi) \cdot \varphi(\xi) + \Xi(u_{r,R}(\xi)) \nabla_H \varphi(\xi) \\ &= \Xi'(u(\xi) + r) \nabla_H u(\xi) \cdot \chi_{\{u(\xi) \leq R-r\}} \cdot \varphi(\xi) + \Xi(u_{r,R}(\xi)) \nabla_H \varphi(\xi),\end{aligned}\quad (3.3)$$

又因为在 Ω 中 φ 是非负的有紧支集的 Lipschitz 函数, 所以 (3.3) 中右端两项均属于 $L_{v_1}^p(\Omega)$, 因此

$$\Psi \in H\mathcal{L}_{v_1,0}^{1,p}(\Omega).$$

引理 3.2^[21] 设 $u \in HW_{loc}^{1,1}(\Omega)$, 其中 u 在每一点 $\xi \in \Omega$ 的值定义为

$$u(\xi) := \limsup_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{|B(\xi, \rho) \cap \Omega|} \int_{B(\xi, \rho) \cap \Omega} u(\eta) d\eta.$$

给定 $t \in \mathbb{R}$, 则有

$$\{\xi \in \Omega : u(\xi) = t\} \subseteq \{\xi \in \Omega : \nabla_H u(\xi) = 0\} \cup N, \quad (3.4)$$

其中 N 的 Haar 测度为零.

引理 3.3(局部估计) 若假设 $(H_0) - (H_3)$ 成立, $1 < p < \infty$, $u \in H\mathcal{L}_{v_1,loc}^{1,p}(\Omega)$ 是 (1.1) 的非负弱解, 则对任意在 Ω 中有紧支集, 且使得

$$\int_{\text{supp} \varphi \cap \{|\nabla_H u| \neq 0\}} |\nabla_H \varphi|^p \varphi^{1-p} v_1(\xi) d\xi < \infty$$

成立的非负 Lipschitz 函数 φ 和 $0 < r < R$, 成立不等式

$$\begin{aligned}& \int_{\Omega \cap \{0 < u \leq R-r\}} \left(f(u) v_2(\xi) + \delta \frac{v_1(\xi)}{\omega(u+r)} |\nabla_H u|^p \right) \Xi(u+r) \varphi d\xi \\ & \leq M \int_{\Omega \cap \{|\nabla_H u| \neq 0, 0 < u \leq R-r\} \cap \text{supp} \varphi} v_1(\xi) \mathcal{H}(u+r) |\nabla_H \varphi|^p \varphi^{1-p} d\xi + C(r, R),\end{aligned}\quad (3.5)$$

其中

$$M = \frac{1}{p^p} \left(\frac{p-1}{c-\delta} \right)^{p-1},$$

$$C(r, R) := \Xi(R) \left[\int_{\Omega \cap \{|\nabla_H u| \neq 0, u > R-r\}} v_1(\xi) |\nabla_H u|^{p-1} |\nabla_H \varphi| d\xi - \int_{\Omega \cap \{u > R-r\}} f(u) v_2(\xi) \varphi d\xi \right].$$

证 由引理 3.1 知, $\Psi \in H\mathcal{L}_{v_1,0}^{1,p}(\Omega)$, 取 $h = \Psi$ 为不等式 (2.2) 中的试验函数, 则有

$$\begin{aligned}I &:= \int_{\Omega} f(u) v_2(\xi) \Psi(\xi) d\xi = \int_{\Omega} f(u) v_2(\xi) \Xi(u_{r,R}(\xi)) \varphi d\xi \\ &= \int_{\Omega \cap \{0 \leq u \leq R-r\}} f(u) v_2(\xi) \Xi(u+r) \varphi d\xi + \Xi(R) \int_{\Omega \cap \{u > R-r\}} f(u) v_2(\xi) \varphi d\xi \\ &=: \int_{\Omega \cap \{0 \leq u \leq R-r\}} f(u) v_2(\xi) \Xi(u+r) \varphi d\xi + C_1(r, R).\end{aligned}\quad (3.6)$$

另一方面, 从不等式 (2.2) 推出

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\Omega} f(u) v_2(\xi) \Psi d\xi \leq \left\langle -\operatorname{div}_H \left(v_1(\xi) |\nabla_H u|^{p-2} \nabla_H u \right), \Psi \right\rangle \\
 &= \int_{\Omega \cap \{|\nabla_H u| \neq 0\}} v_1(\xi) |\nabla_H u|^{p-2} \nabla_H u \cdot \nabla_H \Psi d\xi \\
 &= \int_{\Omega \cap \{|\nabla_H u| \neq 0\}} v_1(\xi) |\nabla_H u|^{p-2} \nabla_H u \cdot \nabla_H u_{r,R} \Xi'(u_{r,R}) \varphi d\xi \\
 &\quad + \int_{\Omega \cap \{|\nabla_H u| \neq 0\}} v_1(\xi) |\nabla_H u|^{p-2} \nabla_H u \cdot \nabla_H \varphi \Xi(u_{r,R}) d\xi \\
 &= \int_{\Omega \cap \{|\nabla_H u| \neq 0, 0 \leq u \leq R-r\}} v_1(\xi) |\nabla_H u|^p \Xi'(u+r) \varphi d\xi \\
 &\quad + \int_{\Omega \cap \{|\nabla_H u| \neq 0, 0 \leq u \leq R-r\}} v_1(\xi) |\nabla_H u|^{p-2} \Xi(u+r) \nabla_H u \cdot \nabla_H \varphi d\xi \\
 &\quad + \Xi(R) \int_{\Omega \cap \{|\nabla_H u| \neq 0, u > R-r\}} v_1(\xi) |\nabla_H u|^{p-2} \nabla_H u \cdot \nabla_H \varphi d\xi \\
 &=: a(r, R) + b(r, R) + C_2(r, R).
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

对 $0 \leq u \leq R-r$, 以上所有积分有限. 由假设 (H_1) 得

$$a(r, R) \leq -c \int_{\Omega \cap \{|\nabla_H u| \neq 0, 0 \leq u \leq R-r\}} v_1(\xi) |\nabla_H u|^p \frac{\Xi(u+r)}{\omega(u+r)} \varphi d\xi =: -ca_1(r, R). \tag{3.8}$$

注意到

$$\begin{aligned}
 b(r, R) &\leq \int_{\Omega \cap \{|\nabla_H u| \neq 0, 0 \leq u \leq R-r\}} v_1(\xi) |\nabla_H u|^{p-1} |\nabla_H \varphi| \Xi(u+r) d\xi \\
 &= \int_{\Omega \cap \{|\nabla_H u| \neq 0, 0 \leq u \leq R-r\}} \left(\frac{|\nabla_H \varphi|}{\varphi} \omega(u+r) \right) \cdot |\nabla_H u|^{p-1} \left(v_1(\xi) \frac{\Xi(u+r)}{\omega(u+r)} \varphi \right) d\xi,
 \end{aligned}$$

对任意的 $\varepsilon > 0$, $p > 1$, 由 Young 不等式得

$$\begin{aligned}
 b(r, R) &\leq \frac{p-1}{p} \varepsilon \int_{\Omega \cap \{|\nabla_H u| \neq 0, 0 \leq u \leq R-r\}} |\nabla_H u|^p \cdot \left(v_1(\xi) \frac{\Xi(u+r)}{\omega(u+r)} \varphi \right) d\xi \\
 &\quad + \frac{1}{p\varepsilon^{p-1}} \int_{\Omega \cap \{|\nabla_H u| \neq 0, 0 \leq u \leq R-r\}} \left(\frac{|\nabla_H \varphi|}{\varphi} \omega(u+r) \right)^p \cdot \left(v_1(\xi) \frac{\Xi(u+r)}{\omega(u+r)} \varphi \right) d\xi \\
 &= \frac{p-1}{p} \varepsilon a_1(r, R) + \frac{1}{p\varepsilon^{p-1}} \int_{\Omega \cap \{|\nabla_H u| \neq 0, 0 \leq u \leq R-r\}} v_1(\xi) \left(\frac{|\nabla_H \varphi|}{\varphi} \right)^p \Xi(u+r) \omega^{p-1}(u+r) \varphi d\xi \\
 &=: \frac{p-1}{p} \varepsilon a_1(r, R) + \frac{1}{p\varepsilon^{p-1}} d(r, R).
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

将 (3.8) 和 (3.9) 代入 (3.7) 得

$$\begin{aligned} I &\leq a(r, R) + b(r, R) + C_2(r, R) \\ &\leq -ca_1(r, R) + \frac{p-1}{p}\varepsilon a_1(r, R) + \frac{1}{p\varepsilon^{p-1}}d(r, R) + C_2(r, R) \\ &= \left(\frac{p-1}{p}\varepsilon - c\right)a_1(r, R) + \frac{1}{p\varepsilon^{p-1}}d(r, R) + C_2(r, R). \end{aligned} \quad (3.10)$$

进而由 $C_1(r, R)$, $a_1(r, R)$ 和 $d(r, R)$ 有限, 再将 (3.6) 和 (3.10) 结合推出

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega \cap \{0 \leq u \leq R-r\}} f(u) v_2(\xi) \Xi(u+r) \varphi d\xi + \left(c - \frac{p-1}{p}\varepsilon\right) a_1(r, R) \\ &\leq \frac{1}{p\varepsilon^{p-1}}d(r, R) + (C_2(r, R) - C_1(r, R)). \end{aligned}$$

记

$$C(r, R) = C_2(r, R) - C_1(r, R).$$

取 $\varepsilon = (c - \delta) \frac{p}{p-1}$, 则有式 (3.5) 成立.

利用引理 3.2 和引理 3.3 可证得

引理 3.4 若假设 $(H_0) - (H_4)$ 成立, $1 < p < \infty$, $u \in H\mathcal{L}_{v_1, loc}^{1,p}(\Omega)$ 是 (1.1) 的非负弱解, 则对任意在 Ω 中有紧支集, 且使得

$$\int_{\text{supp}\varphi \cap \{|\nabla_H u| \neq 0\}} |\nabla_H \varphi|^p \varphi^{1-p} v_1(\xi) d\xi < \infty$$

成立的非负 Lipschitz 函数 φ 和 $R > 0$, 有不等式

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega \cap \{0 < u < R\}} \left(f(u) v_2(\xi) + \delta \frac{v_1(\xi)}{\omega(u)} |\nabla_H u|^p \right) \Xi(u) \varphi d\xi \\ &\leq M \int_{\Omega \cap \{|\nabla_H u| \neq 0, 0 < u < R\} \cap \text{supp}\varphi} v_1(\xi) \mathcal{H}(u) |\nabla_H \varphi|^p \varphi^{1-p} d\xi + C(R), \end{aligned} \quad (3.11)$$

其中

$$M = \frac{1}{p^p} \left(\frac{p-1}{c-\delta} \right)^{p-1},$$

$$C(R) := \Xi(R) \left[\int_{\Omega \cap \{|\nabla_H u| \neq 0, u \geq \frac{R}{2}\}} v_1(\xi) |\nabla_H u|^{p-1} |\nabla_H \varphi| d\xi - \int_{\Omega \cap \{u \geq \frac{R}{2}\}} f(u) v_2(\xi) \varphi d\xi \right].$$

证 在 (3.5) 两边令 $r \rightarrow 0^+$ 便可证得 (3.11), 但其中有一些细节需仔细处理, 这里给出证明过程. 我们分为以下四步:

i) 先证如下不等式成立:

$$\liminf_{r \rightarrow 0^+} \int_{\Omega \cap \{0 < u \leq R-r\}} g_r(\xi) \varphi d\xi \geq \int_{\Omega \cap \{0 < u \leq R\}} g_0(\xi) \varphi d\xi, \quad (3.12)$$

其中

$$g_r(\xi) := \left(f(u) v_2(\xi) + \delta \frac{v_1(\xi)}{\omega(u+r)} |\nabla_H u|^p \right) \Xi(u+r),$$

$$g_0(\xi) := \left(f(u) v_2(\xi) + \delta \frac{v_1(\xi)}{\omega(u)} |\nabla_H u|^p \right) \Xi(u).$$

事实上, 由假设 (H₁) 知, Ξ 与 ω 只能有四种情形: a) Ξ 非增, $\frac{\Xi}{\omega}$ 非增; b) Ξ 增, $\frac{\Xi}{\omega}$ 非增; c) Ξ 非增, $\frac{\Xi}{\omega}$ 在 0 的邻域内有界; d) Ξ 增, $\frac{\Xi}{\omega}$ 在 0 的邻域内有界.

以下对 δ 分 $\delta \geq 0$ 和 $\delta < 0$ 讨论, 证明 (3.12):

1. 当 $\delta \geq 0$ 时, 因为

$$0 \leq \delta < c, \quad \Xi'(t) \leq -c \frac{\Xi(t)}{\omega(t)},$$

所以 Ξ 非增. 因此情形 a) 和 c) 可能出现.

(1) 先考虑情形 a). 有

$$\Xi(u+r) \leq \Xi(u), \quad \delta \frac{\Xi(u+r)}{\omega(u+r)} \leq \delta \frac{\Xi(u)}{\omega(u)}.$$

记

$$\tilde{g}_r(\xi) := \left(f(u) v^+_{-2}(\xi) + \delta \frac{v_1(\xi)}{\omega(u+r)} |\nabla_H u|^p \right) \Xi(u+r),$$

则 $\tilde{g}_r \geq 0$, 且有

$$g_r(\xi) = \tilde{g}_r(\xi) + f(u) v^-_{-2}(\xi) \Xi(u+r) \geq \tilde{g}_r(\xi) + f(u) v^-_{-2}(\xi) \Xi(u).$$

而由 Levi 定理得

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\Omega \cap \{0 < u \leq R-r\}} \tilde{g}_r(\xi) \varphi d\xi = \int_{\Omega \cap \{0 < u \leq R\}} \tilde{g}_0(\xi) \varphi d\xi.$$

因此, 不等式 (3.12) 成立.

(2) 再考虑情形 c). 因为

$$v^-_{-2}(\xi) \Xi(u+r) \geq v^-_{-2}(\xi) \Xi(u),$$

所以

$$g_r(\xi) \geq f(u) v^+_{-2}(\xi) \Xi(u+r) + \delta \frac{v_1(\xi)}{\omega(u+r)} |\nabla_H u|^p \Xi(u+r) + f(u) v^-_{-2}(\xi) \Xi(u).$$

由 Levi 定理得

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\Omega \cap \{0 < u \leq R-r\}} f(u) v^+_{-2}(\xi) \Xi(u+r) \varphi d\xi = \int_{\Omega \cap \{0 < u \leq R\}} f(u) v^+_{-2}(\xi) \Xi(u) \varphi d\xi.$$

因为 $\frac{\Xi}{\omega}$ 在 0 的邻域内有界, 所以它在整个积分区域有界, 从而由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\Omega \cap \{0 < u \leq R-r\}} v_1(\xi) |\nabla_H u|^p \frac{\Xi(u+r)}{\omega(u+r)} \varphi d\xi = \int_{\Omega \cap \{0 < u \leq R\}} v_1(\xi) |\nabla_H u|^p \frac{\Xi(u)}{\omega(u)} \varphi d\xi.$$

因此, 不等式 (3.12) 成立.

2. 当 $\delta < 0$ 时, 此时 a), b), c) 和 d) 均可能出现.

(1) 先考虑情形 a). 当 $r > 0, u > 0$ 时, 有

$$\Xi(u+r) \leq \Xi(u), \quad \delta \frac{\Xi(u+r)}{\omega(u+r)} \geq \delta \frac{\Xi(u)}{\omega(u)},$$

$$v_{-2}^{-}(\xi) \Xi(u+r) \geq v_{-2}^{-}(\xi) \Xi(u),$$

所以

$$\begin{aligned} g_r(\xi) &\geq f(u) v_{+2}^{+}(\xi) \Xi(u+r) + \delta \frac{v_1(\xi)}{\omega(u)} |\nabla_H u|^p \Xi(u) + f(u) v_{-2}^{-}(\xi) \Xi(u) \\ &= f(u) v_{+2}^{+}(\xi) \Xi(u) + \delta \frac{v_1(\xi)}{\omega(u)} |\nabla_H u|^p \Xi(u) + f(u) v_{+2}^{+}(\xi) (\Xi(u+r) - \Xi(u)) \\ &= g_0(\xi) - f(u) v_{+2}^{+}(\xi) (\Xi(u) - \Xi(u+r)). \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} f(u) v_{+2}^{+}(\xi) (\Xi(u) - \Xi(u+r)) &\geq 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0^+} f(u) v_{+2}^{+}(\xi) (\Xi(u) - \Xi(u+r)) &= 0; \end{aligned}$$

再由假设 (H₄) 得

$$f(u) v_{+2}^{+}(\xi) (\Xi(u) - \Xi(u+r)) \varphi \chi_{\{0 < u \leq R-r\}} \leq f(u) v_{+2}^{+}(\xi) \Xi(u) \varphi \chi_{\{0 < u \leq R\}} \in L^1(\Omega),$$

所以, 利用 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\{0 < u \leq R-r\}} f(u) v_{+2}^{+}(\xi) (\Xi(u) - \Xi(u+r)) \varphi d\xi = 0.$$

因此, 不等式 (3.12) 成立.

(2) 再考虑情形 b). 当 $u > 0$ 时, 有

$$\delta \frac{\Xi(u+r)}{\omega(u+r)} \geq \delta \frac{\Xi(u)}{\omega(u)}, \quad v_{+2}^{+}(\xi) \Xi(u+r) \geq v_{+2}^{+}(\xi) \Xi(u),$$

从而

$$g_r(\xi) \geq f(u) v_{+2}^{+}(\xi) \Xi(u) + \delta \frac{v_1(\xi)}{\omega(u)} |\nabla_H u|^p \Xi(u) + f(u) v_{-2}^{-}(\xi) \Xi(u+r).$$

因为

$$f(u) v_{-2}^{-}(\xi) \Xi(u+r) < f(u) v_{-2}^{-}(\xi) \Xi(u),$$

所以, 由 Lebesgue 控制收敛定理和假设 (H₂) 得

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\{0 < u \leq R-r\}} f(u) v_{-2}^{-}(\xi) \Xi(u+r) \varphi d\xi = \int_{\{0 < u \leq R\}} f(u) v_{-2}^{-}(\xi) \Xi(u) \varphi d\xi.$$

因此, 不等式 (3.12) 成立.

(3) 其次考虑情形 c). 因为

$$v^{-}_2(\xi) \Xi(u+r) \geq v^{-}_2(\xi) \Xi(u),$$

所以

$$g_r(\xi) \geq f(u) v^{+}_2(\xi) \Xi(u+r) + \delta \frac{v_1(\xi)}{\omega(u+r)} |\nabla_H u|^p \Xi(u+r) + f(u) v^{-}_2(\xi) \Xi(u).$$

又因为 $f(u) v^{+}_2(\xi) \Xi(u+r) \geq 0$, 所以由 Levi 定理得

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\{0 < u \leq R-r\}} f(u) v^{+}_2(\xi) \Xi(u+r) \varphi d\xi = \int_{\{0 < u \leq R\}} f(u) v^{+}_2(\xi) \Xi(u) \varphi d\xi.$$

注意到

$$\frac{\Xi(u+r)}{\omega(u+r)} \leq \sup \left\{ \frac{\Xi(t)}{\omega(t)} : t \in (0, R] \right\},$$

所以由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\Omega \cap \{0 < u \leq R-r\}} v_1(\xi) |\nabla_H u|^p \frac{\Xi(u+r)}{\omega(u+r)} \varphi d\xi = \int_{\Omega \cap \{0 < u \leq R\}} v_1(\xi) |\nabla_H u|^p \frac{\Xi(u)}{\omega(u)} \varphi d\xi.$$

因此, 不等式 (3.12) 成立.

(4) 最后考虑情形 d). 当 $u > 0$ 时, 有

$$\Xi(u+r) \geq \Xi(u),$$

从而

$$g_r(\xi) \geq f(u) v^{+}_2(\xi) \Xi(u) + \delta \frac{v_1(\xi)}{\omega(u+r)} |\nabla_H u|^p \Xi(u+r) + f(u) v^{-}_2(\xi) \Xi(u+r).$$

因为 $v^{-}_2(\xi) \Xi(u+r) \leq v^{-}_2(\xi) \Xi(u)$, $\frac{\Xi(u+r)}{\omega(u+r)} \leq \sup \left\{ \frac{\Xi(t)}{\omega(t)} : t \in (0, R) \right\}$, 所以由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\{0 < u \leq R-r\}} f(u) v^{-}_2(\xi) \Xi(u+r) \varphi d\xi &= \int_{\{0 < u \leq R\}} f(u) v^{-}_2(\xi) \Xi(u) \varphi d\xi, \\ \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{\Omega \cap \{0 < u \leq R-r\}} v_1(\xi) |\nabla_H u|^p \frac{\Xi(u+r)}{\omega(u+r)} \varphi d\xi &= \int_{\Omega \cap \{0 < u \leq R\}} v_1(\xi) |\nabla_H u|^p \frac{\Xi(u)}{\omega(u)} \varphi d\xi. \end{aligned}$$

因此, 不等式 (3.12) 成立.

ii) 其次证如下极限成立: 当 $r \rightarrow 0^+$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \cap \{|\nabla_H u| \neq 0\}} v_1(\xi) \Xi(u+r) \omega^{p-1}(u+r) \chi_{\{0 < u+r \leq R\}} |\nabla_H \varphi|^p \varphi^{1-p} d\xi \\ & \rightarrow \int_{\Omega \cap \{|\nabla_H u| \neq 0\}} v_1(\xi) \Xi(u) \omega^{p-1}(u) \chi_{\{0 < u \leq R\}} |\nabla_H \varphi|^p \varphi^{1-p} d\xi. \end{aligned} \quad (3.13)$$

由条件 (H_1) 中 ii) 知 $\mathcal{H}(t) = \Xi(t) \omega^{p-1}(t)$ 在 0 的邻域内 a) 非增或 b) 有界.

a) 先考虑 $\mathcal{H}$ 在 0 的邻域内非增的情形, 即 $\exists \tau > 0$, s.t. 对 $\forall t < \tau$, 函数 $\mathcal{H}(t)$ 非增. 不失一般性, 假设 $2r \leq \tau \leq R$,

$$E_\tau := \Omega \cap \left\{ |\nabla_H u| \neq 0, u < \frac{\tau}{2} \right\} \cap \text{supp} \varphi,$$

$$F_\tau := \Omega \cap \left\{ |\nabla_H u| \neq 0, u \geq \frac{\tau}{2} \right\} \cap \text{supp} \varphi,$$

则有

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \cap \{|\nabla_H u| \neq 0\} \cap \text{supp} \varphi} v_1(\xi) \mathcal{H}(u+r) \chi_{\{u+r \leq R\}} |\nabla_H \varphi|^p \varphi^{1-p} d\xi \\ = & \int_{E_\tau} v_1(\xi) \mathcal{H}(u+r) \chi_{\{u+r \leq R\}} |\nabla_H \varphi|^p \varphi^{1-p} d\xi + \int_{F_\tau} v_1(\xi) \mathcal{H}(u+r) \chi_{\{u+r \leq R\}} |\nabla_H \varphi|^p \varphi^{1-p} d\xi. \end{aligned} \quad (3.14)$$

先考虑 E_τ 上的积分, 此时有 $u+r < \tau$. 因为 $\mathcal{H}(t)$ 在 $t \in (0, \tau)$ 时非增, 所以 $\mathcal{H}_r(\xi) := \mathcal{H}(u(\xi) + r)$ 在 E_τ 上非增.

又因为 $\mathcal{H}(u(\xi) + r) \rightarrow \mathcal{H}(u(\xi))$, 所以由 Levi 定理得

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{E_\tau} v_1(\xi) \mathcal{H}(u+r) \chi_{\{u+r \leq R\}} |\nabla_H \varphi|^p \varphi^{1-p} d\xi = \int_{E_\tau} v_1(\xi) \mathcal{H}(u) \chi_{\{0 < u \leq R\}} |\nabla_H \varphi|^p \varphi^{1-p} d\xi. \quad (3.15)$$

接下来考虑 F_τ 上的积分. 因为

$$\begin{aligned} v_1(\xi) \mathcal{H}(u+r) |\nabla_H \varphi|^p \varphi^{1-p} \chi_{\{u+r \leq R\} \cap F_\tau} & \leq v_1(\xi) \mathcal{H}(u+r) |\nabla_H \varphi|^p \varphi^{1-p} \chi_{\{\frac{\tau}{2} \leq u+r \leq R\}} \\ & \leq \sup_{t \in [\frac{\tau}{2}, R]} v_1(\xi) \mathcal{H}(t) |\nabla_H \varphi|^p \varphi^{1-p} \chi_{\text{supp} \varphi} \in L^1(\Omega), \end{aligned}$$

所以, 由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{F_\tau \cap \{u+r \leq R\}} v_1(\xi) \mathcal{H}(u+r) |\nabla_H \varphi|^p \varphi^{1-p} d\xi = \int_{F_\tau \cap \{u \leq R\}} v_1(\xi) \mathcal{H}(u) |\nabla_H \varphi|^p \varphi^{1-p} d\xi, \quad (3.16)$$

结合 (3.14)-(3.16) 知 (3.13) 成立.

b) 再考虑 $\mathcal{H}(t)$ 在 0 的邻域内有界的情形. 事实上, 注意到 $\mathcal{H}(t)$ 在 $[0, R]$ 有界, 从而与前面 a) 在 F_τ 上的讨论类似, 只需取 $\tau=0$ 即可. 由引理 3.2 知

$$|\{\xi \in \Omega : u(\xi) = 0, \nabla_H u(\xi) \neq 0\}| = 0.$$

因此, (3.13) 成立.

iii) 最后对 $r \leq \frac{R}{2}$, 显然有 $C(r, R) \leq C(R)$.

iv) 因此, 结合以上三步和引理 2.1 可知 (3.11) 成立.

定理 3.1 的证明 在 (3.11) 中令 $R \rightarrow \infty$ 可得证 (3.1) 成立. 事实上, 不失一般性, 假设

$$\int_{\Omega \cap \{|\nabla_H u| \neq 0, u > 0\}} v_1(\xi) \Xi(u) \omega^{p-1}(u) |\nabla_H \varphi|^p \varphi^{1-p} d\xi < \infty.$$

否则不等式 (3.1) 是平凡的. 因为

$$\int_{\Omega \cap \{|\nabla_H u| \neq 0, u > 0\}} v_1(\xi) |\nabla_H u|^{p-1} |\nabla_H \varphi| d\xi < \infty,$$

$$\int_{\Omega} f(u) v_2(\xi) d\xi < \infty,$$

所以由假设 (H_5) 知 $\lim_{R \rightarrow \infty} C(R) = 0$. 因此, (3.1) 直接从 (3.11) 推出, 其中应用了 Levi 定理.

4 定理 1.1 的证明

定理 1.1 的证明 若 ζ 是 Ω 中有紧支集的非负 Lipschitz 函数, 则 $\varphi = \zeta^p$ 是 Lipschitz 的, 且有 $\nabla_H \varphi = p\zeta^{p-1} \nabla_H \zeta$, 所以 $|\nabla_H \varphi| = p\zeta^{p-1} |\nabla_H \zeta|$, 从而

$$|\nabla_H \varphi|^p \varphi^{1-p} = (p|\zeta|^{p-1} |\nabla_H \zeta|)^p |\zeta|^{p(1-p)} = p^p |\nabla_H \zeta|^p,$$

因此

$$\int_{\text{supp} \varphi \cap \{|\nabla_H u| \neq 0\}} |\nabla_H \varphi|^p \varphi^{1-p} v_1(\xi) d\xi = p^p \int_{\text{supp} \varphi \cap \{|\nabla_H u| \neq 0\}} |\nabla_H \zeta|^p v_1(\xi) d\xi < \infty.$$

所以定理 3.1 的条件满足, 因此, 由式 (3.1) 可证得式 (1.2).

又因为 Lipschitz 函数的绝对值也为 Lipschitz 函数, 所以式 (1.2) 中的 ζ 可用 $|\zeta|$ 代替, 即可令 $\varphi = |\zeta|^p$, 重复前述过程, 便得定理 1.1.

接下来, 我们应用定理 1.1 推导出一个精确 Hardy-Poincaré 不等式.

推论 4.1 (精确 Hardy-Poincaré 不等式) 设 $1 < p < \infty$, $v_1, v_2 \in \mathcal{W}(\Omega)$, $v_1 \in L^1_{loc}(\Omega) \cap B_p(\Omega)$, $v_2 u^{p-1} \in L^1_{loc}(\Omega)$, $u \in H\mathcal{L}^{1,p}_{v_1, loc}(\Omega)$ 是 (1.1) 的非负非平凡弱解, 则对任意在 Ω 中有紧支集的 Lipschitz 函数 $\zeta \in H\mathcal{L}^{1,p}_{v_1}(\Omega)$, 成立不等式

$$\int_{\Omega} |\zeta|^p v_2(\xi) d\xi \leq \int_{\Omega} |\nabla_H \zeta|^p v_1(\xi) d\xi. \quad (4.1)$$

更进一步, 若 $-\Delta_{H,p,v_1} u_0 = u_0^{p-1} v_2(\xi) \in L^1_{loc}(\Omega)$ 存在非平凡、非负的弱解, 则 (4.1) 是精确的, 即 $\int_{\Omega} |\zeta|^p v_2(\xi) d\xi \leq C \int_{\Omega} |\nabla_H \zeta|^p v_1(\xi) d\xi$ 中的常数 $C = 1$ 是最佳的.

证 取 $\Xi(t) = t^{1-p}$, $\omega(t) = t$, 则有 $\omega(t) \Xi'(t) = -(p-1) \Xi(t)$, 所以 $c = p-1$. 再取 $f(t) = t^{p-1}$, $\delta = 0$, 则定理 1.1 的假设满足. 所以应用定理 1.1 得式 (4.1) 成立.

接下来证明精确性: 考虑有紧支集的光滑函数序列 $\{\zeta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, 假设存在满足定理所有假设的 u_0 , 使得在 $HW^{1,p}_{(v_2, v_1)}(\Omega)$ 中 $\zeta_k \rightarrow u_0$. 因为每个 ζ_k 有紧支集且属于 $H\mathcal{L}^{1,p}_{v_1}(\Omega)$, 所以我们有

$$\langle -\Delta_{H,p,v_1} u_0, \zeta_k \rangle = \int_{\Omega} |\nabla_H u_0|^{p-2} \nabla_H u_0 \cdot \nabla_H \zeta_k v_1(\xi) d\xi = \int_{\Omega} u_0^{p-1} v_2(\xi) \zeta_k d\xi.$$

令 $k \rightarrow \infty$ 得

$$\int_{\Omega} |\nabla_H u_0|^p v_1(\xi) d\xi = \int_{\Omega} u_0^p v_2(\xi) d\xi.$$

这就证明了精确性.

注 若取 (1.1) 中的 $v_1 \equiv 1$, 则 [4] 中的一些结果在 Heisenberg 群上也可建立.

参 考 文 献

- [1] Hardy G.H. Note on a theorem of Hilbert[J]. Math. Z., 1920, 6(3-4): 314–317.
- [2] Landau E, Schur I, Hardy G.H. A note on a theorem concerning series of positive terms: extract from a letter[J]. J. Lond. Math. Soc., 1926, s1-1(1): 38–39.
- [3] Azorero J.P.G, Alonso I.P. Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems[J]. J. Differential Equations, 1998, 144(2): 441–476.
- [4] Skrzypczak I. Hardy-type inequalities derived from p -harmonic problems[J]. Nonlinear Anal., 2013, 93(3): 30–50.
- [5] Skrzypczak I. Hardy inequalities resulted from nonlinear problems dealing with A -Laplace[J]. NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., 2014, 21(6): 841–868.
- [6] Drábek P, Kalamajska A, Skrzypczak I. Caccioppoli-type estimates and Hardy-type inequalities derived from degenerated p -harmonic problems[J]. Rev. Mat. Complut., 2019, 32: 601–630.
- [7] 郑前前, 马雅丽, 沈晓敏. 非凸区域上的一些 Hardy 型不等式 [J]. 高校应用数学学报: A 辑, 2019, 34(4): 451–460.
- [8] Gkikas K T, Psaradakis G. Optimal non-homogeneous improvements for the series expansion of Hardy's inequality[J]. Commun. Contemp. Math., 2021. doi.org/10.1142/S0219199721500310.
- [9] Chua S.K. Sharp conditions for weighted Sobolev interpolation inequalities[C]. Forum Math., 2005, 17(3): 461–478.
- [10] Chua S.K. Weighted Sobolev interpolation inequalities[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1994, 121(2): 441–449.
- [11] Fernández-Martínez P, Signes T. Real interpolation with symmetric spaces and slowly varying functions[J]. Quart. J. Math., 2010, 63(1): 133–164.
- [12] Gutierrez C.E, Wheeden R.L. Sobolev interpolation inequalities with weights[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1991, 323(1): 263–281.
- [13] Hajlasz P, Koskela P. Sobolev meets Poincaré[J]. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 1995, 320(10): 1211–1215.
- [14] Haroske D.D, Skrzypczak L. Entropy numbers of embeddings of function spaces with Muckenhoupt weights, III. Some limiting cases[J]. J. Func. Spaces, 2011, 9(2): 129–178.
- [15] Kalamajska A, Pietruskapaluba K. On a variant of Gagliardo-Nirenberg inequality deduced from Hardy[J]. Bull. Pol. Acad. Sci. Math., 2009, 59(2): 133–149.
- [16] Niu P, Zhang H, Wang Y. Hardy type and Rellich type inequalities on the Heisenberg group[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2001, 129(12): 3623–3630.
- [17] Niu P, Ou Y, Han J. Several Hardy type inequalities with weights related to Generalized Greiner operator[J]. Canad. Math. Bull., 2010, 53(1): 153–162.
- [18] Han Y, Niu P. Hardy-Sobolev type inequalities on the H-type group[J]. Manuscripta Math., 2005, 118(2): 235–252.
- [19] Zhang H, Niu P. Hardy-type inequalities and Pohozaev-type identities for a class of p -degenerate subelliptic operators and applications[J]. Nonlinear Anal., 2003, 54(1): 165–186.
- [20] Dou J, Guo Q, Niu P. Hardy inequalities with remainder terms for the generalized Baouendi-Grushin vector fields[J]. Math. Inequal. Appl., 2010, 13(3): 555–570.
- [21] Han Y, Niu P, Luo X. A Hardy type inequality and Indefinite Eignvalue-problems on the Homogeneous group[J]. 偏微分方程: 英文版, 2002, (4): 28–38.
- [22] D'Ambrosio L. Some Hardy inequalities on the Heisenberg group[J]. Differ. Equ., 2004, 40(4): 552–564.

- [23] 王胜军, 窦井波. Heisenberg 型群上的广义 Picone 恒等式及其应用 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2020, 42(2): 48–54.
- [24] Bonfiglioli A, Lanconelli E, Uguzzoni F. Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplaces[M]. Berlin Heidelberg: Springer, 2007.

HARDY-TYPE INEQUALITY DERIVED FROM WEIGHTED SUB-ELLIPTIC p -LAPLACE INEQUALITY ON THE HEISENBERG GROUP AND ITS APPLICATION

ZHANG Jun-li

(*School of Mathematics and Statistics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China*)

Abstract: This paper studies Hardy-type inequality and its application. We firstly obtain the Caccioppoli inequality for nonnegative Lipschitz function from weighted sub-elliptic p -Laplace inequality. We use this inequality to derive Hardy-type inequality of another Lipschitz function, and then achieve an exact Hardy-Poincaré inequality. It should be emphasized that the Hardy-type inequality here is for $1 < p < \infty$ and also holds for unbounded regions.

Keywords: Heisenberg group; p -Laplace inequality; hardy-type inequality, Lipschitz function

2010 MR Subject Classification: 26D10; 35H20; 35J70; 35J60