Vol. 42 (2022)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

LBRAGIMOV-GADJIEV-DURRMEYER 算子在 ORLICZ 空间内的逼近性质

李昕昕 [1], 吴嘎日迪 [1,2]
(1. 内蒙古师范大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特 010022)
(2. 内蒙古自治区应用数学中心, 内蒙古 呼和浩特 010022)

摘 要: 本文研究了 lbragimov-Gadjiev-Durrmeyer 算子在 Orlicz 空间内的逼近问题. 借助了 Jensen 不等式, *Hölder* 不等式, K 泛函, 光滑模等工具, 获得了 lbragimov-Gadjiev-Durrmeyer 算子在 Orlicz 空间内的逼近度, 以及该算子的加权逼近, 推广了 lbragimov-Gadjiev-Durrmeyer 算子在 L_p 空间中的逼近度及加权逼近.

关键词: lbragimov-Gadjiev-Durrmeyer 算子; 逼近性质; 加权; Orlicz 空间
MR(2010) **主题分类号**: 41A35; 41A25 **中图分类号**: O174.41
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2022)03-0237-09

1 引言

文献 [1] 中,Turky 学者 Gülsüm Ulusoy* 和 Ali Aral 研究了 lbragimov-Gadjiev-Durrmeyer 算子在 L_p 空间内的逼近问题，但是在 Orlicz 空间内至今没有发现有人研究过该算子的逼近问题, 我们在本文中尝试做这方面的工作. 由于 Orlicz 空间是 L_p 空间的实质性的扩充和提升, 本文的研究内容具有一定的拓展意义.

设 $(\varphi_n(t))_{n\in N}, (\psi_n(t))_{n\in N}$ 是 $R^+=[0,\infty)$ 上的连续函数列, 使得 $\varphi_n(0)=0$, 对所有的 t 有 $\psi_n(t)>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2\psi_n(0)}=0$.

令 $(\alpha_n)_{n\in N}$ 为一列正数列且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{n}=1$. $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n\psi_n(0)=l_1, l_1>0$.

lbragimov-Gadjiev-Durrmeyer 算子是指：

$$\begin{aligned} M_n(f;x)=&(n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{v=0}^{\infty}K_n^{(v)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left[\alpha_n\psi_n(0)\right]^v}{v!}\\ &\times\int_0^{\infty}K_n^{(v)}\left(y,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left[\alpha_n\psi_n(0)\right]^v}{v!}\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

其中 $K_n^{(v)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)=\frac{\partial^v}{\partial u^v}K_n(x,t,u)\Big|_{u=\alpha_n\psi_n(t),t=0}$, 且 $\left\{K_n^{(v)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{[\alpha_n\psi_n(0)]^v}{v!}\right\}_{v=0}^{\infty}$ 为 lbragimov-Gadjiev-Durrmeyer 基函数系.

*收稿日期: 2021-05-02 接收日期: 2021-11-03
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11761055); 内蒙古师范大学硕士研究生科研创新基金项目 (CXJJS21121).
作者简介: 李昕昕 (1997–), 女, 内蒙古自治区赤峰, 研究生, 主要研究方向: 函数逼近论.
通讯作者: 吴嘎日迪, E-mail: wgrd@imnu.edu.cn.

由文献 [2] 直接得出,$K_n(x,t,u)$ 是关于 u 的全纯函数, 且满足以下条件:

(1) 对固定的 $x,t\in R^+$, 基函数系的每个函数都是关于 u 的全纯函数, 且满足对 $\forall x\in R^+,n\in N$, 有 $K_n(x,0,0)=1$.

(2) 对取定的 $u=u_1,x\in R^+$ 有 $\left[(-1)^v\frac{\partial^v}{\partial u^v}K_n(x,t,u)\Big|_{u=u_1,t=0}\right]\geq 0,v=0,1,\ldots,$.

(3) 对所有的 $x\in R^+,n\in N$

$$\frac{\partial^v}{\partial u^v}K_n(x,t,u)\Big|_{u=u_1,t=0}=-nx\left[\frac{\partial^{v-1}}{\partial u^{v-1}}K_{m+n}(x,t,u)\Big|_{u=u_1,t=0}\right],v=0,1,\ldots,.$$

其中 m 满足 $m+n=0$ 或自然数.

(4) 对 $\forall u\in R,K_n(0,0,u)=1$, 且对 $\forall p\in N,u=u_1,\lim\limits_{n\to\infty}x^pK_n^{(v)}(x,0,u_1)=0$.

(5) 对于任何固定的 t,u, 函数 $K_n(x,t,u)$ 关于变量 x 是连续微分的, 且满足对取定的 $u=u_1$ 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}K_n(x,0,u_1)=-nu_1K_{m+n}(x,0,u_1).$$

(6) 对所有的 $x\in R^+,n\in N$, 取定的 $u=u_1$, $\frac{n+vm}{1+u_1mx}K_n^{(v)}(x,0,u_1)=nK_{m+n}^{(v)}(x,0,u_1)$.

(7) 由文献 [1],$K_n(x,t,u)$ 还满足 $(1+u_1mx)^{-r}K_n^{(v)}(x,0,u_1)=K_{n+rm}^{(v)}(x,0,u_1)\alpha_{n,r}$, 其中 r 为自然数,$\alpha_{n,r}$ 是收敛到一个正实数的关于 n 的数列.

令 $u=\varphi_n(t),u_1=\alpha_n\psi_n(t),t=0$, 根据 $\varphi_n(t)=0,K_n(x,0,0)=1$ 可得

$$\sum_{v=0}^{\infty}K_n^{(v)}(x,0,u_1)\Big|_{u_1=\alpha_n\psi_n(t),t=0}\frac{[\alpha_n\psi_n(0)]^v}{v!}\quad=\quad 1. \tag{1.1}$$

本文将研究 lbragimov-Gadjiev-Durrmeyer 算子在 Orlicz 空间中的逼近问题, 文章里用 $M(u)$ 和 $N(v)$ 表示互余的 N 函数, 有关于 N 函数的定义及性质详情可见文献 [3] 中的论述. 定义 Orlicz 空间中的范数:

$$\|u\|_M=\sup_{\rho(v;N)\leq 1}\left|\int_0^\infty u(x)v(x)\mathrm{d}x\right|,$$

由具有有限的 Orlicz 范数的可测函数的全体 $\{u(x)\}$ 构成了 N 函数 $M(u)$ 生成的 Orlicz 空间 $L_M^*[0,\infty)$, 其中 $\rho(v;N)=\int_0^\infty N(v(x))\mathrm{d}x$ 表示 $v(x)$ 关于 $N(v)$ 的模. 由文献 [3] 知,Orlicz 范数还可定义为 $\|u\|_M=\inf\limits_{\beta>0}\dfrac{1}{\beta}\left(1+\displaystyle\int_0^\infty M(\beta u(x))\mathrm{d}x\right)$. 本文中用 C 表示常数, 但在不同处取值不同.

2 相关引理

引理 1 [2] 设 v 为非负整数,$x\in R^+$,$m,n\in N$. 则有 $\displaystyle\int_0^\infty K_n^{(v)}(y,0,u_1)\mathrm{d}y=(-1)^v\frac{v!}{(n-m)u_1^{v+1}}$.

引理 2 [2] 令 $v,n\in N$, 对任意自然数 r, 有

$$\begin{aligned}M_n(t^r;x)=&\frac{n^{2r}}{(n-2m)\cdots(n-rm)\left(n-(r+1)m\right)(\alpha_n)^r\left(n^2\psi_n(0)\right)^r}\\&\times\sum_{j=0}^{r}n(n+m)\cdots(n+(j-1)m)\,C_{j,r}\left[\alpha_n\psi_n(0)\right]^jx^j,\end{aligned}$$

其中 $C_{j,r}=\frac{r!}{j!}\binom{r}{j}$,

$$M_n(1;x)=1, M_n(t;x)=\frac{n^2}{(n-2m)\alpha_n}\left(\frac{\alpha_n}{n}x+\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right),$$

$$M_n(t^2;x)=\frac{n^4}{(n-2m)(n-3m)\alpha_n^2}\left(\left(\frac{\alpha_n}{n}x\right)^2+\frac{\alpha_n}{n}\frac{4}{n^2\psi_n(0)}x+\frac{2}{\left(n^2\psi_n(0)\right)^2}\right).$$

引理 3 [1] 令 $K_n(x,t,u)$ 满足条件 (1) → (7) 且 $f(t)=(1+u_1mt)^{-r}, t\in R^+, n,r\in N$, 对 $n>mr$ 有 $M_n\left((1+u_1mt)^{-r};x\right)\le C(1+u_1mx)^{-r}, x\in R^+$, 其中 C 表示与 n 无关的常数.

在下文中, 考虑到光滑模和逼近速度之间的联系, 通过文献 [4][5] 中给出的光滑模, 有

$$\omega_\varphi^2(f,t)_M=\sup_{0<H\le t}\|\triangle_H^r\varphi f\|_M, t\in R^+, \varphi(x)=\sqrt{x\left(1+xm\alpha_n\psi_n(0)\right)},$$

其中

$$\triangle_H^r f(x)=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}(-1)^k f\left(x+\left(\frac{r}{2}-k\right)H\right), & \left[x-\frac{r}{2}H, x+\frac{r}{2}H\right]\in R^+,\\ 0\qquad\qquad , & \text{其他}.\end{cases}$$

有与该光滑模等价的 K 泛函 $\overline{K}_\varphi^2(f,x)=\inf\limits_{g\in\overline{\Omega}_M^r(\varphi,[0,\infty))}\left\{\|f-g\|_M+t^r\|\varphi^r g^{(r)}\|_M+t^{2r}\|g^{(r)}\|_M\right\}$, 其中 $\overline{\Omega}_M^r\left(\varphi,[0,\infty)\right)=\left\{g\in L_M^*[0,\infty), g^{(r-1)}\in AC_{loc}(0,\infty); \varphi^r g^{(r)}\in L_M^*[0,\infty)\right\}$ 表示对应的加权 Sobolev 空间.

在本文中, 光滑模的定义为: 对给定的整数 $k\ge 1, h\neq 0$, 设 $x, x+kh\in[a,b].\omega_k(f,t)_M=\sup\limits_{|h|\le t}\|\triangle_h^k(f;\cdot)\|_M$ 称为 f 的 k 阶光滑模.

引理 4 令 $n\in N, n>m, f\in L_M^*[0,\infty)$, 不等式 $\|M_n f\|_M\le\|f\|_M$ 成立.

证明 由引理 1 和 (1.1) 式, 利用 Jensen 不等式

$$\begin{aligned}&\|M_n f\|_M\\ =&\inf_{\beta>0}\frac{1}{\beta}\left(1+\int_0^\infty M\left(\beta(n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{v=0}^{\infty}K_n^{(v)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left[\alpha_n\psi_n(0)\right]^v}{v!}\right.\right.\\ &\left.\left.\times\int_0^\infty f(y)K_n^{(v)}\left(y,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left[\alpha_n\psi_n(0)\right]^v}{v!}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\right)\\ \le&\inf_{\beta>0}\frac{1}{\beta}\left(1+\int_0^\infty\sum_{v=0}^{\infty}K_n^{(v)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left[\alpha_n\psi_n(0)\right]^v}{v!}\right.\\ &\left.\times M\left(\beta(n-m)\alpha_n\psi_n(0)\int_0^\infty f(y)K_n^{(v)}\left(y,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left[\alpha_n\psi_n(0)\right]^v}{v!}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\right)\\ =&\inf_{\beta>0}\frac{1}{\beta}\left(1+\int_0^\infty\sum_{v=0}^{\infty}K_n^{(v)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left[\alpha_n\psi_n(0)\right]^v}{v!}\mathrm{d}x\right.\\ &\left.\times M\left(\beta(n-m)\alpha_n\psi_n(0)\int_0^\infty f(y)K_n^{(v)}\left(y,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left[\alpha_n\psi_n(0)\right]^v}{v!}\mathrm{d}y\right)\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\inf_{\beta>0}\frac{1}{\beta}\left(1+\int_0^\infty\sum_{v=0}^\infty K_n^{(v)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{[\alpha_n\psi_n(0)]^v}{v!}\mathrm{d}x\right.\\
&\quad\left.\times M\left(\frac{\int_0^\infty\beta f(y)K_n^{(v)}\left(y,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{[\alpha_n\psi_n(0)]^v}{v!}\mathrm{d}y}{\int_0^\infty K_n^{(v)}\left(y,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{[\alpha_n\psi_n(0)]^v}{v!}\mathrm{d}y}\right)\right)\\
&\le\inf_{\beta>0}\frac{1}{\beta}\left(1+\int_0^\infty\sum_{v=0}^\infty K_n^{(v)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{[\alpha_n\psi_n(0)]^v}{v!}\mathrm{d}x\right.\\
&\quad\left.\times(n-m)\alpha_n\psi_n(0)\int_0^\infty K_n^{(v)}\left(y,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{[\alpha_n\psi_n(0)]^v}{v!}M\left(\beta f(y)\right)\mathrm{d}y\right)\\
&\le\inf_{\beta>0}\frac{1}{\beta}\left(1+\sum_{v=0}^\infty\int_0^\infty K_n^{(v)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{[\alpha_n\psi_n(0)]^v}{v!}\mathrm{d}x\right.\\
&\quad\left.\times(n-m)\alpha_n\psi_n(0)\int_0^\infty K_n^{(v)}\left(y,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{[\alpha_n\psi_n(0)]^v}{v!}M\left(\beta f(y)\right)\mathrm{d}y\right)\\
&=\inf_{\beta>0}\frac{1}{\beta}\left(1+\sum_{v=0}^\infty\int_0^\infty K_n^{(v)}\left(y,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{[\alpha_n\psi_n(0)]^v}{v!}M\left(\beta f(y)\right)\mathrm{d}y\right)\\
&=\inf_{\beta>0}\frac{1}{\beta}\left(1+\int_0^\infty\sum_{v=0}^\infty K_n^{(v)}\left(y,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{[\alpha_n\psi_n(0)]^v}{v!}M\left(\beta f(y)\right)\mathrm{d}y\right)\\
&=\inf_{\beta>0}\frac{1}{\beta}\left(1+\int_0^\infty M\left(\beta f(y)\right)\mathrm{d}y\right)=\|f\|_M.
\end{aligned}
$$

证毕.

3 主要结论

定理 1 令 $n\in N, n>3m, \forall f\in L_M^*[0,\infty)$, 有

$$
\|M_nf-f\|_M\le C\left\{\omega_\varphi^2\left(f,((n-3m)u_1)^{-\frac{1}{2}}\right)_M+((n-3m)u_1)^{-1}\|f\|_M\right\}.
$$

证 由 $\omega_\varphi^2\left(f,((n-3m)u_1)^{-\frac{1}{2}}\right)_M$ 和 $\overline{K}_\varphi^2\left(f,((n-3m)u_1)^{-1}\right)_M$ 的等价性, 只需证明以下不等式

$$
\|M_nf-f\|_M\le C\left\{\overline{K}_\varphi^2\left(f,((n-3m)u_1)^{-1}\right)_M+((n-3m)u_1)^{-1}\|f\|_M\right\}.
$$

对所有的 $g\in\overline{\Omega}_M^2(\varphi;R^+)$, 由引理 4, 有

$$
\begin{aligned}
\|M_nf-f\|_M&=\|M_n(f-g+g)-(f-g+g)\|_M\\
&\le\|M_n(f-g)-(f-g)+M_ng-g\|_M\\
&\le\|M_n(f-g)\|_M+\|f-g\|_M+\|M_ng-g\|_M\\
&\le\|f-g\|_M+\|f-g\|_M+\|M_ng-g\|_M\\
&\le 2\|f-g\|_M+\|M_ng-g\|_M.
\end{aligned}\tag{3.1}
$$

下面估计上式中的 $\|M_n g-g\|_M$, 利用 g 的泰勒展式

$$g(t)=g(x)+g'(x)(t-x)+R_2(g,t,x),$$

其中 $R_2(g,t,x)=\int_x^t (t-u)g''(u)\mathrm{d}u$, 则 $M_n(g;x)-g(x)=M_n\left[(t-x)g'(x)\right]+M_n\left(R_2(g,t,x);x\right)$, 下面证明以下不等式的有效性

$$\|M_n\left(R_2(g,t,\cdot);\cdot\right)\|_M\le C\left(n-3m)u_1\right)^{-1}\left\|\left(\varphi^2+(n-3m)u_1)^{-1}\right)g''\right\|_M.$$

由 Orlicz 空间中的 $H\ddot{o}lder$ 不等式

$$\begin{aligned}
&|(R_2(g,t,x)|\\
=&|\int_x^t (t-u)g''(u)\mathrm{d}u|\\
=&\left|\int_x^t (t-u)\left[\varphi^2(u)+((n-3m)u_1)^{-1}\right]g''(u)\left[\varphi^2(u)+((n-3m)u_1)^{-1}\right]^{-1}\mathrm{d}u\right|\\
\le&\left\|\left[\varphi^2+((n-3m)u_1)^{-1}\right]g''\right\|_M\left\|(t-u)\left[\varphi^2+((n-3m)u_1)^{-1}\right]^{-1}\right\|_N\\
=&\left\|\left[\varphi^2+((n-3m)u_1)^{-1}\right]g''\right\|_M\sup_{\rho(\gamma;N)\le 1}\left|\int_x^t (t-u)\left[\varphi^2(u)+((n-3m)u_1)^{-1}\right]^{-1}\gamma(u)\mathrm{d}u\right|\\
\le C&\left\|\left[\varphi^2+((n-3m)u_1)^{-1}\right]g''\right\|_M\int_x^t (t-u)\left[\varphi^2(u)+((n-3m)u_1)^{-1}\right]^{-1}\mathrm{d}u\\
\le&\left\|\left[\varphi^2+((n-3m)u_1)^{-1}\right]g''\right\|_M\int_x^t |t-u|\left[\varphi^2(u)+((n-3m)u_1)^{-1}\right]^{-1}\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

由文献 [1] 可得当 $x<t$ 时,

$$|R_2(g,t,x)|\le C\left\|\left[\varphi^2+((n-3m)u_1)^{-1}\right]g''\right\|_M(t-x)^2\left((n-3m)u_1\right),$$

当 $x>t$ 时,

$$\begin{aligned}
|R_2(g,t,x)|\le &C\left\|\left[\varphi^2+((n-3m)u_1)^{-1}\right]g"\right\|_M\\
&\times\frac{(t-x)^2}{x}\left\{\frac{x}{\varphi^2(x)+((n-3m)u_1)^{-1}}+\frac{t}{\varphi^2(t)+((n-3m)u_1)^{-1}}\right\}.
\end{aligned}$$

故当 $x\in\left[0,\frac{1}{u_1(n-3m)}\right]$ 时, 由文献 [1] 有

$$\begin{aligned}
|M_n\left(R_2(g,t,x);x\right)|\le &C\left\|\left[\varphi^2+((n-3m)u_1)^{-1}\right]g''\right\|_M M_n\left((t-x)^2\left((n-3m)u_1\right)\right)\\
\le &C\left((n-3m)u_1\right)^{-1}\left\|\left[\varphi^2+((n-3m)u_1)^{-1}\right]g''\right\|_M,
\end{aligned}$$

当 $x \in \left[\frac{1}{u_1(n-3m)}, \infty\right)$ 时, 由文献 [1] 有

$$\begin{aligned}|M_n\left(R_2(g,t,x);x\right)| \le & C\left\|\left[\varphi^2+((n-3m)u_1)^{-1}\right]g''\right\|_M\left\{C\left((n-3m)u_1\right)^{-1}\right.\\ &\left.+\frac{1}{x}\left[M_n\left((t-x)^4;x\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left[M_n\left((1+u_1mt)^{-2};x\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\\ \le & C\left((n-3m)u_1\right)^{-1}\left\|\left[\varphi^2+((n-3m)u_1)^{-1}\right]g''\right\|_M,\end{aligned}$$

从而

$$\|M_n\left(R_2(g,t,\cdot);\cdot\right)\|_M \le C\left(n-3m)u_1\right)^{-1}\left\|\left(\varphi^2+(n-3m)u_1)^{-1}\right)g''\right\|_M.$$

另一方面, 对所有的 $g \in \overline{\Omega}_M^2(\varphi;R^+)$, 有

$$\|M_ng-g\|_M \le C\left((n-3m)u_1\right)^{-1}\left\{\|g\|_M+\|\varphi^2g''\|_M+\left\|\left(\varphi^2+((n-3m)u_1)^{-1}\right)g''\right\|_M\right\},$$

上式可由文献 [4] 的定理 9.5.3(a)(c) 式的证明得. 结合 (3.1) 式可得

$$\begin{aligned}\|M_nf-f\|_M \le & 2\|f-g\|_M+C\left((n-3m)u_1\right)^{-1}\\ &\times\left\{\|f-g\|_M+\|f\|_M+\|\varphi^2g''\|_M+\left\|\left(\varphi^2+((n-3m)u_1)^{-1}\right)g''\right\|_M\right\}\\ \le & C\Big\{\|f-g\|_M+\left((n-3m)u_1\right)^{-1}\|f\|_M\\ &+\left((n-3m)u_1\right)\|\varphi^2g''\|_M+\left((n-3m)u_1\right)\|g''\|_M\Big\}.\end{aligned}$$

对所有的 $g \in \overline{\Omega}_M^2(\varphi;R^+)$, 取下确界

$$\|M_nf-f\|_M \le C\left\{\overline{K}_\varphi^2\left(f,((n-3m)u_1)^{-1}\right)_M+\left((n-3m)u_1\right)^{-1}\|f\|_M\right\}.$$

证毕.

定理 2 令 $n \in N, n > 3m$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\|M_nf-f\|_M = 0$.

证 由 $\omega_\varphi^2\left(f,((n-3m)u_1)^{-\frac{1}{2}}\right)_M$ 和 $\overline{K}_\varphi^2\left(f,((n-3m)u_1)^{-1}\right)_M$ 的等价性可证.

4 加权逼近

定义

$$L_{M,2r}^*[0,\infty) = \left\{f: R^+ \to R; \|f\|_{M,2r} = \sup_{\rho(\gamma;N)\le 1}\left|\int_0^\infty \frac{|f(t)|}{1+t^{2r}}\gamma(t)\mathrm{d}t\right|\right\},$$

即可得 $\|f\|_{M,2r} = \left\|\frac{f}{1+\cdot^{2r}}\right\|_M$.

引理 5 令 $f \in L_{M,2r}^*[0,\infty), r \in N$. 有 $\|M_nf-f\|_{M,2r} \le C\|f\|_{M,2r}$.

证 由 Orlicz 空间中的 Hölder 不等式

$$
\begin{aligned}
|M_n(f;x)| =&(n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{v=0}^{\infty}K_n^{(v)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left[\alpha_n\psi_n(0)\right]^v}{v!}\\
&\times\int_0^{\infty}\frac{|f(y)|}{1+y^{2r}}(1+y^{2r})K_n^{(v)}\left(y,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left[\alpha_n\psi_n(0)\right]^v}{v!}\mathrm{d}y\\
=&\|f\|_{M,2r}\times\left\|(n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{v=0}^{\infty}K_n^{(v)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left[\alpha_n\psi_n(0)\right]^v}{v!}\right.\\
&\left.\times(1+y^{2r})K_n^{(v)}\left(y,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left[\alpha_n\psi_n(0)\right]^v}{v!}\right\|_N.
\end{aligned}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
&\left\|(n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{v=0}^{\infty}K_n^{(v)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left[\alpha_n\psi_n(0)\right]^v}{v!}(1+y^{2r})K_n^{(v)}\left(y,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left[\alpha_n\psi_n(0)\right]^v}{v!}\right\|_N\\
&=\sup_{\rho(\gamma;M)\le 1}\left|(n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{v=0}^{\infty}K_n^{(v)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left[\alpha_n\psi_n(0)\right]^v}{v!}\right.\\
&\qquad\left.\times\int_0^{\infty}(1+y^{2r})K_n^{(v)}\left(y,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left[\alpha_n\psi_n(0)\right]^v}{v!}\gamma(y)\mathrm{d}y\right|\\
&\le C(n-m)\alpha_n\psi_n(0)\sum_{v=0}^{\infty}K_n^{(v)}\left(x,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left[\alpha_n\psi_n(0)\right]^v}{v!}\\
&\qquad\times\int_0^{\infty}(1+y^{2r})K_n^{(v)}\left(y,0,\alpha_n\psi_n(0)\right)\frac{\left[\alpha_n\psi_n(0)\right]^v}{v!}\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

由文献 [1] 得

$$
|M_n(f;x)|\le C\|f\|_{M,2r}\left\{M_n(1;x)+M_n(t^{2r};x)\right\}.
$$

则

$$
\begin{aligned}
\|M_n(f;x)\|_M \le& C\|f\|_{M,2r}\sup_{\rho(\gamma;N)\le 1}\left|\int_0^{\infty}\frac{\{M_n(1;x)+M_n(t^{2r};x)\}}{1+x^{2r}}\gamma(x)\mathrm{d}x\right|\\
\le& C\|f\|_{M,2r}\int_0^{\infty}\frac{\{M_n(1;x)+M_n(t^{2r};x)\}}{1+x^{2r}}\mathrm{d}x\\
\le& C\|f\|_{M,2r},
\end{aligned}
$$

其中 C 是独立于 n 的常数, 且在不同位置取值不同. 证毕.

定理 3 令 w 是整个实轴上的正连续函数, 且满足条件 $\int\limits_{[0,\infty)} t^c w(t)\mathrm{d}t<\infty$, 其中 c 为某一常数. 令 $(L_n)_{n\in N}$ 是 $L^*_{M,w}[0,\infty)\to L^*_{M,w}[0,\infty)$ 的非一致有界的正线性算子, 满足条件

$$
\lim_{n\to\infty}\left\|L_n(t^i;x)-x^i\right\|_{M,w}=0, i=0,1,2.
$$

则对 $\forall f\in L^*_{M,w}[0,\infty)$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|L_nf-f\|_{M,w}=0$.

当 $w(x)=(1+x^{2r})^{-1}$ 时, 得到下述定理.

定理 4 令 $f\in L^*_{M,w}[0,\infty), r\in N$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\|M_nf-f\|_{M,w}=0$.

证 由定理 3, 只须证明以下三个条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\|M_n(t^v;x)-x^v\|_{M,w}=0, v=0,1,2$. $v=0$ 时, 因为 $M_n(1;x)=1$, 上式显然成立. $v=1$ 时, 由引理 2, 对 $n>2m$, 有

$$\begin{aligned}\|M_n(t;\cdot)-\cdot\|_{M,w}=&\sup_{\rho(\gamma;N)\le 1}\left|\int_0^\infty\frac{|M_n(t;x)-x|}{1+x^{2r}}\gamma(x)\mathrm{d}x\right|\\ \le& C\int_0^\infty\frac{|M_n(t;x)-x|}{1+x^{2r}}\mathrm{d}x\\ =&C\int_0^\infty\frac{1}{1+x^{2r}}\left\{\frac{n^2}{(n-2m)\alpha_n}\left(\frac{\alpha_n}{n}x+\frac{1}{n^2\psi_n(0)}\right)-x\right\}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由文献 [1] 得

$$\|M_n(t;\cdot)-\cdot\|_{M,w}\le C\left\{\left(\frac{n}{n-2m}-1\right)\int_0^\infty\frac{x}{1+x^{2r}}\mathrm{d}x+\frac{1}{(n-2m)\alpha_n\psi_n(0)}\int_0^\infty\frac{1}{1+x^{2r}}\mathrm{d}x\right\}$$

当 $n\to\infty$ 时成立. $v=2$ 时, 由引理 2, 对 $n>3m$, 由文献 [1], 有

$$\begin{aligned}\|M_n(t^2;\cdot)-\cdot^2\|_{M,w}=&\sup_{\rho(\gamma;N)\le 1}\left|\int_0^\infty\frac{|M_n(t^2;x)-x^2|}{1+x^{2r}}\gamma(x)\mathrm{d}x\right|\\ \le& C\int_0^\infty\frac{|M_n(t^2;x)-x^2|}{1+x^{2r}}\mathrm{d}x\\ \le& C\left(\frac{n(m+n)}{(n-2m)(n-3m)-1}\right)\int_0^\infty\frac{x^2}{1+x^{2r}}\mathrm{d}x\\ &+C\left(\frac{4n}{(n-2m)(n-3m)\alpha_n\psi_n(0)}\right)\int_0^\infty\frac{x}{1+x^{2r}}\mathrm{d}x\\ &+C\left(\frac{2}{(n-2m)(n-3m)\left(\alpha_n\psi_n(0)\right)^2}\right)\int_0^\infty\frac{1}{1+x^{2r}}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时成立. 证毕.

5 特例

算子 $M_n(f)$ 在以下情况下可以转化为我们所熟知的算子

(1) 若令 $K_n(x,t,u)=[1+t+ux]^{-1},\alpha_n=n,\psi_n=\frac{1}{n},m=1$, 算子降低为 Baskakov-Durrmeyer 算子 $B_n(f;x)=(n-1)\sum_{k=0}^\infty v_{n,k}(x)\int_0^\infty v_{n,k}(x)f(t)\mathrm{d}t$, 其中 $v_{n,k}(x)=\binom{n+k-1}{k}\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$.

(2) 若令 $K_n(x,t,u)=e^{-n(t+ux)},\alpha_n=n,\psi_n(0)=\frac{1}{n},m=0$, 算子降低为 Szasz-Durrmeyer 算子 $S_n(f;x)=n\sum_{k=0}^\infty p_{n,k}(x)\int_0^\infty p_{n,k}(t)f(t)\mathrm{d}t$, 其中 $p_{n,k}(x)=e^{-nx}\frac{(nx)^k}{k!}$.

定理 5 若 $f\in L^*_{M,w}[0,\infty)$, 则 $\|S_nf-f\|_M\le C\left\{\omega_\varphi^2\left(f,n^{-\frac{1}{2}}\right)_M+n^{-1}\|f\|_M\right\}$.

若 $f\in L^*_{M,w}[0,\infty), n>3$, 则 $\|B_nf-f\|_M\le C\left\{\omega_\varphi^2\left(f,(n-3)^{-\frac{1}{2}}\right)_M+(n-3)^{-1}\|f\|_M\right\}$.

参 考 文 献

[1] Gülsüm Ulusoy, Ali Aral. Approximation properties of Ibragimov-Gadjiev-Durrmeyer operators on Lp(R^+) [J]. Demonstr. Math., 2017, 50(1): 156–174.

[2] Aral A, Acar T. Modern mathematical methods and high performance computing in science and technology [M]. India: Springer, 2016.

[3] 吴从炘, 王延辅. 奥尔里奇空间及其应用 [M]. 哈尔滨: 黑龙江科学技术出版社, 1983.

[4] Ditzian,Z.,Totik,V.,Moduli of smoothness[M]. New York: Springer-Verleg, 1987.

[5] WU Garidi.On approximation by polynomials in Orlicz spaces[J]. Approximation Theory and its Applications, 1991, 7(3): 97–110.

[6] 王亚茹, 吴嘎日迪. 一类 Szasz-Durrmeyer-Bezier 算子在 Orlicz 空间内的逼近 [J]. 高师理科学刊, 2019, 39(6): 5–7.

ON THE APPROXIMATION PROPERTIES OF LBRAGIMOV-GADJIEV-DURRMEYER OPERATORS IN ORLICZ SPACES

LI Xin-xin[1], WU Garidi[1,2]

(*1. College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, China*)

(*2. Inner Mongolia Center of Applied Mathematics, Hohhot 010022, China*)

Abstract: In this paper, we study the approximation of lbragimov-Gadjiev-Durrmeyer operators by feat of Jensen inequation, Hölder inequation, K-function and Moduli of smoothness. This paper provides the rate of approximation of lbragimov-Gadjiev-Durrmeyer operators in Orlicz spaces, meanwhile studies it's weighted properties, generalizes the rate of approximation and weighted properties of lbragimov-Gadjiev-Durrmeyer operators in L_p spaces.

Keywords: lbragimov-Gadjiev-Durrmeyer operators; approximation properties; weighted; Orlicz spaces

2010 MR Subject Classification: 41A35; 41A25