Vol. 42 (2022)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

分数布朗单驱动的随机微分方程的传输不等式

梁唯伊

(武汉大学数学与统计学院, 湖北武汉 430072)

摘 要: 本文研究了分数布朗单驱动的随机微分方程的问题, 利用 Girsanov 变换, 获得了该方程的解的分布在连续轨道空间上关于一致度量满足 T2 传输不等式的结果, 推广了现有文献中的结论.

关 键 词: 随机微分方程; 传输不等式; 分数布朗单; Girsanov 变换

MR(2010) **主题分类号**: 60E15; 60H10 **中图分类号**: O211.63

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2022)03-0226-11

1 引言

考虑随机微分方程

$$X_{t,s}=\int_0^t\int_0^s b(X_{u,v})\,du\,dv+W^{\alpha,\beta}_{t,s},\quad (t,s)\in[0,T]^2, \tag{1.1}$$

其中 b 为一个 Lipschitz 函数, 即存在一个常数 $L_b>0$, 满足

$$|b(x)-b(y)|\le L_b|x-y|,\quad x,y\in\mathbb{R}, \tag{1.2}$$

$(W^{\alpha,\beta}_{t,s})_{(t,s)\in[0,T]^2}$ 是一个分数布朗单, 即它是一个初始值为 0, 均值为 0 的双参数高斯过程, 其协方差函数满足

$$\mathbb{E}\left[W^{\alpha,\beta}_{t,s}W^{\alpha,\beta}_{u,v}\right]=\frac{1}{2}\left(t^{2\alpha}+u^{2\alpha}-|t-u|^{2\alpha}\right)\frac{1}{2}\left(s^{2\beta}+v^{2\beta}-|s-v|^{2\beta}\right),\quad t,s,u,v\in[0,T].$$

这里, $\alpha,\beta\in(0,1)$ 为 Hurst 参数. 特别地, 当 $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ 时, 它是一个标准布朗单, 参见文献 [1].

给定一个度量空间 (E,d), 假设 $\mathcal{F}$ 是 (E,d) 上的 σ 代数, 满足 $d(\cdot,\cdot)$ 是 $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ 可测的. 设 $\mathcal{M}(E)$ 为 E 上所有概率测度组成的集合. 给定两个概率测度 $\mu,\nu\in\mathcal{M}(E)$, 定义 μ 与 ν 之间的 Wasserstein 距离为

$$W_{p,d}(\mu,\nu)=\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}\left(\int_E\int_E d(x,y)^p d\pi(x,y)\right)^{1/p},\quad p\ge 1. \tag{1.3}$$

其中 $\Pi(\mu,\nu)$ 是乘积空间 $E\times E$ 上边缘分布分别为 μ 和 ν 的概率测度全体. ν 关于 μ 的相对熵定义为

$$H(\nu\mid\mu)=\begin{cases}\displaystyle\int_E \ln\frac{d\nu}{d\mu}d\nu, & 若\ \nu\ll\mu;\\ +\infty, & 其它.\end{cases} \tag{1.4}$$

*收稿日期: 2021-01-18 接收日期: 2021-03-09

作者简介: 梁唯伊 (1997–), 女, 湖北荆州, 硕士, 主要研究方向: 随机分析.

称概率测度 μ 满足 (E,d) 上的 L^p 传输不等式, 若存在一个常数 $C \geq 0$, 使得对任意的概率测度 $\nu \in \mathcal{M}(E)$,

$$W_{p,d}(\mu,\nu) \leq \sqrt{2CH(\nu \mid \mu)}. \tag{1.5}$$

我们将这种关系记做 $\mu \in T_p(C)$. 其中, $p=1$ 和 $p=2$ 的情形得到了广泛而深刻的研究, 它们与测度集中性紧密相关. 传输不等式与 log-Sobolev 不等式, Poincaré 不等式之间也有着紧密联系, 参见文献 [2] 等. 最近, 传输不等式在金融、统计学方面也有广泛的应用, 例如 Lacker 在文献 [3] 中利用集中不等式建立了一个用于搭建流动性风险模型的框架, Massart 在文献 [4] 中利用集中不等式研究了模型选择方面的问题.

我们回顾一下关于随机 (偏) 微分方程的传输不等式的结果. Talagrand[5] 关于高斯测度首次证明了 $T_2(C)$, 后来 Feyel 和 Üstünel[6] 将结果推广到了抽象的 Wiener 空间. 利用 Girsanov 变换和鞅表示定理, Djellout, Guillin 和 Wu[7] 证明了随机微分方程在 Cameron-Martin 度量和 L^2 度量下的 $T_2(C)$, 后来 Wu 和 Zhang[8] 将该结论推广到了一致度量意义下. Saussereau[9] 研究了分数布朗运动驱动的随机微分方程的 $T_2(C)$. 利用 Lyons 的粗糙路径理论, S. Riedel[10] 研究了由一般高斯过程驱动的随机微分方程的 $T_2(C)$. 针对随机偏微分方程, Wu 和 Zhang[11] 利用 Galerkin 逼近研究了 L^2 度量下的 $T_2(C)$; 针对随机热方程, Boufoussi 和 Hajji[12] 在可加时空白噪声时关于一致度量证明了 $T_2(C)$, 在可乘时空白噪声时关于 L^2 度量证明了 $T_2(C)$, Shang 和 Zhang[13] 在可乘时空白噪声时关于一致度量证明了 $T_2(C)$; 针对随机波动方程, Li 和 Wang[14] 在加权 L^2 度量下证明了 $T_2(C)$.

本文将在一致度量下证明方程 (1.1) 的传输不等式. 文章中有两个困难点: 一是我们方程中的两个参数 t,s 均是与时间相关的，这与传统随机热方程中的时空双参数有很大的区别, 为了解决这个困难, 我们在后续证明中需要利用到新的 Girsanov 变换; 二是方程中的随机项为分数布朗单, 这也将在我们后续的计算过程中带来一定的困难, 本文利用了集中不等式来克服这个难点.

本文的框架如下: 在第二章中, 我们给出分数布朗单的性质和方程解的存在唯一性的证明; 在第三章中, 我们在一致度量下证明了方程 (1.1) 的 $T_2(C)$; 在第四章中, 我们给出一些有用的推论.

2 分数布朗单驱动的随机微分方程

2.1 分数布朗单的性质

我们首先回顾分数布朗单的性质, 参考文献 [15] 第二章中结论, 当 $\alpha, \beta \in (0,1)$ 时, 定义一个 Volterra 核函数 $K_\alpha(t,s)$, 当 $s<t$ 时, 其形式为:

$$K_\alpha(t,s) = c_\alpha((\frac{t}{s})^{\alpha-\frac{1}{2}}(t-s)^{\alpha-\frac{1}{2}} - (\alpha-\frac{1}{2})s^{\frac{1}{2}-\alpha}\int_s^t u^{\alpha-\frac{3}{2}}(u-s)^{\alpha-\frac{1}{2}}du), \tag{2.1}$$

其中, 常数 c_α 满足下式

$$c_\alpha = \sqrt{\frac{2\alpha\Gamma(\frac{3}{2}-\alpha)}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(2-2\alpha)}},$$

这里 Γ 为 Gamma 函数. 当 $\alpha\in(0,1)$ 时, 分数布朗运动 W_t^α 与标准布朗运动 W_t 有下述关系 (参见文献 [16], 定理 5.2):

$$W_t^\alpha=\int_0^t K_\alpha(t,s)\,dW_s. \tag{2.2}$$

定义 $K_\alpha(t,s)$ 的逆算子 $K_\alpha^{-1}(t,s)$,

$$K_\alpha^{-1}(t,s)=c_\alpha^1\left(\left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}(t-s)^{\frac{1}{2}-\alpha}-\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)s^{\frac{1}{2}-\alpha}\int_s^t u^{\alpha-\frac{3}{2}}(u-s)^{\frac{1}{2}-\alpha}du\right), \tag{2.3}$$

其中, 常数 c_α^1 满足

$$c_\alpha^1=\frac{\sqrt{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(2-2\alpha)}}{\beta(\frac{3}{2}-\alpha,\alpha+\frac{1}{2})\sqrt{2\alpha\Gamma(\frac{3}{2}-\alpha)}},$$

β 为 Beta 函数. 由 (2.2) 和逆算子的定义, 可以得出结论 (参见文献 [16], 定理 5.2)

$$W_t=\int_0^t K_\alpha^{-1}(t,s)\,dW_s^\alpha. \tag{2.4}$$

下面, 我们考虑双参数时的情形. 定义核函数 $K_{\alpha,\beta}(t,s,v,u)$ 满足如下表达式

$$K_{\alpha,\beta}(t,s,u,v)=K_\alpha(t,u)K_\beta(s,v),\quad t>u,s>v,\quad t,s,u,v\in[0,T], \tag{2.5}$$

根据文献 [1] 中章节 3.1 的结论, 我们得到下列式子

$$W_{t,s}^{\alpha,\beta}=\int_0^t\int_0^s K_{\alpha,\beta}(t,s,u,v)\,dW_{u,v}. \tag{2.6}$$

类似地, 考虑逆算子

$$K_{\alpha,\beta}^{-1}(t,s,u,v)=K_\alpha^{-1}(t,s)K_\beta^{-1}(u,v),\quad t>u,s>v,\quad t,s,u,v\in[0,T], \tag{2.7}$$

可知,

$$W_{t,s}=\int_0^t\int_0^s K_{\alpha,\beta}^{-1}(t,s,u,v)\,dW_{u,v}^{\alpha,\beta}. \tag{2.8}$$

这表明在双参数的意义下, 分数布朗单与标准布朗单之间也具有关联性. 即可以利用核函数 $K_{\alpha,\beta}(t,s,u,v)$ 通过双参数的标准布朗单来构造双参数的分数布朗单, 反过来结论也是成立的.

性质 2.1 若 $K_{\alpha,\beta}(t,s,u,v)$ 为满足 (2.6) 的核函数, 则有

$$\int_0^t\int_0^s K_{\alpha,\beta}^2(t,s,u,v)\,du\,dv=t^{2\alpha}s^{2\beta}.$$

证

$$\int_0^t\int_0^s K_{\alpha,\beta}^2(t,s,u,v)\,du\,dv=\int_0^t K_\alpha^2(t,u)\,du\cdot\int_0^s K_\beta^2(s,v)\,dv=t^{2\alpha}s^{2\beta}$$

等式成立.

2.2 解的存在唯一性

令 $E= C([0,T]^2,\mathbb{R})$ 为定义在从 $[0,T]^2$ 到 $\mathbb{R}$ 上所有实值连续函数全体, 在 E 上赋予一致度量

$$d(\xi,\gamma)=\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}|\xi(t,s)-\gamma(t,s)|,\quad \forall \xi,\gamma\in E.$$

引理 2.2 [17] 假设 $u(x,t)$, $v(x,t)$ 为 $[0,T]^2$ 上的非负连续函数，对于任意正数 c, 满足式子 $u(x,t)\le c+\int_0^t\int_0^x v(\eta,\upsilon)u(\eta,\upsilon)\,d\eta\,d\upsilon$, 则 $u(x,t)\le c\exp\left(\int_0^t\int_0^x v(\eta,\upsilon)\,d\eta\,d\upsilon\right)$.

引理 2.3 [21] [Borell-TIS 不等式] 若 E 为一个拓扑空间, $\{f_z\}_{z\in E}$ 为 E 上均值为零的高斯过程, $\|f\|_E=\sup\limits_{z\in E}|f_z|$, 在 E 上几乎处处有限, 令 $\delta_E^2=\sup\limits_{z\in E}\mathbb{E}|f_z|^2$, 则 δ_E^2, $\mathbb{E}\left(\|f\|_E\right)$ 均在 E 上有限, 且对于任意 $u>0$,

$$\mathbb{P}\left(\|f\|_E>\mathbb{E}\left(\|f\|_E\right)+u\right)<\exp\left(-\frac{u^2}{2\delta_E^2}\right).$$

定理 2.4 假设 b 满足 (1.2), Hurst 参数 $\alpha,\beta\in(0,1)$, 初值 $X_{0,0}=0$, 方程 (1.1) 在空间 E 上存在唯一解, 且解满足

$$\mathbb{E}\left[\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}|\ X_{t,s}\ |^2\right]<\infty. \tag{2.9}$$

定理 2.4 的证明 由于 b 为一个全局 Lipschitz 函数, 则 b 满足线性增长条件: 存在常数 $K>0$, 使得

$$|b(x)|^2<K(1+|x|^2). \tag{2.10}$$

固定 $w\in\Omega$, 构造一个 Picard 序列,

$$\begin{cases} X_{t,s}^{(n+1)}=\displaystyle\int_0^t\int_0^s b(X_{u,v}^{(n)})\,du\,dv+W_{t,s}^{\alpha,\beta}, & (t,s)\in[0,T]^2,\\ X_{t,s}^{(0)}=X_{0,0}=0. \end{cases} \tag{2.11}$$

由归纳可知, 对于任意的 $n\ge 1$, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X_{t,s}^{(n+1)}-X_{t,s}^{(n)}|^2]&=\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t\int_0^s(b(X_{u,v}^{(n)})-b(X_{u,v}^{(n-1)}))\,du\,dv\right|^2\right]\\&\le T^2\int_0^t\int_0^s\mathbb{E}[|b(X_{u,v}^{(n)})-b(X_{u,v}^{(n-1)})|^2]\,du\,dv\\&\le L_b^2T^2\int_0^t\int_0^s\mathbb{E}[|X_{u,v}^{(n)}-X_{u,v}^{(n-1)}|^2]\,du\,dv.\end{aligned}$$

又 $\mathbb{E}[|X_{t,s}^{(0)}|^2]=0$, 且 $\mathbb{E}[|X_{t,s}^{(1)}|^2]<\infty$, 则当 $n=0$ 时, 存在一个常数 a, 使得 $\mathbb{E}[|X_{t,s}^{(1)}-X_{t,s}^{(0)}|^2]\le a$ 成立. 经过迭代, 可以得到估计式

$$\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}\mathbb{E}[|X_{t,s}^{(n+1)}-X_{t,s}^{(n)}|^2]\le\frac{a(L_b^2T^4)^n}{n!},$$

可知

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}\left|X_{t,s}^{(n+1)}-X_{t,s}^{(n)}\right|^2\right]&=\mathbb{E}\left[\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}\left|\int_0^t\int_0^s b(X_{t,s}^{(n+1)})-b(X_{t,s}^{(n)})\,du\,dv\right|^2\right]\\&\le L_b^2T^2\int_0^T\int_0^T\mathbb{E}[|X_{t,s}^{(n+1)}-X_{t,s}^{(n)}|^2]\,du\,dv\\&\le T^4L_b^2\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}\mathbb{E}[|X_{t,s}^{(n)}-X_{t,s}^{(n-1)}|^2]\\&\le\frac{a(L_b^2T^4)^n}{(n-1)!}.\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}\mid X_{t,s}^{(n+1)}-X_{t,s}^{(n)}\mid^2\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(L_b^2T^4)^n}{(n-1)!}<\infty.$$

由 Borel-Contelli 引理, $\{X_{t,s}^{(n)}\}_{(t,s)\in[0,T]^2}$ 几乎处处是空间 E 上的 Cauchy 列, 由于 E 是完备的, 则 $\{X_{t,s}^{(n)}\}_{(t,s)\in[0,T]^2}$ 几乎处处收敛到 $\{X_{t,s}\}_{(t,s)\in[0,T]^2}$, 对于序列 (2.11) 取极限可得

$$X_{t,s}=\int_0^t\int_0^s b(X_{u,v})\,du\,dv+W_{t,s}^{\alpha,\beta}.$$

则 $X=X_{t,s}$ 是方程 (1.1) 的一个解.

下证解的唯一性. 假设方程 (1.1) 存在两个解 $X_{t,s},Y_{t,s}$, 与上述证明步骤类似, 利用引理 2.2 可立即得到: $\mathbb{E}[\mid X_{t,s}-Y_{t,s}\mid^2]\equiv 0$, 则唯一性得证.

最后证明 X 满足 $\mathbb{E}[\sup\limits_{(t,s)\in[0,T]^2}\mid X_{t,s}\mid^2]<\infty$, 不妨令 $\lambda:=\mathbb{E}[\sup\limits_{(t,s)\in[0,T]^2}|W_{t,s}^{\alpha,\beta}|]$, 由 [15] 中式子 (3.8) 可知

$$\mathbb{E}\left[\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}|W_{t,s}^{\alpha,\beta}|\right]\le C\sqrt{T^{2\alpha}+T^{2\beta}}.\tag{2.12}$$

其中 C 为任意常数, 因此利用引理 2.3 和分部积分公式, 有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}|X_{t,s}|^2\right]\\\le&2\mathbb{E}\left[\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}\left|\int_0^t\int_0^s b(X_{u,v})\,du\,dv\right|^2\right]+2\mathbb{E}\left[\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}|W_{t,s}^{\alpha,\beta}|^2\right]\\\le&2T^2\mathbb{E}\left[\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}\int_0^t\int_0^s b^2(X_{u,v})\,du\,dv\right]+2\mathbb{E}\left[(\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}|W_{t,s}^{\alpha,\beta}|)^2\right]\\\le&2T^2K\int_0^T\int_0^T(1+\mathbb{E}[|X_{u,v}|^2])\,du\,dv+2\int_{-\lambda}^{\infty}(r+\lambda)\times\mathbb{P}\left(\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}|W_{t,s}^{\alpha,\beta}|>r+\lambda\right)dr\\\le&2T^4K\left(1+\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}\mathbb{E}[|X_{t,s}|^2]\right)+2\int_{-\lambda}^{\infty}(r+\lambda)\times\exp\left(-\frac{r^2}{2\sup\limits_{t,s\in[0,T]^2}\mathbb{E}|W_{t,s}^{\alpha,\beta}|^2}\right)dr\\<&\infty.\end{aligned}$$

证明结束.

3 分数布朗单驱动的随机微分方程的传输不等式

令 $z_1=(t_1,s_1)$, $z_2=(t_2,s_2)$, $z_1,z_2\in[0,T]^2$. 定义偏序关系: $z_1\le z_2$ 当且仅当 $t_1\le t_2$, $s_1\le s_2$; $z_1<z_2$ 当且仅当 $t_1<t_2$, $s_1<s_2$, 且 $[z_1,z_2]=[t_1,t_2]\times[s_1,s_2]$. 在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上, 令 $\{\mathcal{F}_z;z\in[0,T]^2\}$ 为一簇 $\mathcal{F}$ 的子 σ 代数, 且满足对任意的 $z_1\le z_2$,$\mathcal{F}_{z_1}\subset\mathcal{F}_{z_2}$, $\mathcal{F}_0$ 包含 $\mathcal{F}$ 中所有的零测集, $\mathcal{F}_z=\bigcap\limits_{z<\tilde{z}}\mathcal{F}_{\tilde{z}}$.

定义 3.1 [19] 称一个过程 $M=\{M_z;z\in[0,T]^2\}$ 为鞅, 若对任意的 $z_1\le z_2, E\left[M_{z_2}|\mathcal{F}_{z_1}\right]=M_{z_1}$.

定理 3.2 $\{X_{t,s},(t,s)\in[0,T]^2\}$ 为方程 (1.1) 的唯一解, 在空间 E 上的分布为 P. $\alpha,\beta\in(0,1)$, 且 b 满足 Lipschitz 条件 (1.2), 则存在一个常数 $C_{\alpha,\beta,T,L_b}=T^{2(\alpha+\beta)+2}e^{L_b^2T^4}$, 使得概率测度 P 满足定义在空间 E 上的 $T_2(C_{\alpha,\beta,T,L_b})$ 不等式.

令 Q 为 E 上任意满足 $Q\ll P$ 的概率测度, 在带流的概率空间 $\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_{t,s}\}_{(t,s)\in[0,T]^2},\mathbb{P}\right)$ 上定义一个新的概率测度 $\tilde{\mathbb{P}}$, 满足

$$d\tilde{\mathbb{P}}:=\frac{dQ}{dP}(X(.,.))d\mathbb{P}. \tag{3.1}$$

定义限制在流 $\{\mathcal{F}_{t,s}\}$ 上的 Radon-Nikodym 导数 $M(t,s)$ 为

$$M(t,s):=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{dQ}{dP}(X(.,.))\Big|\mathcal{F}_{t,s}\right)=\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_{t,s}},\quad\forall(t,s)\in[0,T]^2. \tag{3.2}$$

特别地, $M(t,s)$ $((t,s)\in[0,T]^2)$ 在测度 $\mathbb{P}$ 下为两参数鞅.

引理 3.3 在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 中存在一个适应过程 $h=\{h(t,s)\}_{(t,s)\in[0,T]^2}$, 满足

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^T\int_0^T h^2(u,v)\,du\,dv<\infty\right\}=1, \tag{3.3}$$

且 $\tilde{W}_{t,s}:[0,T]\times[0,T]\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$\tilde{W}_{t,s}=W_{t,s}-\int_0^t\int_0^s h(u,v)\,du\,dv, \tag{3.4}$$

是测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下的布朗单. 此外

$$\mathcal{H}(Q\mid P)=\frac{1}{2}E^{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\int_0^T\int_0^T h^2(u,v)\,dt\,ds\right]. \tag{3.5}$$

证 引理 3.3 的证明实际为文献 [7] 中引理 5.6 的推广.

定义 $\tau:=\{z=(t,s):M(t,s)=0,\forall\varepsilon>0,M(t-\varepsilon,s)>0$ 或 $M(t,s-\varepsilon)>0\}$, 由 $M(t,s)$ 的定义可知 $\tilde{\mathbb{P}}(\tau=(T,T))=1$. 由文献 [19] 章节 2.3 中的结论, 存在一个适应过程 $h(t,s)$ 满足

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^T\int_0^T h^2(u,v)\,du\,dv<\infty\right\}=1, \tag{3.6}$$

使得对于任意 $z=(t,s)<\tau$, 有结论

$$M(t,s)=\exp\left(\int_0^t\int_0^s h(u,v)W(\,du\,dv)-\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^s h^2(u,v)\,du\,dv\right). \tag{3.7}$$

下面, 我们证明 (3.4) 成立. 由于 Q 为概率测度, 且在测度 $\mathbb{P}$ 下解 $X_{t,s}$ 的分布为 P, 有结论

$$\int_\Omega \frac{dQ}{dP}(X(.,.))\,d\mathbb{P}=\int_{C([0,T]^2,\mathbb{R})}\frac{dQ}{dP}(w)dP(w)=Q[C([0,T]^2,\mathbb{R})]=1. \tag{3.8}$$

由 Girsanov 定理 (文献 [19], 定理 2.3), 可得

$$\tilde{W}_{t,s}=W_{t,s}-\int_0^t\int_0^s h(u,v)\,du\,dv, \tag{3.9}$$

为概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\tilde{\mathbb{P}})$ 上的布朗单. 最后, 证明 (3.5) 成立. 由

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(Q\mid P)&=\int_{C([0,T]^2,\mathbb{R})}\frac{dQ}{dP}\ln(\frac{dQ}{dP})dP=\int_\Omega\frac{dQ}{dP}(X)\ln(\frac{dQ}{dP}(X))d\mathbb{P}\\&=\int_\Omega\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\ln(\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}})d\mathbb{P}=\mathcal{H}(\tilde{\mathbb{P}}\mid\mathbb{P}),\end{aligned}$$

参考文献 [20] 中的局部化结论, 定义 $\tau_n:=\{z=(t,s)\in[0,\tau]:\int_0^t\int_0^s h^2(u,v)\,du\,dv\geq n,\forall\varepsilon>0,\int_0^{t-\varepsilon}\int_0^s h^2(u,v)\,du\,dv<n$ 或 $\int_0^t\int_0^{s-\varepsilon}h^2(u,v)\,du\,dv<n\}$, 则 $\tau_n\uparrow\tau$, 有结论

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(Q\mid P)=\mathcal{H}(\tilde{\mathbb{P}}\mid\mathbb{P})&=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M(T,T)\ln(M(T,T))]=\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}[\ln(M(T,T))]\\&=\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}[\ln(M(\tau))]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}[\ln(M(\tau_n))],\end{aligned}$$

由于 $\tilde{W}$ 是 $(\Omega,\mathcal{F},\tilde{\mathbb{P}})$ 上的布朗单, 则关于 $\tilde{W}$ 的随机积分在测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下的期望均为 0. 我们可以得到结论

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}[\ln(M(\tau_n))]&=\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\int_{[0,\tau_n]}h(z)W(\,dz)-\frac{1}{2}\int_{[0,\tau_n]}h^2(z)\,dz\right]\\&=\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\int_{[0,\tau_n]}h(z)\tilde{W}(\,dz)+\frac{1}{2}\int_{[0,\tau_n]}h^2(z)\,dz\right]\\&=\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\frac{1}{2}\int_{[0,\tau_n]}h^2(z)\,dz\right],\end{aligned}$$

则

$$\mathcal{H}(Q\mid P)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\frac{1}{2}\int_{[0,\tau_n]}h^2(z)\,dz\right]=\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T h^2(u,v)\,du\,dv\right].$$

定理 3.2 的证明 在空间 E 上任意选取概率测度 Q, $Q\ll P$, 测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 由 (3.1) 定义, h 为引理 3.3 中定义的随机过程.

假设存在一个适应过程 $a=a(t,s)$, $(t,s)\in[0,T]^2$, 满足变换

$$\tilde{W}_{t,s}^{\alpha,\beta}=W_{t,s}^{\alpha,\beta}-\int_0^t\int_0^s a(u,v)\,du\,dv. \tag{3.10}$$

由章节 2 中的变换 (2.6) $\tilde{W}_{t,s}^{\alpha,\beta}=\int_0^t\int_0^s K_{\alpha,\beta}(t,s,u,v)\,d\tilde{W}_{u,v}$, 及 (3.4) 可推得

$$\tilde{W}_{t,s}^{\alpha,\beta}=\int_0^t\int_0^s K_{\alpha,\beta}(t,s,u,v)\,dW_{t,s}-\int_0^t\int_0^s K_{\alpha,\beta}(t,s,u,v)h(u,v)\,du\,dv. \tag{3.11}$$

可以得到 a 与 h 之间的关系

$$\int_0^t\int_0^s a(u,v)\,du\,dv=\int_0^t\int_0^s K_{\alpha,\beta}(t,s,u,v)h(u,v)\,du\,dv. \tag{3.12}$$

由上述结论可得, 方程 (1.1) 的解 $X_{t,s}$ 满足下述方程

$$X_{t,s}=\int_0^t\int_0^s b(X_{u,v})\,du\,dv+\tilde{W}_{t,s}^{\alpha,\beta}+\int_0^t\int_0^s a_{v,u}\,du\,dv,$$

考虑如下方程的解

$$\tilde{X}_{t,s}=\int_0^t\int_0^s b(\tilde{X}_{u,v})\,du\,dv+\tilde{W}_{t,s}^{\alpha,\beta},$$

由引理 4.2 的证明过程可知, 在测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 意义下, $(X,\tilde{X})$ 所对应的分布实际上为 (Q,P) 的耦合, 由 Wasserstein 距离的定义, 可知

$$W_2(Q,P)^2\le\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}|\tilde{X}_{t,s}-X_{t,s}|^2\right].$$

利用引理 4.2 的结论, 要证明传输不等式成立,

$$W_2(Q,P)\le\sqrt{2C\mathcal{H}(Q\mid P)},$$

只需要证明

$$\mathbb{E}\left[\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}|\tilde{X}_{t,s}-X_{t,s}|^2\right]\le CE^{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\int_0^T\int_0^T h^2(t,s)\,dt\,ds\right].$$

为了简化计算, 接下来将符号 $\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}$ 简易地用 $\mathbb{E}$ 来表示. 首先考虑

$$\begin{aligned}|\tilde{X}_{t,s}-X_{t,s}|&\le\left|\int_0^t\int_0^s b(\tilde{X}_{u,v})-b(X_{u,v})\,du\,dv\right|+\left|\int_0^t\int_0^s a(u,v)\,du\,dv\right|\\&\le\int_0^t\int_0^s L_b|\tilde{X}_{u,v}-X_{u,v}|\,du\,dv+\left|\int_0^t\int_0^s a(u,v)\,du\,dv\right|,\end{aligned}$$

由引理 2.2 知

$$|\tilde{X}_{t,s}-X_{t,s}|\le e^{\int_0^t\int_0^s L_b dudv}\left|\int_0^t\int_0^s a(u,v)du\,dv\right|,$$

两边同时平方后取最大值, 再取期望, 有

$$\mathbb{E}\left[\sup_{(t,s)\in[0,T]^2}|\tilde{X}_{t,s}-X_{t,s}|^2\right]\le\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t\int_0^s a(u,v)\,du\,dv\right|^2\right]\cdot e^{L_b^2T^4}.$$

考虑 a 与 h 之间的关系 (3.12), 利用 Cauchy-Schwarz 不等式和性质 2.1, 可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t\int_0^s a(u,v)\,du\,dv\right|^2\right]&=\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t\int_0^s K_{\alpha,\beta}(t,s,u,v)h(u,v)\,du\,dv\right|^2\right]\\&\le T^2\cdot\mathbb{E}\left[\int_0^t\left(\int_0^s K_{\alpha,\beta}(t,s,u,v)h(u,v)\,du\right)^2dv\right]\\&\le T^2\cdot\mathbb{E}\left[\int_0^t\int_0^s K^2_{\alpha,\beta}(t,s,u,v)\,du\,dv\cdot\int_0^t\int_0^s h^2(u,v)\,du\,dv\right]\\&\le T^{2\alpha+2\beta+2}\mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^T h^2(u,v)\,du\,dv\right].\end{aligned}$$

证明结束.

4 一些推论

推论 4.1　在定理 3.1 假设条件成立的情况下 (b 为 Lipschitz 函数且满足 (1.2)), 对于 $D:=L^2([0,T]^2;dtds;\mathbb{R})$ 上的光滑柱形函数 $F\in\mathfrak{F}:=\{f(\langle u,h_1\rangle,\langle u,h_2\rangle,...\langle u,h_n\rangle);n\ge 1,h_i\in\tilde{\mathbf{H}},f\in\mathbf{C}^\infty_\mathbf{b}(\mathbb{R}^n)\}$, 其中: $\langle u_1,u_2\rangle:=\int_0^T\int_0^T u_1u_2\,dt\,ds$, $\tilde{\mathbf{H}}=:\{h:\int_0^T\int_0^T h^2(t,s)\,dt\,ds<\infty\}$. Poincaré 不等式成立

$$Var_P(F)\le T^{2(\alpha+\beta)+2}e^{L_b^2T^4}\int_{C([0,T]^2,\mathbb{R})}\|\nabla F(u)\|^2_D\,dP(u).$$

其中: $Var_P(F)$ 为 F 在测度 P 下的方差, $\nabla F\in D$, 且为 F 在 u 处的梯度.

证　不失一般性, 假设 $h_1,h_2...,h_n$ 为一组正交基, 对于任意的 $F\in\mathfrak{F}$, 定义映射

$$\Phi:u\longrightarrow(\langle u,h_1\rangle,...\langle u.h_n\rangle),\quad D\to\mathbb{R}^n,$$

Φ 为一个 Lipschitz 函数, 满足 $\|\Phi\|_{\mathrm{Lip}}=\sup\limits_{u_1\ne u_2}\frac{|\Phi(u_1)-\Phi(u_2)|}{d(u_1,u_2)}\le 1$. 定义 $v:=P\circ\Phi^{-1}$, 由文献 [7] 中引理 2.1, 可知 $v\in T_2(C_{\alpha,\beta,T,L_b})$. 再由文献 [18] 中章节 4.1 中的结果, 可得

$$\begin{aligned}Var_P(F)=Var_v(f)&\le T^{2(\alpha+\beta)+2}e^{L_b^2T^4}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f|^2\,dv\\&=T^{2(\alpha+\beta)+2}e^{L_b^2T^4}\int_{C([0,T]^2,\mathbb{R})}\|\nabla F(u)\|^2_D\,dP(u).\end{aligned}$$

引理 4.2 [2] 给定一个度量空间 (E,d) , 若存在一个常数 $C>0$, 使得 (E,d) 上的一个测度 μ, 满足 L_1 传输不等式 ($\mu\in T_1(C)$), 当且仅当对于任意的一个 Lipschitz 函数 $F:(E,d)\to\mathbb{R}$, F 为 μ 可积的, 满足 $\int_E e^{\lambda(F-\int_E F\,d\mu)}\,d\mu\le\exp(\frac{\lambda^2}{2}C\|F\|_{\mathrm{Lip}}^2),\forall\lambda\in\mathbb{R}$, 其中 $\|F\|_{\mathrm{Lip}}=\sup_{x\neq y}\frac{|F(x)-F(y)|}{d(x,y)}<\infty$, 在假设条件成立时, 有结论

$$\mu\left(\left(F-\int_E F\,d\mu\right)>r\right)\le\exp\left(-\frac{r^2}{2C\|F\|_{\mathrm{Lip}}^2}\right),\quad\forall r>0.\tag{4.1}$$

推论 4.3 令 $V:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为 Lipschitz 函数且满足 $\|V\|_{\mathrm{Lip}}=\sup\limits_{x\neq y}\frac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|}\le\delta$, 方程 (1.1) 的解满足霍夫丁型不等式: 任意选取 $r>0$,

$$P(\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T V(X_{t,s})dtds-\mathbb{E}[\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T V(X_{t,s})dtds]\ge r)\le\exp(-\frac{r^2}{2\delta^2T^{2(\alpha+\beta)+2}e^{L_b^2T^4}}).$$

证 我们考虑定义在 $C([0,T]^2,\mathbb{R})$ 上的函数 F_V, 具体形式为 $F_V(u)=\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T V(u_{t,s})dtds$, 则函数 F_V 在一致度量下是 δ-Lipschitz 连续函数, 满足

$$\|F_V\|_{\mathrm{Lip}}=\sup_{u_1\neq u_2}\frac{|\ F(u_1)-F(u_2)\ |}{d(u_1,u_2)}\le\delta.$$

又 $P\in T_2(C)$, 由 Hölder 不等式可推出 $P\in T_1(C)$, 利用引理 4.2 , 则结论易得.

参 考 文 献

[1] Erraoui M, Ouknine Y, Nualart D. Hyperbolic stochastic partial differential equations with additive fractional Brownian sheet[J]. Stoch. Dyn., 2003, 3(02): 121–139.

[2] Bobkov S G, Gotze F. Exponential integrability and transportation cost related to logarithmic sobolev inequalities[J]. Funct. Anal., 1999, 163(1): 1–28.

[3] Lacker D. Liquidity, risk measures, and concentration of measure[J]. Math. Oper. Res., 2018, 43(3): 813–837.

[4] Massart P. Concentration inequalities and model selection[M]. Berlin: Springer, 2007.

[5] Talagrand M. Transportation cost for Gaussian and other product measures[J]. Geom. Funct. Anal., 1996, 6(3): 587–600.

[6] Feyel D, Üstünel A S. The Monge-Kantorovitch problem and Monge-Ampere equation on wiener space[J]. Probab Theory Related Fields, 2003, 128(3): 347–385.

[7] Djellout H, Guillin A, Wu L. Transportation cost-information inequalities for random dynamical systems and diffusions[J]. Ann. Probab., 2004, 32(3B): 2702–2732.

[8] Wu L, Zhang Z. Talagrand's T_2-transportation inequality w.r.t. a uniform metric for diffusion[J]. Acta Math Appl Sin Engl Ser, 2004, 20(3): 357–364.

[9] Saussereau B. Transportation inequalities for stochastic differential equations driven by a fractional Brownian motion[J]. Bernoulli, 2012, 18(1): 1–23.

[10] Riedel S. Transportation-cost inequalities for diffusions driven by Gaussian processes[J]. Electron. J. Probab., 2017, 22(24): 1–26.

[11] Wu L, Zhang Z. Talagrand's T_2-transportation inequality and Log-Sobolev, inequality for dissipative SPDEs and applications to reaction-diffusion equations[J]. Chin. Ann. Math. Ser. B, 2006, 27(3): 243–262.

[12] Boufoussi B, Hajji S. Transportation inequalities for stochastic heat equations[J]. Stat. Probab. Lett., 2018, 139(C): 75–83.

[13] Shang S, Zhang T. Quadratic transportation cost inequalities under uniform distance for stochastic equations driven by multiplicative space-time white noise[J]. Electron. J. Probab. 2019, 129(24): 1–15.

[14] Li Y, Wang X. Transportation cost-information inequality for stochastic wave equation[J]. Acta Appl. Math., 2020, 169(1): 145–155.

[15] Sottinen T, Tudor C A. Parameter estimation for stochastic equations with additive fractional Brownian sheet[J]. Stat. Inference Stoch. Process., 2008, 11(3): 221–236.

[16] Norros I, Valkeila E and Virtamo J. An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions[J]. Bernoulli, 1999, 5(4): 571–587.

[17] 郑丽芳, 吴珍莺. Gronwall 不等式的几个推广及其在微分方程中的应用 [J]. 莆田学院学报, 2007, 014(2): 24–28.

[18] Bobkov S, Gentil I, Ledoux M. Hypercontractivity Of Hamilton-Jacobi equations[J]. J. Math. Pures Appl., 2000, 80(7): 669–696.

[19] Knopov P S, Deriyeva O N. Estimation and control problems for stochastic partial differential equations[M]. New York: Springer, 2013.

[20] Walsh, J.B. Martingales with a multidimensional parameter and stochastic integrals in the plane[M]. Berlin: Lectures in Probability and Statistics. Springer, 1986.

[21] Adler R J, Taylor J E. Random fields and geometry[M]. New York: Springer, 2007.

TRANSPORTATION INEQUALITIES FOR THE LAW OF A STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION DRIVEN BY FRACTIONAL BROWN SHEET

LIANG Wei-yi

(*School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China*)

Abstract: In this paper, we study the stochastic differential equation driven by fractional Brown Sheet. By using Girsanov transformation, we prove the T2-transportation inequalities for the law of the equation on the continious paths space with respect to the uniform norm, and it generalizes the conclusions in the literature.

Keywords: stochastic differential equation; transportation inequality; fractional brown sheet; Girsanov transformation

2010 MR Subject Classification: 60E15; 60H10