

金融风险交叉感染的最优控制策略研究

魏 灿

(中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049)

摘 要: 本文研究了金融市场的风险传染问题. 在推广了已有的传染病模型之后, 利用最优控制理论推导出潜伏状态下金融子市场的最优治愈率, 以及隔离状态下监管部门的最优隔离率的表达式. 通过数值模拟获得了在不同情形下最优控制策略的变化, 影响风险传染因素的结果.

关键词: 最优控制; 传染病模型; 控制再生数; 渐近稳定

MR(2010) 主题分类号: 37N40; 49J15; 49Q12

中图分类号: O232; F830.9

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2022)02-0169-11

1 引言

自古以来, 传染病的暴发不仅会威胁到人们的生命安全, 还会使国家经济遭受重创. 2020 年新型冠状病毒肺炎的暴发, 造成全球股市出现大幅动荡. 2020 年 9 月 3 日股市暴跌的规模相当于 2008 年雷曼兄弟破产时的规模, 股市波动性峰值可以与 2008 年全球金融危机, 黑色星期一, 1929 年的大崩盘相提并论. 随着经济全球化的迅速发展, 金融市场之间的关联性越来越紧密, 任何一个金融子市场的异常, 都极大可能把风险传染到关联的市场中, 导致金融风险的扩散. 越来越多的学者通过研究金融市场之间的风险传染, 分析风险在金融市场内部的传播机制, 挽救金融风险对金融市场造成的经济损失. 文献 [1] 采用 DCC 模型分析影子银行和商业银行之间的传染效应, 建议在出现动荡之前制定应对措施. 文献 [2] 运用 DCC-MVGARCH 模型对风险在股票市场、债券市场和银行市场之间的传染特征进行了分析. 文献 [3] 综合运用变分模式分解法 (VMD) 与静态时变对称和非对称 Copula 函数相结合的方法, 量化风险价值 (VaR)、条件风险价值 (CoVaR) 和 delta CoVaR 三个市场风险指标, 分析短期和长期风险石油市场和股票市场的溢出效应. 文献 [4] 采用财务压力指数作为多变量 GARCH 模型的系统性风险度量指标, 研究欧元区经济体与金融市场之间的溢出效应.

为了预防出现金融风险交叉感染的现象, 需要制定合理的防控策略. 从传染机制的角度观察, 金融风险的传染和传染病的传播有较大的相似性. 首先, 从个体状况角度观察. 金融市场中各个子市场的参与主体、风险管理能力、抵抗风险能力等存在差别, 子市场对风险的不同抵抗状态和传染病模型中的易感状态、潜伏状态、感染状态、康复状态等相似. 其次, 从金融市场风险传染过程角度观察. 金融市场之间相互关联, 倘若某个子市场发生金融风险, 与它关联密切的子市场就会被传染, 随后风险扩散范围变大, 这和传染病的传播过程相似. 最后, 从风险传染的持续性角度观察. 当出现金融风险时某些投资者的投资策略发生变化, 市场出现动荡, “羊群效应” 就会进一步加剧市场的动荡, 金融风险的传染范围会在一段时间内持续的扩大.

*收稿日期: 2021-05-17

接收日期: 2021-09-13

作者简介: 魏灿 (1990-), 女, 河南驻马店, 博士, 主要研究方向: 最优控制与金融数学.

目前已有学者利用传染病模型研究金融风险的传播, 制定风险防控策略. 传染病模型的发展主要包括两个阶段, 经典模型阶段和多元化模型阶段. 经典模型的代表是由文献 [5] 以数学理论为框架首次提出的 SIR 传染病模型, 包含易感、感染、康复三类人群. 如今越来越多学者利用改进的经典传染病模型研究金融风险传染机制. 文献 [6] 利用具有免疫力失效的 SIRS 模型来研究金融市场的风险交叉传染机制, 提出了风险控制策略. 文献 [7] 基于传染病模型, 结合实际情况建立适合金融危机的数学模型, 研究金融危机的演变过程. 文献 [8] 运用 SIR 传染病模型研究金融风险交叉传染并提出控制金融风险的一些建议.

虽然传染病模型已被学者们用于分析金融风险的传播, 但大多数模型不能较好地描述金融风险传播的特点. 在本文中我们将提出一个考虑到金融子市场可以多次被传染的情况, 包含潜伏状态、隔离状态, 并把潜伏状态下子市场的自我治愈能力和隔离状态下政府的隔离力度看成动态变量的新的 SEIJS 传染病模型. 利用新模型研究金融市场的交叉感染现象, 对管理者和投资者制定合理的最优防控策略具有一定的现实意义.

2 金融风险交叉感染模型

在金融市场体系中, 股票市场、债券市场等金融市场之间交易来往密切, 具有较高的相关性, 金融风险往往通过金融工具等风险载体传播到相关子市场中. 在提出新的 SEIJS 传染病模型之前, 我们做出如下假设:

1. 度过金融风险的子市场可以再次被传染.
2. 新的模型包含潜伏传染期、隔离期.
3. 金融市场的风险发生传染时是没有固定方向的.
4. 金融市场是一个封闭体系, 在金融风险传染过程中, 不允许金融市场中的任何一个子市场退出, 也不允许外来子市场加入, 即金融市场内的子市场总数是固定的.

新的 SEIJS 模型由微分方程组 (2.1)-(2.5) 组成. 该模型共包含五个状态, 易受感染状态 (S) 指目前虽然没有被传染, 但处于可能感染的状态. 潜伏状态 (E) 指已经与被感染的子市场有来往, 但还没有表现出被传染迹象的状态. 感染状态 (I) 是已经被风险传染, 并且能把风险传播到其它子市场的状态. 隔离状态 (J) 是政府监管部门采取隔离措施, 使得已感染的子市场处于隔离的状态. 移出状态 (R) 是被风险传染的子市场在采取一系列风险防控措施后, 度过金融危机后的状态. 金融子市场总数为常数 K , 且 $K = S + E + I + J + R$. 表 1 介绍了模型中的参数含义.

$$\begin{cases} \dot{S} = \delta R(t) - \beta S(t)[I(t) + \epsilon_E E(t) + \epsilon_J J(t)] - \alpha S(t) & (2.1) \\ \dot{E} = \beta S(t)[I(t) + \epsilon_E E(t) + \epsilon_J J(t)] - \sigma_1 E(t) - k_1 E(t) & (2.2) \\ \dot{I} = k_1 E(t) - \sigma_2 I(t) & (2.3) \\ \dot{J} = \sigma_2 I(t) - k_2 J(t) & (2.4) \\ \dot{R} = \alpha S(t) + \sigma_1 E(t) + k_2 J(t) - \delta R(t) & (2.5) \end{cases}$$

表 1 新的 SELJRS 模型中的参数定义

参数	定义
δ	子市场从移出状态重回易感状态的概率
β	传染率
ϵ_E	与来自潜伏状态下子市场的传染有关的修正参数
ϵ_J	与来自隔离状态下子市场的传染有关的修正参数
α	直接免疫率
k_1	潜伏状态下子市场被传染的概率
k_2	感染状态下子市场被传染的概率
σ_1	自身治愈率
σ_2	感染状态下子市场被隔离的概率

定理 2.1 SELJRS 模型的平衡点是 $(\frac{\delta K}{\delta + \alpha}, 0, 0, 0, \frac{\alpha K}{\delta + \alpha})$, 或者 $(S_2, E_2, I_2, J_2, R_2)$, 其中

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \frac{(\sigma_1 + k_1)\gamma_E}{\beta(1 + \epsilon_E\gamma_E + \epsilon_J\gamma_J)}, \quad E_2 = \gamma_E I_2, \quad J_2 = \gamma_J I_2 \\
 R_2 &= K - S_2 - E_2 - I_2 - J_2, \quad \gamma_E = \frac{\sigma_2}{k_1}, \quad \gamma_J = \frac{\sigma_2}{k_2} \\
 I_2 &= \frac{\delta K \beta (1 + \epsilon_E\gamma_E + \epsilon_J\gamma_J) - \gamma_E(\delta + \alpha)(\sigma_1 + k_1)}{\beta(1 + \epsilon_E\gamma_E + \epsilon_J\gamma_J)[\delta(1 + \gamma_E + \gamma_J) + \gamma_E(\sigma_1 + k_1)]}.
 \end{aligned}$$

证 因为 $R = K - S - E - I - J$, 则新的 SELJRS 模型可变为

$$\begin{cases}
 \dot{S} = \delta(K - S - E - I - J) - \beta S(I + \epsilon_E E + \epsilon_J J) - \alpha S \\
 \dot{E} = \beta S(I + \epsilon_E E + \epsilon_J J) - \sigma_1 E - k_1 E \\
 \dot{I} = k_1 E - \sigma_2 I \\
 \dot{J} = \sigma_2 I - k_2 J.
 \end{cases}$$

令 $\dot{S} = \dot{E} = \dot{I} = \dot{J} = 0$, 则

$$\begin{cases}
 \delta(K - S - E - I - J) - \beta S(I + \epsilon_E E + \epsilon_J J) - \alpha S = 0 & (2.6)
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 \beta S(I + \epsilon_E E + \epsilon_J J) - \sigma_1 E - k_1 E = 0 & (2.7)
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 k_1 E - \sigma_2 I = 0 & (2.8)
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 \sigma_2 I - k_2 J = 0. & (2.9)
 \end{cases}$$

由方程 (2.8) 和 (2.9) 分别得到 $E = \frac{\sigma_2}{k_1} I = \gamma_E I$, $J = \frac{\sigma_2}{k_2} I = \gamma_J I$. 把它们代入方程 (2.7) 得,

$$I[\beta S(1 + \epsilon_E\gamma_E + \epsilon_J\gamma_J) - \gamma_E(\sigma_1 + k_1)] = 0. \quad (2.10)$$

由方程 (2.10) 知, 当 $I = 0$ 时 $E = J = 0$, 将其代入方程 (2.2) 后得 $S = \frac{\delta K}{\delta + \alpha}$. 当 $I \neq 0$ 时, $S = \frac{(\sigma_1 + k_1)\gamma_E}{\beta(1 + \epsilon_E\gamma_E)}$, 将 S 、 E 、 J 代入方程 (2.2) 得,

$$\delta(K - S - \gamma_E I - I - \gamma_J J) - \beta S I (1 + \epsilon_E\gamma_E + \epsilon_J\gamma_J) - \alpha S = 0.$$

求得

$$I = \frac{\delta K \beta (1 + \epsilon_E \gamma_E + \epsilon_J \gamma_J) - \gamma_E (\delta + \alpha) (\sigma_1 + k_1)}{\beta (1 + \epsilon_E \gamma_E + \epsilon_J \gamma_J) [\delta (1 + \gamma_E + \gamma_J) + \gamma_E (\sigma_1 + k_1)]}.$$

综上所述, 方程 (2.6)–(2.9) 的两组解分别是

$$\begin{cases} S_1 = \frac{\delta K}{\delta + \alpha} \\ E_1 = 0 \\ I_1 = 0 \\ J_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} S_2 = \frac{(\sigma_1 + k_1) \gamma_E}{\beta (1 + \epsilon_E \gamma_E)} \\ E_2 = \gamma_E I_2 \\ I_2 = \frac{\delta K \beta (1 + \epsilon_E \gamma_E + \epsilon_J \gamma_J) - \gamma_E (\delta + \alpha) (\sigma_1 + k_1)}{\beta (1 + \epsilon_E \gamma_E + \epsilon_J \gamma_J) [\delta (1 + \gamma_E + \gamma_J) + \gamma_E (\sigma_1 + k_1)]} \\ J_2 = \gamma_J I_2. \end{cases}$$

定理证毕.

实际上, 在定理 2.1 的两个平衡点中, 平衡点 $(\frac{\delta K}{\delta + \alpha}, 0, 0, 0, \frac{\alpha K}{\delta + \alpha})$ 属于系统的无风险传播平衡点, 是一种理想的状态. 子市场可以再次感染风险说明了在金融风险传播过程中不可能存在无风险传播平衡点, 所以我们将数值模拟部分研究各种情形在有风险传播平衡态下的动态过程.

3 控制再生数的推导

采用文献 [9] 提出的 next-generation 方法推导基本再生数. 我们把易受感染状态下的子市场看成下一代被传染的对象, 一个已被传染的子市场首先进入易受感染状态, 然后依次进入潜伏状态、感染状态、移出状态. 用 $\mathcal{F}_i$ 表示传染病模型中的状态 i 出现新的被传染子市场的发生率, $\mathcal{V}_i^+$ 表示子市场转移到状态 i 的转移率, $\mathcal{V}_i^-$ 表示子市场转出状态 i 的转出率, 其中 $\mathcal{V} = \mathcal{V}_i^- - \mathcal{V}_i^+$, 则矩阵 $\mathcal{F}$ 和矩阵 $\mathcal{V}$ 分别为

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \beta S(I + \epsilon_E E + \epsilon_J J) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{V} = \begin{bmatrix} (\sigma_1 + k_1)E \\ -k_1 E + \sigma_2 I \\ -\sigma_2 I + k_2 J \\ \delta R - \alpha S - k_2 J - \sigma_1 E \end{bmatrix}.$$

从而表示所有状态中出现新的被传染子市场的矩阵 F , 以及表示由于移出感染状态或者重回易受感染状态, 造成这四个状态子市场数量减少的矩阵 V 分别为

$$F = \begin{bmatrix} \beta S \epsilon_E & \beta S & \beta S \epsilon_J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} \sigma_1 + k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 & k_2 & 0 \\ -\sigma_1 & 0 & -k_2 & \delta \end{bmatrix}.$$

那么

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1 + k_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{\sigma_2(\sigma_1 + k_1)} & \frac{1}{\sigma_2} & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{k_2(\sigma_1 + k_1)} & \frac{1}{k_2} & \frac{1}{k_2} & 0 \\ \frac{1}{\delta} & \frac{1}{\delta} & \frac{1}{\delta} & \frac{1}{\delta} \end{bmatrix}.$$

所以

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{S\beta\epsilon_E}{k_1+\sigma_1} + \frac{S\beta k_1}{\sigma_2(k_1+\sigma_1)} + \frac{S\beta\epsilon_J k_1}{k_2(k_1+\sigma_1)} & \frac{S\beta}{\sigma_2} + \frac{S\beta\epsilon_J}{k_2} & \frac{S\beta\epsilon_J}{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

控制再生数 R_c 是矩阵 FV^{-1} 的谱半径, 最后求得 R_c 的表达式是

$$R_c = \frac{\beta S}{k_1 + \sigma_1} (\epsilon_E + \frac{k_1}{\sigma_2} + \frac{k_1 \epsilon_J}{k_2}).$$

定理 3.1 当在平衡点 $(S_2, E_2, I_2, J_2, R_2)$ 处的 $R_c > 1$ 时, 该平衡点是渐近稳定的.

证 方程 (2.1)-(2.4) 在平衡点 $(S_2, E_2, I_2, J_2, R_2)$ 处的 Jacobi 矩阵是

$$J = \begin{bmatrix} -\delta - \alpha - \beta I_2(1 + \epsilon_E \gamma_E + \epsilon_J \gamma_J) & -\delta - \beta S_2 \epsilon_E & -\delta - \beta S_2 & -\delta - \beta S_2 \epsilon_J \\ \beta I_2(1 + \epsilon_E \gamma_E + \epsilon_J \gamma_J) & \beta S_2 \epsilon_E - \sigma_1 - k_1 & \beta S_2 & \beta S_2 \epsilon_J \\ 0 & k_1 & -\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 & -k_2 \end{bmatrix}.$$

下面先证明四个特征值之积大于 0. 矩阵 J 的行列式是

$$\begin{aligned} \det(J) &= (\alpha + \delta)(k_1 + \sigma_1)k_2\sigma_2 + I_2\beta k_2\sigma_2(k_1 + \sigma_1)(1 + \epsilon_J\gamma_J) - S_2\alpha\beta k_1 k_2 \\ &\quad - S_2\delta\beta k_1 k_2 - S_2\alpha\beta\epsilon_E k_2\sigma_2 - S_2\alpha\beta\epsilon_J k_1\sigma_2 - S_2\beta\delta\epsilon_E k_2\sigma_2 - S_2\beta\delta\epsilon_J k_1\sigma_2 \\ &\quad + I_2\beta\delta k_1 k_2 + I_2\beta\delta k_1\sigma_2 + I_2\beta\delta k_2\sigma_2 + I_2\beta\delta\epsilon_E\gamma_E k_1 k_2 + I_2\beta\delta\epsilon_J\gamma_J k_1 k_2 \\ &\quad + I_2\beta\delta\epsilon_E\gamma_E k_1\sigma_2 + I_2\beta\delta\epsilon_E\gamma_E k_2\sigma_2 + I_2\beta\delta\epsilon_J\gamma_J k_1\sigma_2 + I_2\beta\delta\epsilon_J\gamma_J k_2\sigma_2 \\ &\quad + I_2\beta\epsilon_E\gamma_E k_1 k_2\sigma_2 + I_2\beta\epsilon_E\gamma_E k_2\sigma_1\sigma_2. \end{aligned}$$

因为 $R_c > 1$, 则 $\beta S_2(k_2\sigma_2\epsilon_E + k_1 k_2 + k_1\sigma_2\epsilon_J) > k_1 + \sigma_1$, 所以通过整理可得 $\det(J) > 0$.

接下来证明四个特征值之和小于 0. 矩阵 J 的迹是

$$\text{trace}(J) = \beta S_2 \epsilon_E - \sigma_1 - k_1 - \sigma_2 - k_2 - \delta - \alpha - \beta I_2(1 + \epsilon_E \gamma_E + \epsilon_J \gamma_J),$$

其中

$$\beta S_2 \epsilon_E - \sigma_1 - k_1 = (k_1 + \sigma_1) \left(\frac{\epsilon_E \gamma_E}{1 + \epsilon_E \gamma_E + \epsilon_J \gamma_J} - 1 \right) < 0.$$

所以 $\text{trace}(J) < 0$, 四个特征值之和小于 0.

综上所述, 四个特征值具有负实部, 所以该定理成立. 定理证毕.

4 最优控制问题

我们的目标是在一个固定时间段内, 使感染的子市场总数, 潜伏状态下子市场的自身治愈成本, 以及政府部门对已感染子市场采取隔离救助措施的隔离成本之和达到最小. 所以在时间段 $[0, T]$ 内, 目标函数是

$$\min_{\sigma_1(t), \sigma_2(t)} \mathcal{M} = \int_0^T [m_1 E(t) + m_2 I(t) + m_3 J(t) + \frac{u_1}{2} \sigma_1^2(t) + \frac{u_2}{2} \sigma_2^2(t)] dt,$$

其中 m_1, m_2, m_3 分别代表潜伏状态、感染状态以及隔离状态的权重. $\frac{u_1}{2}\sigma_1^2(t)$ 和 $\frac{u_2}{2}\sigma_2^2(t)$ 分别表示子市场的自身治愈成本、隔离成本, 且满足 $0 < u_1 < u_2$. 假设允许控制集是

$$W = \{\sigma_1(t), \sigma_2(t) \in L^2(0, T) \mid \sigma_{1,min} \leq \sigma_1(t) \leq \sigma_{1,max}, \sigma_{2,min} \leq \sigma_2(t) \leq \sigma_{2,max}\}.$$

因为 $R = K - S - E - I - J$, 所以我们不把 R 看作最优控制问题的状态变量, 则具有受限控制的最优控制问题 (4.1) 如下所示:

$$\begin{aligned} \min_{\sigma_1(t), \sigma_2(t)} \quad & \mathcal{M} = \int_0^T [m_1 E(t) + m_2 I(t) + m_3 J(t) + \frac{u_1}{2} \sigma_1^2(t) + \frac{u_2}{2} \sigma_2^2(t)] dt \\ \text{s.t.} \quad & \dot{S} = \delta(K - S - E - I - J) - \beta S(I + \epsilon_E E + \epsilon_J J) - \alpha S \\ & \dot{E} = \beta S(I + \epsilon_E E + \epsilon_J J) - \sigma_1 E - k_1 E \\ & \dot{I} = k_1 E - \sigma_2 I \quad \dot{J} = \sigma_2 I - k_2 J \\ & S(0) = S_0 \quad E(0) = E_0 \\ & I(0) = I_0 \quad J(0) = J_0 \\ & \sigma_{1,min} \leq \sigma_1(t) \leq \sigma_{1,max} \quad \sigma_{2,min} \leq \sigma_2(t) \leq \sigma_{2,max}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

对于每一个控制对 $(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) \in W$, 最优控制问题中的状态方程都有唯一解 $(S(t), E(t), I(t), J(t))$. 如果存在控制对 $(\sigma_1^*(t), \sigma_2^*(t))$, 它和相对应的状态变量 $(S^*(t), E^*(t), I^*(t), J^*(t)) \in W$ 能使目标函数达到最小, 则控制对 $(\sigma_1^*(t), \sigma_2^*(t))$ 就是最优控制问题的一个解.

定理 4.1 最优控制问题 (4.1) 存在最优解.

证 令 $z = (S, E, I, J)$ 表示状态变量, $g(z, \sigma_1, \sigma_2)$ 是目标函数的被积函数, 状态方程的右端为 $f(z, \sigma_1, \sigma_2) = (f_1(z, \sigma_1, \sigma_2), f_2(z, \sigma_1, \sigma_2), f_3(z, \sigma_1, \sigma_2), f_4(z, \sigma_1, \sigma_2))$. 对于所有的 $(t, z) \in \mathcal{R}^4$, 定义集合

$$M(t, z) = \{(g(z, \sigma_1, \sigma_2) + \xi, f_1(z, \sigma_1, \sigma_2), \dots, f_4(z, \sigma_1, \sigma_2)) \mid \xi \leq 0, (\sigma_1, \sigma_2) \in W\}.$$

接下来证明该集合是凸的. 令 $y_1, y_2 \in M(t, z)$, 那么存在 $\xi_1, \xi_2 \leq 0$ 和 $(\sigma_{11}, \sigma_{21}), (\sigma_{12}, \sigma_{22}) \in W$, 使得

$$y_1 = (g(z, \sigma_{11}, \sigma_{21}) + \xi_1, f_1(z, \sigma_{11}, \sigma_{21}), \dots, f_4(z, \sigma_{11}, \sigma_{21}))$$

$$y_2 = (g(z, \sigma_{12}, \sigma_{22}) + \xi_2, f_1(z, \sigma_{12}, \sigma_{22}), \dots, f_4(z, \sigma_{12}, \sigma_{22})).$$

对于任意的 $\theta \in [0, 1]$, 有

$$\begin{aligned} \theta y_1 + (1 - \theta) y_2 &= \theta(g(z, \sigma_{11}, \sigma_{21}) + \xi_1, f_1(z, \sigma_{11}, \sigma_{21}), \dots, f_4(z, \sigma_{11}, \sigma_{21})) \\ &\quad + (1 - \theta)(g(z, \sigma_{12}, \sigma_{22}) + \xi_2, f_1(z, \sigma_{12}, \sigma_{22}), \dots, f_4(z, \sigma_{12}, \sigma_{22})) \\ &= (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5), \end{aligned}$$

其中

$$Y_1 = \theta g(z, \sigma_{11}, \sigma_{21}) + (1 - \theta) g(z, \sigma_{12}, \sigma_{22}) + \theta \xi_1 + (1 - \theta) \xi_2$$

$$Y_2 = \theta f_1(z, \sigma_{11}, \sigma_{21}) + (1 - \theta) f_1(z, \sigma_{12}, \sigma_{22})$$

$$Y_3 = \theta f_2(z, \sigma_{11}, \sigma_{21}) + (1 - \theta) f_2(z, \sigma_{12}, \sigma_{22})$$

$$Y_4 = \theta f_3(z, \sigma_{11}, \sigma_{21}) + (1 - \theta) f_3(z, \sigma_{12}, \sigma_{22})$$

$$Y_5 = \theta f_4(z, \sigma_{11}, \sigma_{21}) + (1 - \theta) f_4(z, \sigma_{12}, \sigma_{22}).$$

关于 Y_1 , 很容易证明 $\theta \xi_1 + (1 - \theta) \xi_2 \leq 0$. 对于 Y_1 的前面两项, 有

$$\theta g(z, \sigma_1 1, \sigma_2 1) + (1 - \theta) g(z, \sigma_1 2, \sigma_2 2) = m_1 E + m_2 + m_3 J + \frac{u_1}{2} \sigma_{10}^2 + \frac{u_2}{2} \sigma_{20}^2,$$

其中 $\sigma_{10} = \sqrt{\theta \sigma_{11}^2 + (1 - \theta) \sigma_{12}^2}$, $\sigma_{20} = \sqrt{\theta \sigma_{21}^2 + (1 - \theta) \sigma_{22}^2}$. 所以 y_1, y_2 凸组合的第一个分量 Y_1 符合集合 $M(t, z)$ 的要求.

关于 Y_2 , 有

$$\begin{aligned} Y_2 &= \theta f_1(z, \sigma_{11}, \sigma_{21}) + (1 - \theta) f_1(z, \sigma_{12}, \sigma_{22}) \\ &= \delta(K - S - E - I - J) - \beta S(I + \epsilon_E E + \epsilon_J J) - \alpha S. \end{aligned}$$

所以 y_1, y_2 凸组合的第二个分量 Y_2 符合集合 $M(t, z)$ 的要求.

由此类推, y_1, y_2 凸组合的其余分量均符合集合 $M(t, z)$ 的要求, 则集合 $M(t, z)$ 是凸的. 因为允许控制集 W 是紧的, 状态方程的解有界, 所以最优控制问题 (4.1) 存在最优解. 定理证毕.

用 Pontryagin 最大值原理把最优控制问题转化为哈密顿函数最小化问题. 哈密顿函数 H 为 $H(S, E, I, J, \sigma_1, \sigma_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, t) = m_1 E + m_2 I + m_3 J + \frac{u_1}{2} \sigma_1^2 + \frac{u_2}{2} \sigma_2^2 + \lambda_1 \dot{S} + \lambda_2 \dot{E} + \lambda_3 \dot{I} + \lambda_4 \dot{J}$, 则伴随方程是

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial S} = \lambda_1(\delta + \alpha) + (\lambda_1 - \lambda_2)\beta(I + \epsilon_E E + \epsilon_J J) \\ \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial E} = -m_1 + \lambda_1\delta + (\lambda_1 - \lambda_2)\beta S\epsilon_E + \lambda_2\sigma_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)k_1 \\ \dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H}{\partial I} = -m_2 + \lambda_1\delta + (\lambda_1 - \lambda_2)\beta S + (\lambda_3 - \lambda_4)\sigma_2 \\ \dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial H}{\partial J} = -m_3 + \lambda_1\delta + (\lambda_1 - \lambda_2)\beta S\epsilon_J + \lambda_4 k_2. \end{cases}$$

控制变量 σ_1 和 σ_2 满足下列方程

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \sigma_1} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \sigma_2} = 0. \end{cases}$$

通过求解得到最优自我治愈率、最优政府隔离率分别是

$$\begin{cases} \sigma_1^*(t) = \min(\max(\sigma_{1,min}, \frac{\lambda_2 E}{u_1}), \sigma_{1,max}) \\ \sigma_2^*(t) = \min(\max(\sigma_{2,min}, \frac{(\lambda_3 - \lambda_4)I}{u_2}), \sigma_{2,max}). \end{cases}$$

5 数值模拟

本小节进行数值模拟, 我们把模型中的参数以及各状态的初始值设置成满足条件控制再生数 $R_c > 1$, 用来研究各个状态下子市场数量以及最优控制变量的变化. 假设各状态下的初始值分别为 $S(0) = 0.95K$, $E(0) = 0.02K$, $I(0) = 0.01K$, $J(0) = 0.01K$, $R(0) = 0.01K$, 其中 K 为金融子市场总数. 自我治愈率 σ_1 和隔离率 σ_2 的取值范围均为 $[0, 0.9]$, 研究时间段范围是 $[0, 100]$. 最优控制问题 (4.1) 中的其它参数值如表 2 所示:

表 2 最优控制模型的参数值							
参数	参数值	参数	参数值	参数	参数值	参数	参数值
δ	0.1	β	0.1	ϵ_E	0.1	ϵ_J	0.8
α	0.1	k_1	0.1	k_2	0.05	m_1	0.7
m_2	0.5	m_3	0.4	u_1	3	u_2	6

图 1 描述了各个状态下的子市场数量、最优自我治愈率、最优隔离率、控制再生数的动态变化. 最优自我治愈率随着时间的增加而逐渐减少, 而最优隔离率先增加到峰值然后逐渐下降. 初期阶段的控制再生数大于 1, 最优控制策略的实施使得其随着时间逐渐下降到 1 以下, 金融风险传染得到控制. 研究阶段后期的控制再生数又回到大于 1 的情况, 原因是这段期间金融子市场和政府部门出现了解怠心理, 自我治愈率和隔离率的迅速下降导致了金融风险传染再一次愈演愈烈. 我们发现易感状态和潜伏状态下的子市场数量随着时间的增加而逐渐减少到 0. 感染状态下子市场数量先增加到峰值, 然后下降到 $0.007K$. 隔离状态下的子市场数量先小幅度增加到峰值, 然后逐渐减少, 最后趋于 0. 移出状态下的子市场数量随着时间的增加而增加, 最后增加到 $0.98K$ 后趋于平衡.

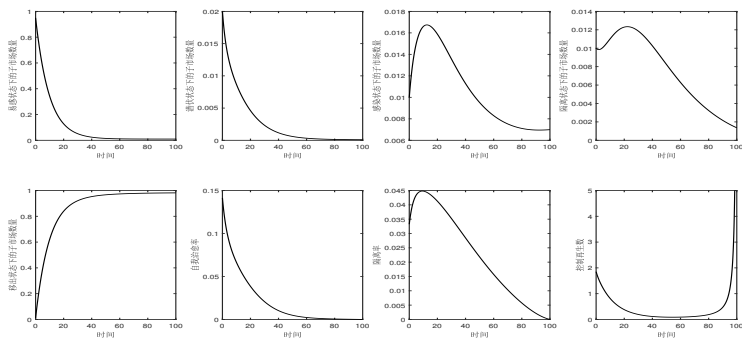


图 1 各状态下的子市场数量、最优控制变量以及控制再生数的动态变化

5.1 传染率对最优控制策略的影响

当传染率分别取值 0.1、0.3 和 0.9 时, 各个状态下的子市场数量、最优自我治愈率、最优隔离率、控制再生数的演变过程如图 2 所示. 随着金融风险传染率的增加, 最优自我治愈率和最优隔离率都随之增加. 特别地, 当传染率取较大值 0.9 时, 自我治愈率的变化趋势是先增加到峰值然后下降到 0. 我们发现自身治愈率的减少速度慢于隔离率的下降速度. 在金融风险传染的初期阶段, 子市场自身的治愈率大于政府部门对已感染子市场采取救助措施的隔离率, 后期阶段的隔离率大于治愈率. 我们建议当金融风险传染率增加时, 处于潜伏状态的子市

场要及时制定合理应对措施,降低自身经济损失,摆脱金融风险.此时的政府部门要加强对已感染子市场的救助,通过隔离已感染的子市场缩小风险传染范围,并对它们实施经济援助等措施来度过危机.控制再生数随着传染率的增加而增加,变化趋势都是先下降到1以下,最后阶段又重新大于1.说明在传染率增加,子市场可以多次被传染的情况下,政府部门和潜伏状态下的子市场要时刻根据风险传染的形势制定最优控制策略,切忌因形势有所好转就放松警惕.

我们还发现,易感状态下的子市场数量随着传染率的增加,下降速度变快.相对应地,移出状态下的子市场数量随着传染率的增加而略有减少.其余三个状态下的子市场数量均随着传染率的增加而增加.

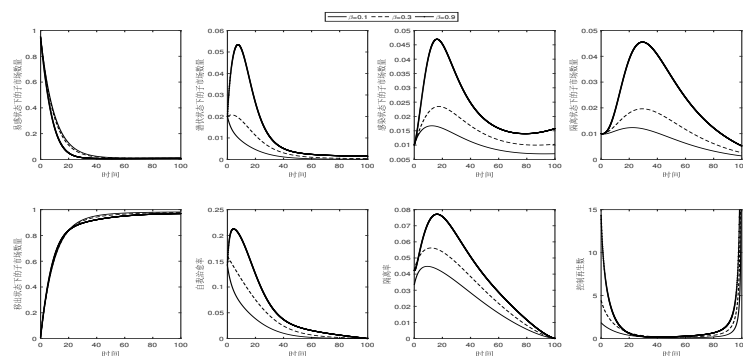


图2 在不同传染率下,各状态中的子市场数量、最优控制变量以及控制再生数的演变过程

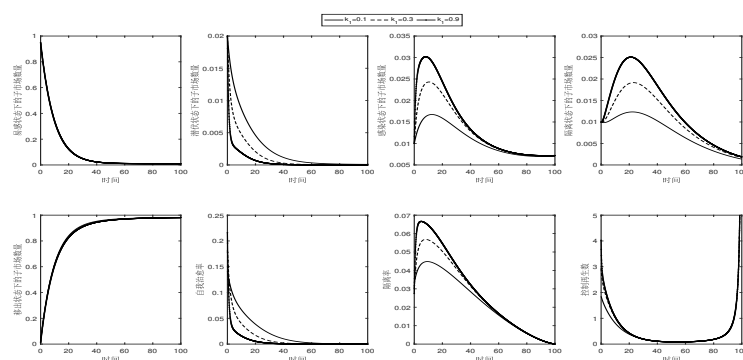


图3 在不同 k_1 下,各状态中的子市场数量、最优控制变量和控制再生数的演变过程

5.2 潜伏状态下子市场的感染率对最优控制策略的影响

当潜伏状态下子市场被金融风险传染的概率 k_1 改变时,各个状态下子市场数量、最优控制策略以及控制再生数的变化如图3所示.当 k_1 增加时,意味着潜伏状态下的子市场管理者没有及时采取自救措施,自我治愈率降低,被风险传染的概率增加.导致该状态下的子市场大量被感染,从而感染状态下的子市场数量增加,潜伏状态下子市场数量减少.此时政府部门就会采取控制措施,通过加大隔离率来隔离被传染的子市场,缩小金融风险传播范围,从而导致

隔离状态下的子市场数量增加. 我们发现控制再生数随着 k_1 的增加而增加, 易感状态和移出状态下的子市场数量几乎不受 k_1 增加的影响.

5.3 直接免疫率对最优控制策略的影响

各个状态下子市场数量、最优自我治愈率和隔离率、控制再生数在不同直接免疫率 α 下的演变过程如图 4 所示. 直接免疫率的增加, 意味着子市场具有较强的风险防范意识, 在未发生金融风险前就制定风险控制策略, 用来预防可能发生的风险. 由于整个金融体系具有较强免疫力, 当出现金融风险传染时, 就能在较短时间内控制金融风险的传染. 易感状态下的子市场就会迅速转移到移出状态, 导致其它状态下的子市场数量随着直接免疫率的增加而减少, 从而自我治愈率和隔离率也随着 α 的增加而减少.

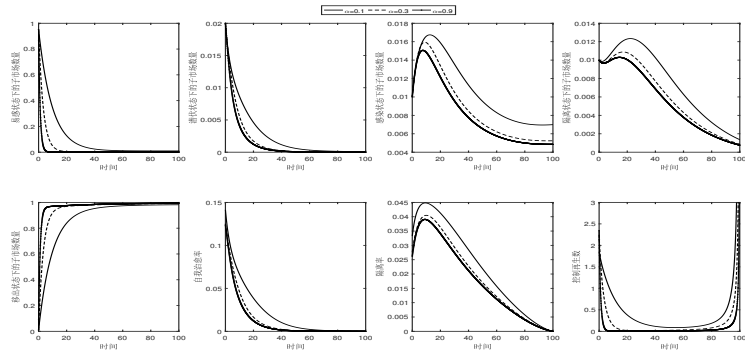


图 4 在不同 α 下, 各状态中的子市场数量、最优控制变量和控制再生数的演变过程

6 结论

本文在新的 SEIJS 传染病模型下, 利用最优控制的思想研究金融市场的风险传染问题. 求出了新模型的平衡点并对其进行稳定性分析. 把潜伏状态下子市场的自我治愈率和政府对隔离状态下子市场的隔离率看成动态变量, 提出了一个最优控制问题并证明最优解的存在性. 最后进行数值模拟, 研究了风险传染率 β 、潜伏状态下子市场被传染的概率 k_1 、直接免疫率 α 对最优控制策略的影响, 结果如表 3 所示.

表 3 不同情形下的最优控制策略	
情形	最优控制策略
传染率增加	自我治愈率增加, 隔离率增加
潜伏状态下子市场的感染率增加	自我治愈率降低, 隔离率增加
直接免疫率增加	自我治愈率和隔离率均减少

当金融风险传染率增加时, 潜伏状态下的子市场要深知自救的重要性, 及时制定最优防控策略, 加大自身治愈率, 而不应该在彻底被感染后等待政府监管部门的经济救助. 对于政府监管部门来说, 应加大对已感染子市场的隔离力度, 进行经济、技术指导等方面的援助, 帮助它们度过金融危机, 缩小风险传染的范围. 当潜伏状态下子市场被传染的概率增加时, 说明它们没有及时采取有效的自救措施, 导致自我治愈率的下降. 面对潜伏状态下子市场领导者的

不作为, 政府监管部门就应该采取防控策略来挽救局势, 增加对已感染子市场的隔离强度. 当直接免疫率增加时, 整个金融体系抵抗风险的能力增强, 易感状态下的子市场能够迅速转移到移出状态, 其余状态下的子市场数量都随着直接免疫率的增加而减少. 所以此时可以采取一个较缓和的最优控制策略, 潜伏状态下子市场的自我治愈率和政府对感染子市场的隔离率都随着直接免疫率的增加而减少.

参 考 文 献

- [1] 李丹丹. 中国影子银行和商业银行的传染效应研究——基于 DCC 模型的风险分析 [J]. 管理现代化, 2016, 36(1): 16–19.
- [2] 王宝, 肖庆宪. 我国金融市场间风险传染特征的实证检验 [J]. 统计与决策, 2008(11): 78–79.
- [3] Mensi W, Hammoudeh S, Shahzad S, Shahbaz M. Modeling systemic risk and dependence structure between oil and stock markets using a variational mode decomposition-based copula method[J]. Journal of Banking and Finance, 2017, 75(2): 258–279.
- [4] MacDonald R, Sogiakas V, Tsopanakis A. Volatility co-movements and spillover effects within the Eurozone economies: A multivariate GARCH approach using the financial stress index[J]. Journal of International Financial Markets, Institutions and Money, 2018, 52: 17–36.
- [5] Kermack W O, McKendrick A G A. A Contribution to the mathematical theory of epidemics[J]. Proceedings of the Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences, 1927, 115(772): 700–721.
- [6] 崔瑜, 谢艳, 安立波等. 金融市场风险交叉传染机制——基于医学 SIRS 传染病模型 [J]. 南方金融, 2017(2): 3–13.
- [7] 刘子琪. 传染病模型在金融危机中的应用 [J]. 中国民商, 2017(12), 54–55.
- [8] 张佩. 商业银行交叉金融业务风险问题研究 [J]. 上海金融, 2019(5), 78–82.
- [9] Dreessche P, Watmough J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. Mathematical Biosciences, 2002, 180(1-2): 29–48.

OPTIMAL CONTROL STRATEGIES FOR FINANCIAL RISK CROSS INFECTION

WEI Can

(School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: In this paper, the risk contagion in financial market is investigated. After generalizing the epidemic models, the expression of the optimal cure rate of financial sub-market in exposed state, the optimal isolated rate of government regulator departments in isolated state are obtained by using optimal control theory. The numerical analysis is conducted to obtain the results of the changes of optimal control strategies under different circumstances, and the factors affecting risk contagion.

Keywords: Optimal control; Epidemic model; Control reproduction number; Asymptotically stable

2010 MR Subject Classification: 37N40; 49J15; 49Q12