Vol. 42 (2022)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

牵制控制含噪声的多延迟超网络的结构识别

赵雪漪 [1], 朱帅兵 [2], 邓乐斌 [1], 谢 红 [1]

(1. 汉江师范学院数学与计算机科学学院, 湖北 十堰 442000)

(2. 湖南师范大学数学与统计学院计算与随机数学教育部重点实验室, 湖南 长沙 410081)

摘 要: 本文研究了含噪声的多延迟超网络的结构识别问题, 利用随机微分时滞方程的 LaSalle 不变原理和 Lyapunov 稳定性理论, 获得了通过牵制控制进行超网络结构辨识的理论. 通过数值仿真验证了理论结果的有效性. 以三层网络为例, 仅控制一个节点就可以成功识别出该网络的未知拓扑结构, 同时, 驱动网络和响应网络达到了同步.

关键词: 牵制控制; 多延迟超网络; 噪声; 拓扑识别

MR(2010) 主题分类号: 54H20; 60H10; 74P15 **中图分类号:** O211.63

文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2022)01-0084-11

1 引言

在过去的二十年中, 大型互连系统通常被建模为单层复杂网络. 复杂网络的研究涉及到不同的学科领域, 受到了各学科研究人员的广泛关注 [1−9]. 在现实世界中, 复杂网络通常并不是单独存在, 而是通过相互作用形成超网络. 比如, 在疾病传播网络中, 传染病的大爆发会引发信息传播网络上消息爆发, 而消息的传播会增大疾病的爆发阈值; 社交网络中, 人们之间的关系网络（家人、朋友、同事等）和通信网络（电话、微信、QQ 等）是错综复杂相互作用的. 以上这些网络就称为超网络, 网络嵌套或包含着若干个子网络, 子网络之间通过某种方式连接在一起. 对超网络的研究是复杂网络领域最重要和最前沿的研究方向之一 [10−15]. 目前关于超网络的动力学方面的研究还很少, 近几年所研究的大多数超网络, 都是不含延迟或者是含有单个延迟, 这是很理想的状态. 在现实世界中, 一个网络中可能含有多种延迟. 比如说通信网络, 两个人之间通过微信或者 QQ 联络, 那么不同的通信方式所产生的延迟就是不同的; 在交通网络中, 航空或者是高速等不同的运输方式所产生的延迟也是不同的. 在超网络中, 每一层的节点之间可以有多种耦合方式, 不同的耦合方式产生不同的延迟, 具有相同延迟的节点结合一起形成层内的子网络, 这种每一层含有多种延迟的超网络称为多延迟超网络, 如图 1, 不同的颜色代表不同的层, 每一层有各自不同的延迟、噪声强度和耦合强度.

在自然、社会和工程实际中, 准确的拓扑结构往往是未知的或者是不确定的. 因此, 根据网络的节点动力学来反演网络的拓扑结构, 这个问题越来越引起各个相关领域研究者们的重视. 网络结构的识别具有重大的理论和应用价值, 它也是分析控制和预测真实的复杂网络动力学行为的先决条件. 对于网络的拓扑结构识别问题, 最近几年获得一些重要进展, 有很多种识别方法, 比如基于自适应同步的网络拓扑识别方法 [16−19], 压缩感知方法利用实际复杂网

*收稿日期: 2021-03-15 接收日期: 2021-04-15

基金项目: 湖北省自然科学基金青年基金项目 (2020CFB488); 湖北省教育厅科学技术研究计划青年人才项目 (Q20203103); 湖北省教育厅科学研究计划指导性项目 (B2020182).

作者简介: 赵雪漪 (1986–), 女, 湖北丹江口, 副教授, 主要研究方向: 复杂网络的同步与拓扑结构识别.

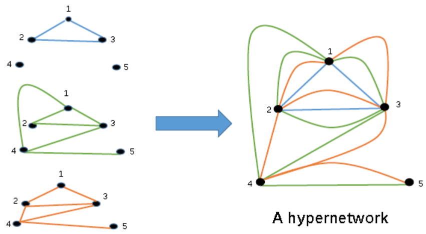


图 1 三层多延迟超网络模型, 不同的颜色代表不同层, 每一层有各自不同的延迟、噪声强度和耦合强度

络邻接矩阵的稀疏性以及目标优化思想反演网络结构 [20,21], 基于格兰杰因果检验的网络拓扑结构的识别方法则是根据实测时间序列数据推断节点间的有向关系 [22], 这些方法都取得了很好的效果, 并且在进一步地发展. 另外, 在文章 [23−25] 中, 分别给出了基于同步的识别方法中, 保证成功进行拓扑结构识别的几个条件. 对单层网络的拓扑识别问题的研究已经取得了丰硕的成果, 但是目前对超网络拓扑识别的研究还很少, 对超网络的拓扑识别问题是目前网络科学重要的分支之一.

在实际复杂网络中, 我们通常只对一部分网络的拓扑结构感兴趣, 比如说在社会网络, 我们只想知道朋友或家人的信息; 在生物神经网络, 细胞神经元个数繁多, 全部识别不切实际, 可以根据实际情况识别部分网络. 因此, 通过牵制控制的方法, 不需要接收原始网络中所有节点的信息, 通过牵制控制一部分节点, 来识别原网络其中一部分未知的拓扑结构是有实际意义的. 近几年, 对牵制控制的研究有很多好的成果 [26−30], 但是牵制控制超网络的研究还很少. 在现实世界中, 噪声是无处不在的, 系统受到内部或外部的干扰, 都会产生噪声. 同时, 噪声也是一把"双刃剑", 比如科学家制成一种激光听力诊断装置, 它由光源、噪声发生器和电脑测试器三部分组成, 可以通过噪声的原理来治病. 但是长期的噪声污染又会引发疾病, 因此, 怎样利用好噪声是一个亟待解决的问题, 对噪声系统的研究也引起了人们的广泛关注.

基于以上讨论, 本文利用同步理论, 通过牵制控制方法, 不需要接收原网络中所有节点的信息, 通过牵制控制一部分节点, 来识别含噪声的多延迟超网络中的未知拓扑结构. 数值仿真验证了定理的有效性, 说明用牵制控制方法研究超网络的未知拓扑结构是有效的, 具有实际意义. 本文共有五个部分, 第二部分介绍了文章的一些引理和预备知识, 第三部分是本文的主要理论结果, 第四部分用数值仿真验证定理的有效性, 第五部分是结论.

2 预备知识

$\mathcal{R}^{\mathrm{n}}$, $\mathcal{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}$ 和 $\mathcal{R}_+$ 分别代表 n 维欧几里得空间, $n\times m$ 维实矩阵的集合和非负实数的集合. $\lambda_{\max}(\mathbf{S})$ 和 $\lambda_{\min}(\mathbf{S})$ 分别表示 N 维矩阵 $\mathbf{S}=(s_{ij})_{N\times N}$ 的最大特征值和最小特征值; $\mathbf{S}>0$ 和 $\mathbf{S}<0$ 分别代表正定矩阵和负定矩阵. $\mathrm{diag}\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n\}\in\mathcal{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$

表示对角元为 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 的对角矩阵. $\mathbf{C}^{2,1}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ 表示定义在 $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}\times\mathbb{R}_+$ 上所有非负函数的集合 $\mathbf{V}(\mathbf{x},t)$, 其中 $\mathbf{V}(\mathbf{x},t)$ 关于 $\mathbf{x}$ 二阶连续可微, 关于 t 一阶连续可微; $\mathbf{C}^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0],\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ 表示定义在区间 $[-\tau,0]$ 上的有界可测函数; $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_{\mathrm{t}}\}_{t\geq 0},\mathcal{P})$ 表示完备概率空间, $\mathbf{w}(t)=(\mathbf{w}_1(t),...,\mathbf{w}_n(t))^T$ 是定义在概率空间上的 n 维布朗运动.

考虑如下 n 维随机微分方程

$$d\mathbf{x}(t)=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{x}(t-\tau))dt+\varphi(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{x}(t-\tau))d\mathbf{w}(t). \tag{2.1}$$

其中, $t\geq 0$, 初始向量 $x_0\in\mathbf{C}^b_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0],\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$, $\mathbf{f}:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{\mathrm{n}}\times\mathbb{R}^{\mathrm{n}}\to\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $\varphi:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{\mathrm{n}}\times\mathbb{R}^{\mathrm{n}}\to\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ 是连续函数.

对于任意的初始向量 x_0, 方程 (2.1) 的解定义为 $\mathbf{x}(t;t_0,x_0)$. 当 $\mathbf{f}(t,0,0)=\varphi(t,0,0)=0$, 方程 (2.1) 有一个平凡解 $\mathbf{x}(t_0)\equiv 0$. 这里, $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_{\mathrm{t}}\}_{t\geq 0},\mathcal{P})$ 表示完备概率空间, $\mathbf{w}(t)=(\mathbf{w}_1(t),...,\mathbf{w}_n(t))^T$ 是定义在概率空间上的 n 维布朗运动.

对于任意的 $\mathbf{V}(\mathbf{x},t)\in\mathbf{C}^{2,1}(\mathbf{S}_h\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, 其中 $0<h\leq\infty,\mathbf{S}_h=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\leq h\}$. 我们定义算子如下

$$\mathcal{L}V=V_t(\mathbf{x},t)+V_x(\mathbf{x},t)f(\mathbf{x},t)+\frac{1}{2}trace[\varphi^T(\mathbf{x},t)V_{xx}(\mathbf{x},t)\varphi(\mathbf{x},t)],$$

其中, $V_t(\mathbf{x},t)=\frac{\partial V(\mathbf{x},t)}{\partial t}$, $V_x(\mathbf{x},t)=(\frac{\partial V(\mathbf{x},t)}{\partial\mathbf{x}_1},\ldots,\frac{\partial V(\mathbf{x},t)}{\partial\mathbf{x}_n})$, $V_{xx}(\mathbf{x},t)=(\frac{\partial^2 V(\mathbf{x},t)}{\partial\mathbf{x}_i\partial\mathbf{x}_j})_{n\times n}$.

引理 1 [31]

(i) 如果存在函数 $\mathbf{V}\in\mathbf{C}^{2,1}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, $\gamma\in\mathbf{L}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, $\omega\in\mathbf{C}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}},\mathbb{R}_+)$, 使得 $\lim\limits_{\|\mathbf{x}\|\to\infty}\inf_{0\leq t<\infty}V(\mathbf{x},t)=\infty$, 并且 $\mathcal{L}V(\mathbf{x},t)\leq\gamma(t)-\omega(\mathbf{x}),(\mathbf{x},t)\in\mathbb{R}^{\mathrm{n}}\times\mathbb{R}_+$;

(ii) 对于任意的初始向量 $x_0\in\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, 存在一个常数 $p>2$ 使得 $\sup\limits_{0\leq t<\infty}E\|\mathbf{x}(t;x_0)\|^p<\infty$. 那么对于所有的 $x_0\in\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $\lim_{t\to\infty}V(\mathbf{x}(t;x_0),t)$ 存在且几乎处处有界, 并且

$$\lim_{t\to\infty}\omega(\mathbf{x}(t;x_0))=0 \text{ a.s..}$$

引理 2 (Schur Complement[32]) 线性矩阵不等式

$$\begin{pmatrix}\mathcal{A}(x),\mathcal{B}(x)\\ \mathcal{B}^T(x),\mathcal{C}(x)\end{pmatrix}<0,$$

其中 $\mathcal{A}^T(x)=\mathcal{A}(x),\mathcal{C}^T(x)=\mathcal{C}(x)$, 等价于以下任意一个条件

(a) $\mathcal{A}(x)<0$ 且 $\mathcal{C}(x)-\mathcal{B}^T(x)\mathcal{A}(x)^{-1}\mathcal{B}(x)<0$;

(b) $\mathcal{C}(x)<0$ 且 $\mathcal{A}(x)-\mathcal{B}^T(x)\mathcal{C}(x)^{-1}\mathcal{B}(x)<0$.

引理 3 [33] 假设 $\mathbf{P}$ 是对角矩阵, 第 k 个 $(k=1,2,\cdots,l)$ 对角元素是 p, 其余元素为 0, 其中 $p>0$ 是足够大的数. 因此, $\mathbf{G}-\mathbf{P}<0$ 等价于 $\mathbf{G}_l<0$.

3 主要结论

本文主要考虑如下含噪声的多延迟超网络 (3.1):

$$d\mathbf{x}_i(t)=(\mathbf{F}(\mathbf{x}_i(t))+\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{N}c_k a_{ij}^{(k)}\Gamma^{(k)}\mathbf{x}_j(t-\tau_k))dt+\sum_{k=0}^{m-1}\varphi_i^{(k)}(t,\mathbf{x}_i(t))d\mathbf{w}_i(t), \tag{3.1}$$

其中 $i=1,2,\cdots,N$. 耦合矩阵 $\mathbf{A}^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})_{N\times N}(k=1,2,\ldots,m)$ 是不可约矩阵, 并且满足 $a_{ij}^{(k)}=a_{ji}^{(k)}>0, i\neq j, a_{ii}^{(k)}=-\sum_{j=1,j\neq i}^{N}a_{ij}^{(k)}, i=1,2,\cdots,N$. 因此 $\mathbf{A}^{(k)}$ 有一个零特征值并且它所对应的特征向量为 $(1,1,\cdots,1)^T$, 剩下的 $N-1$ 个特征值为负数. 内联耦合矩阵为 $\Gamma^{(k)}$, 每一层不同耦合强度和延迟分别为 c_k 和 $\tau_k, k=0,1,\ldots,m-1$, 当 $k=0$ 时, $\tau_0=0$. 此外, $\mathbf{w}_i(t)$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_{\rm t}\}_{t\geq 0},\mathcal{P})$ 上的 n 维布朗运动, 满足 $E(d\mathbf{w}_i)=0, E(d\mathbf{w}_i)^2=dt, E(d\mathbf{w}_i d\mathbf{w}_j)=0, i\neq j$, $\varphi_i^{(k)}(t,\mathbf{x}_i(t))$ 为每一层不同的噪声强度函数.

本节的目的就是通过设计自适应牵制控制器, 来识别多层网络 (3.1) 的系统参数和部分未知拓扑结构. 令多层网络 (3.1) 为驱动网络, 并相应地设计响应网络如下:

$$d\mathbf{y}_i(t)=(\mathbf{F}(\mathbf{y}_i(t))+\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{N}c_k\hat{a}_{ij}^{(k)}\Gamma^{(k)}\mathbf{y}_j(t-\tau_k)+\mathbf{u}_i(t))dt+\sum_{k=0}^{m-1}\varphi_i^{(k)}(t,\mathbf{y}_i(t))d\mathbf{w}_i(t), \quad (3.2)$$

这里, $\mathbf{y}_i(t)=(\mathbf{y}_i^1(t),\mathbf{y}_i^2(t),\cdots,\mathbf{y}_i^n(t))^T$ 是第 i 个节点的响应状态向量, $\mathbf{u}_i$ 是设计的自适应牵制控制器. 此外, $\hat{\mathbf{A}}^{(k)}=(\hat{a}_{ij}^{(k)})_{N\times N}(k=1,2,\ldots,m)$ 是未知耦合矩阵 $\mathbf{A}^{(k)}$ 的估计. $\varphi_i^{(k)}(t,\mathbf{y}_i(t))$ 是每一层不同的噪声强度函数. 其它参数设置同前. 令 $\mathbf{e}_i(t)=\mathbf{y}_i(t)-\mathbf{x}_i(t)$, $\tilde{a}_{ij}^{(k)}=\hat{a}_{ij}^{(k)}-a_{ij}^{(k)}$, $\sigma_i^{(k)}(t,\mathbf{e}_i(t))d\mathbf{w}_i(t)=\varphi_i^{(k)}(t,\mathbf{y}_i(t))d\mathbf{w}_i(t)-\varphi_i^{(k)}(t,\mathbf{x}_i(t))d\mathbf{w}_i(t)$. 为了使控制更有效, 我们只对超网络的部分节点施加控制. 不失一般性, 假设耦合矩阵 $a_{ij}^{(k)}, 1\leq i\leq l_1, 1\leq j\leq l_2, l_1\geq l_2$ 是未知的, 因此可以得到误差系统

$$\begin{aligned}
d\mathbf{e}_i(t)= &\ (\mathbf{F}(\mathbf{y}_i(t))-\mathbf{F}(\mathbf{x}_i(t))+\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{N}c_k\hat{a}_{ij}^{(k)}\Gamma^{(k)}\mathbf{y}_j(t-\tau_k)\\
&-\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{N}c_k a_{ij}^{(k)}\Gamma^{(k)}\mathbf{x}_j(t-\tau_k)+\mathbf{u}_i(t))dt+\sum_{k=0}^{m-1}\sigma_i^{(k)}(t,\mathbf{e}_i(t))d\mathbf{w}_i(t), \qquad 1\leq i\leq l_1\\
d\mathbf{e}_i(t)= &\ (\mathbf{F}(\mathbf{y}_i(t))-\mathbf{F}(\mathbf{x}_i(t))+\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{N}c_k\hat{a}_{ij}^{(k)}\Gamma^{(k)}\mathbf{y}_j(t-\tau_k)\\
&-\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{N}c_k a_{ij}^{(k)}\Gamma^{(k)}\mathbf{x}_j(t-\tau_k))dt+\sum_{k=0}^{m-1}\sigma_i^{(k)}(t,\mathbf{e}_i(t))d\mathbf{w}_i(t) \qquad l_1+1\leq i\leq N.
\end{aligned} \quad (3.3)$$

在得到主要结论之前, 我们先给出几个假设:

假设 1 假设非线性函数 $\mathbf{F}(\cdot)$ 满足李普希兹条件, 存在常数 α 使得 $\|\mathbf{F}(\mathbf{y}(t))-\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))\|\leq\alpha\|\mathbf{y}(t)-\mathbf{x}(t)\|$, 其中, $\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t)\in\mathbb{R}^n$.

假设 2 假设存在非负常数 $\mu_i^{(k)}$ 使得

$$\mathrm{trace}((\sigma_i^{(k)}(t,\mathbf{e}_i(t)))^T\sigma_i^{(k)}(t,\mathbf{e}_i(t)))\leq 2\mu_i^{(k)}\mathbf{e}_i^T(t)\mathbf{e}_i(t),$$

其中, $\sigma_i^{(k)}(t,\mathbf{e}_i(t)), i=1,2,\cdots,N$ 是有界的.

假设 3 假设 $\tau_k(t), k=1,2,\ldots,m$ 是可微函数, 且满足 $\dot{\tau}_k(t)\leq\delta_k<1$.

假设 4 假设 $\{\Gamma^{(k)}\mathbf{x}_j(t-\tau_k)\}_{j=1}^{N}\}_{k=0}^{m-1}$ 在同步流形 $\{\mathbf{x}_i(t)=\mathbf{y}_i(t)\}_{i=1}^{N}$ 上是线性无关的.

有了以上引理和假设, 我们就可以得到以下结论:

定理 1 如果假设 1-4 成立. 若存在合适的正数 l_1 使得

$$\lambda_{\max}(\lceil c_0\gamma_0\bar{\mathbf{A}}^{(0)}+\sum_{k=1}^{m-1}\kappa_k(\bar{\mathbf{A}}^{(k)})^2\rfloor_{l_1})<-(\alpha+\mu+\frac{1}{2}r),$$

其中 $\mu=\sum\limits_{k=0}^{m-1}\max_{1\le i\le N}\{\mu_i^{(k)}\}$, $\kappa_k=\frac{1}{2}c_k^2\gamma_k^2[r(1-\delta)]^{-1}$, $\bar{\mathbf{A}}^{(k)}$ 是把矩阵 $\mathbf{A}^{(k)}$ 的对角元素 $A_{ii}^{(k)}$ 替换成 $\frac{\gamma_k'}{\gamma_k}A_{ii}^{(k)}$ 后所得到的矩阵, $\gamma_k=\|\Gamma_k\|$, $\gamma_k'=\lambda_{\min}(\frac{\Gamma_k+\Gamma_k^T}{2})$, 通过施加如下牵制控制器:

$$\mathbf{u}_i(t)=-d_i(t)\mathbf{e}_i(t),\quad \dot{d}_i(t)=h_i\mathbf{e}_i^T(t)\mathbf{e}_i(t),\quad \dot{\hat{a}}_{ij}^{(k)}=-\delta_{ij}^{(k)}\mathbf{e}_i^T(t)\Gamma^{(k)}\mathbf{y}_j(t-\tau_k),\tag{3.4}$$

这里 $i=1,2,\cdots,l_1, j=1,2,\ldots,l_2$, h_i 是正常数, 含噪声的多延迟超网络 (3.1) 的未知拓扑结构可以被成功识别, 同时, 驱动网络和相应网络达到同步.

证 考虑如下李雅普诺夫函数:

$$\begin{aligned}V(t)=&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{e}_i^T(t)\mathbf{e}_i(t)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{c_k}{\delta_{ij}^{(k)}}(\tilde{a}_{ij}^{(k)})^2\\&+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l_1}\frac{1}{h_i}(d_i(t)-d)^2+\frac{1}{2}r\sum_{k=0}^{m-1}\int_{t-\tau_k(t)}^{t}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{e}_i^T(\theta)\mathbf{e}_i(\theta)d\theta,\end{aligned}$$

这里 $d>0$, $r>0$ 是常数. 我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V=&\sum_{i=1}^{N}\mathbf{e}_i^T(t)[\mathbf{F}(\mathbf{y}_i(t))-\mathbf{F}(\mathbf{x}_i(t))+\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{N}c_k\hat{a}_{ij}^{(k)}\Gamma^{(k)}\mathbf{y}_j(t-\tau_k)\\&-\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{N}c_ka_{ij}^{(k)}\Gamma^{(k)}\mathbf{x}_j(t-\tau_k)+\mathbf{u}_i(t)]+\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{c_k}{\delta_{ij}^{(k)}}\tilde{a}_{ij}^{(k)}\dot{\hat{a}}_{ij}^{(k)}\\&+\sum_{i=1}^{l_1}\frac{1}{h_i}(d_i(t)-d)\dot{d}_i(t)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{trace}((\sigma_i^{(k)})^T\sigma_i^{(k)})\\&+\frac{1}{2}r\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{e}_i^T(t)\mathbf{e}_i(t)-\frac{1}{2}r\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{N}(1-\dot{\tau}_k(t))\mathbf{e}_i^T(t-\tau_k)\mathbf{e}_i(t-\tau_k)\\=&\sum_{i=1}^{N}\mathbf{e}_i^T(t)[\mathbf{F}(\mathbf{y}_i(t))-\mathbf{F}(\mathbf{x}_i(t))]+c_0\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{e}_i^T(t)a_{ij}^{(0)}\Gamma_0\mathbf{e}_j(t)\\&+\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}c_k\mathbf{e}_i^T(t)a_{ij}^{(k)}\Gamma_k\mathbf{e}_j(t-\tau_k)-\sum_{i=1}^{l_1}d\mathbf{e}_i^T(t)\mathbf{e}_i(t)\\&+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}trace((\sigma_i^{(k)})^T\sigma_i^{(k)})+\frac{1}{2}r\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{e}_i^T(t)\mathbf{e}_i(t)\\&-\frac{1}{2}r\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{N}(1-\dot{\tau}_k(t))\mathbf{e}_i^T(t-\tau_k)\mathbf{e}_i(t-\tau_k)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^{N} \alpha \mathbf{e}_i^T(t)\mathbf{e}_i(t) + c_0 \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbf{e}_i^T(t) a_{ij}^{(0)} \Gamma_0 \mathbf{e}_j(t) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_k \mathbf{e}_i^T(t) a_{ij}^{(k)} \Gamma_k \mathbf{e}_j(t-\tau_k) - \sum_{i=1}^{l_1} d\mathbf{e}_i^T(t)\mathbf{e}_i(t) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{N} \mu_i^{(k)} \mathbf{e}_i^T(t)\mathbf{e}_i(t) + \frac{1}{2} r \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{e}_i^T(t)\mathbf{e}_i(t) \\
&\quad - \frac{1}{2} r \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{N} (1-\delta)\mathbf{e}_i^T(t-\tau_k)\mathbf{e}_i(t-\tau_k) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \alpha \mathbf{e}_i^T(t)\mathbf{e}_i(t) - \sum_{i=1}^{l_1} d\mathbf{e}_i^T(t)\mathbf{e}_i(t) + c_0 \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N} \gamma_0 a_{ij}^{(0)} \|\mathbf{e}_i(t)\|\|\mathbf{e}_j(t)\| \\
&\quad + c_0 \sum_{i=1}^{N} \gamma_0^{'} a_{ii}^{(0)} \mathbf{e}_i^T(t)\mathbf{e}_i(t) + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N} c_k\gamma_k a_{ij}^{(k)} \|\mathbf{e}_i(t)\|\|\mathbf{e}_j(t-\tau_k)\| \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{N} c_k \gamma_k^{'} a_{ii}^{(k)} \mathbf{e}_i^T(t)\mathbf{e}_i(t-\tau_k) + \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{N} \mu_i^{(k)} \mathbf{e}_i^T(t)\mathbf{e}_i(t) \\
&\quad + \frac{1}{2} r \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{e}_i^T(t)\mathbf{e}_i(t) - \frac{1}{2} r \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{N} (1-\delta)\mathbf{e}_i^T(t-\tau_k)\mathbf{e}_i(t-\tau_k).
\end{aligned}
$$

令 $\mathbf{e}(t) = (\|\mathbf{e}_1(t)\|, \|\mathbf{e}_2(t)\|, \ldots, \|\mathbf{e}_N(t)\|)^T$, $\mathbf{D} = \mathrm{diag}\{\underbrace{d, d, \cdots, d}_{l_1}, \underbrace{0, \cdots, 0}_{N-l_1}\}$, $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{e}^T(t), \mathbf{e}^T(t-\tau_1), \ldots, \mathbf{e}^T(t-\tau_{m-1}))^T$. 不等式可化为

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}V \leq& \mathbf{e}^T(t)[(\alpha+\mu+\frac{1}{2}r)\mathbf{I}_N + c_0\gamma_0\bar{\mathbf{A}}^{(0)} - \mathbf{D}]\mathbf{e}(t) + \sum_{k=1}^{m-1} c_k\gamma_k \mathbf{e}^T(t)\bar{\mathbf{A}}^{(k)}\mathbf{e}(t-\tau_k) \\
&- \frac{1}{2}r(1-\delta)\sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{e}^T(t-\tau_k)\mathbf{e}(t-\tau_k) \\
=&(\mathbf{e}^T(t), \mathbf{e}^T(t-\tau_1), \ldots, \mathbf{e}^T(t-\tau_{m-1}))\Xi(\mathbf{e}^T(t), \mathbf{e}^T(t-\tau_1), \ldots, \mathbf{e}^T(t-\tau_{m-1}))^T \\
=&\tilde{\mathbf{x}}^T\Xi\tilde{\mathbf{x}},
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\Xi &= \begin{pmatrix} \mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x) \\ \mathcal{B}^T(x), \mathcal{C}(x) \end{pmatrix}, \\
\mathcal{A}(x) &= (\alpha+\mu+\frac{1}{2}r)\mathbf{I}_N + c_0\gamma_0\bar{\mathbf{A}}^{(0)} - \mathbf{D}, \\
\mathcal{B}(x) &= (\frac{1}{2}c_1\gamma_1\bar{\mathbf{A}}^{(1)}, \frac{1}{2}c_2\gamma_2\bar{\mathbf{A}}^{(2)},\ \ldots, \frac{1}{2}c_{m-1}\gamma_{m-1}\bar{\mathbf{A}}^{(m-1)}), \\
\mathcal{C}(x) &= \mathrm{diag}\{-\frac{1}{2}r(1-\delta), \ldots, -\frac{1}{2}r(1-\delta)\}.
\end{aligned}
$$

因为 $\lambda_{\max}(\lceil(c_0\gamma_0\bar{\mathbf{A}}^{(0)}+\sum_{k=1}^{m-1}\kappa_k(\bar{\mathbf{A}}^{(k)})^2\rfloor_{l_1})<-(\alpha+\mu+\frac{1}{2}r)$, 由引理 3, 当 d 足够大时, 我们有

$$\mathcal{A}(x)-\mathcal{B}^T(x)\mathcal{C}(x)^{-1}\mathcal{B}(x)=(\alpha+\mu+\frac{1}{2}r)\mathbf{I}_N+c_0\gamma_0\bar{\mathbf{A}}^{(0)}+\sum_{k=1}^{m-1}\kappa_k(\bar{\mathbf{A}}^{(k)})^2-\mathbf{D}<0.$$

又因为 $-\frac{1}{2}r(1-\delta)<0$ 可以得到 $\mathcal{C}(x)<0$. 由引理 2, 我们可以得到 $\Xi<0$.

令 $\lambda=\lambda_{\max}(\Xi)$, 得到 $\mathcal{L}\mathbf{V}\le\lambda\tilde{\mathbf{x}}^T\tilde{\mathbf{x}}\triangleq-\omega(\tilde{\mathbf{x}})$. 因为 $\lim\limits_{\|\mathbf{x}\|\to\infty}\inf_{0\le t<\infty}\mathbf{V}=\infty$ 并且 σ_i 是有界的, 由引理 1 可知 $\lim\limits_{t\to\infty}\omega(\tilde{\mathbf{x}})=0$ $a.s.$.

因此, 对于 (3.1) 的任意初值, 其轨迹从 $\mathbb{R}^{nN+N+N^2}$ 逐渐收敛到 $\Omega=\{(\mathbf{e}_i;\tilde{a}_{ij}^{(k)})\in\mathbb{R}^{nN+N+N^2}:\mathbf{e}=0\}$. 另外, 通过误差系统 (3.3), 我们可以得到

$$\begin{aligned}0=&(\mathbf{F}(\mathbf{y}_i(t))-\mathbf{F}(\mathbf{x}_i(t))+\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{N}c_k\hat{a}_{ij}^{(k)}\Gamma^{(k)}\mathbf{y}_j(t-\tau_k)\\&-\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{N}c_ka_{ij}^{(k)}\Gamma^{(k)}\mathbf{x}_j(t-\tau_k)+u_i(t))dt+\sum_{k=1}^{m-1}\sigma_i^{(k)}(t,\mathbf{e}_i(t))d\mathbf{w}_i(t)\\=&\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{N}c_k\Gamma^{(k)}\mathbf{x}_j(t-\tau_k)(\hat{a}_{ij}^{(k)}-a_{ij}^{(k)}).\end{aligned}$$

由假设 4 可得 $\hat{a}_{ij}^{(k)}=a_{ij}^{(k)}$, 即对于任意的 $i=1,2,\ldots,l_1,j=1,2,\ldots,l_2,k=0,2,\ldots,m-1$, $\Omega=\{\mathbf{e}=0,\tilde{a}_{ij}^{(k)}=0\}$. 也就是说, 在自适应牵制控制器 (3.4) 下, 响应系统 (3.2) 和驱动系统 (3.1) 达到了完全同步, 并且未知耦合矩阵 $\mathbf{A}^{(k)}$ 可被成功识别.

注 由定理 1 可知, 牵制控制的节点个数 l 与 c_k,μ,δ,γ_k 有关, 即与原网络的耦合强度、噪声强度、延迟和内连耦合矩阵有关.

4 数值仿真

由定理 1 可知, 存在合适的正常数 l_1 和 r, 只需要牵制控制 l_1 个节点, 就可以识别多延迟超网络的部分拓扑结构, 并且使得驱动系统 (3.1) 和响应系统 (3.2) 达到完全同步. 考虑含有 10 个 Rossler 系统的三层网络,

$$\begin{aligned}&F(\mathbf{y}_i)-F(\mathbf{x}_i)\\=&\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&0.2&0\\0&0&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{i1}\\y_{i2}\\y_{i3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0.2+y_{i1}y_{i3}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&0.2&0\\0&0&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{i1}\\x_{i2}\\x_{i3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0.2+x_{i1}x_{i3}\end{pmatrix}\\=&\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&0.2&0\\0&0&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_{i1}\\e_{i2}\\e_{i3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\y_{i1}y_{i3}-x_{i1}x_{i3}\end{pmatrix}\\\triangleq&\mathbf{M}\mathbf{e}_i+g_i(t).\end{aligned}$$

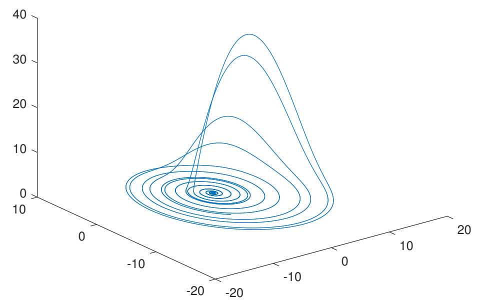


图 2: Rössler 系统 ($a = 0.2, b = 0.2, c = 7$).

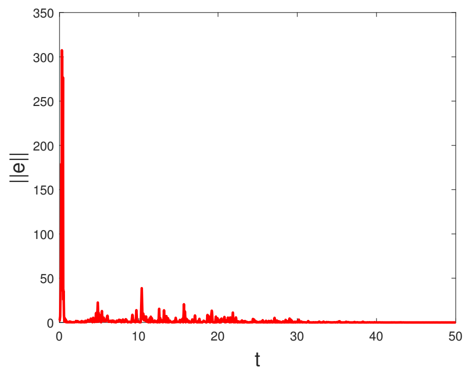


图 3: 牵制控制一个节点的同步误差图.

由图 2 可知 Rossler 系统是有界的 [34], 并且存在 $M_1 = 10, M_2 = 10, M_3 = 35$, 使得 $||x_{ij}|| \leq M_j, ||y_{ij}|| \leq M_j, i = 1, 2, \cdots, 10, j = 1, 2, 3$.

因为

$$\|g_i(t)\| = \sqrt{(y_{i1}e_{i3} + x_{i3}e_{i1})^2} \leq \sqrt{M_1^2 + M_3^2}\|\mathbf{e}_i\|,$$

所以

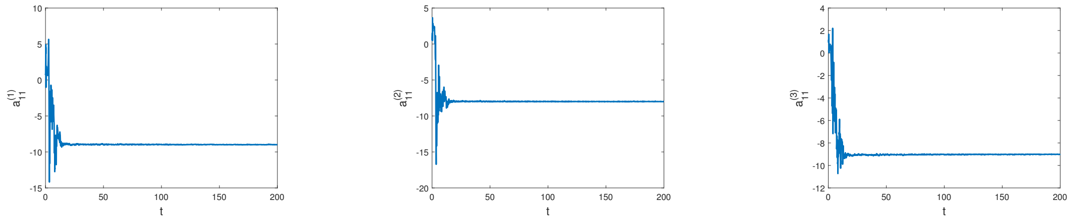
$$\|F(\mathbf{y}_i) - F(\mathbf{x}_i)\| \leq \|\mathbf{M}\|\|\mathbf{e}_i\| + \sqrt{M_1^2 + M_3^2}\|\mathbf{e}_i\| = 43.4730\|\mathbf{e}_i\|,$$

满足假设 1, $\alpha = 43.4730$.

考虑三层网络, 第一层为全连接网络, 第二层为 BA 无标度网络, 网络的初始节点 $b_0 = 2$, 平均度 $b = 1$, 第三层为星型网络, 以第一个节点为中心节点. 令 $\sigma_i^{(k)}(t, \mathbf{e}_i(t)) = \sigma_0^{(k)}\mathrm{diag}\{e_{i1}(t), e_{i2}(t), e_{i3}(t)\}$, 则 $\mathrm{trace}((\sigma_i^{(k)})^T\sigma_i^{(k)}) \leq 2(\sigma_0^{(k)})^2\mathbf{e}_i^T(t)\mathbf{e}_i(t)$ 并且 σ_i 满足假设 2, 明显地, $\mu^{(k)} = (\sigma_0^{(k)})^2$. 在仿真中, 所有变量的初始值在 $(0, 1)$ 中随机选取.

每一层的耦合强度分别设为 $c_0 = 5, c_1 = 0.8, c_2 = 1$, 延迟分别设为 $\tau_0 = 0, \tau_1 = 0.5, \tau_2 = 1$, 噪声强度分别设为 $\sigma_0^{(1)} = 0.1, \sigma_0^{(2)} = 0.5, \sigma_0^{(3)} = 1$, 所以 $\mu = 1.26$. 内联耦合矩阵为 $\Gamma^{(0)} = \Gamma^{(1)} = \Gamma^{(2)} = \mathrm{diag}\{1, 1, 1\}$. 设 $r = 2, \delta = 0$. 由于 $a_{11}^{(k)}, k = 1, 2, 3$ 是未知的, 删掉矩阵的第一行和第一列后所得到的矩阵的最大特征值满足 $\lambda_{\max}(\lceil c_0\gamma_0\bar{\mathbf{A}}^{(0)} + \sum_{k=1}^{m-1}\kappa_k(\bar{\mathbf{A}}^{(k)})^2\rfloor_1) = -46.9529 < -(\alpha + \mu + \frac{1}{2}r) = -45.7330$.

图 3 给出了牵制控制一个节点的同步误差图, 可以看到驱动系统和响应系统达到了完全同步. 图 4 给出了未知拓扑结构 $a_{11}^{(k)}, k = 1, 2, 3$ 的识别图, 从图中可以看出, 曲线趋向于正确的值, 可以看出提出的自适应牵制控制的识别策略是有效的.



a b c

图 4: 拓扑结构 $a_{11}^{(k)}, k = 1, 2, 3$ 的估计图.

5 结论

本文构造了含噪声的多延迟超网络, 基于同步的拓扑识别方法和随机微分方程的理论基础, 通过设计合适的牵制控制器, 牵制控制一部分节点, 将原始网络当作驱动网络, 构造响应网络来识别原网络的未知拓扑结构. 数值仿真验证了定理的有效性, 接下来我们会进一步研究各种网络参数对拓扑识别的影响.

参 考 文 献

[1] D'Agostino G, Scala A. Networks of networks: the last frontier of complexity[M]. Springer, 2014.

[2] Mucha P J, Richardson T, Macon K, Porter M A, Onnela J P. Community structure in time-dependent, multiscale, and multiplex networks[J]. Science, 2010, 328(5980): 876–878.

[3] Domenico M D, Ribalta A S, Cozzo E, Kivelä M, Moreno Y, Porter M A, Gómez S, Arenas A. Mathematical formulation of multilayer networks[J]. Phys. Rev. X, 2013, 3(4): 041022.

[4] Kivela M, Arenas A, Barthelemy M, Gleeson J P, Moreno Y, Porter M A. Multilayer networks[J]. Journal Comp. Netw., 2014, 2(3): 203–271.

[5] 陆君安, 刘慧, 陈娟. 复杂动态网络的同步 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2016.

[6] 汪小帆, 李翔, 陈关荣. 复杂网络理论与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.

[7] Albert R, Barabási A L. Statistical mechanics of complex networks[J]. Rev. Mod. Phys., 2002, 74(1): 47–97.

[8] Zhu S B, Zhou J, Chen G R, Lu J A. Estimating the region of attraction on a complex dynamical network[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2019, 57(2): 1189–1208.

[9] Tang L K, Wu X Q, Lü J H, Lu J A, Raissa M D. Master stability functions for complete, intralayer, and interlayer synchronization in multiplex networks of coupled Rossler oscillators[J]. Phys. Rev. E, 2019, 99(1): 012304.

[10] 王志平, 王众托. 超网络理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[11] Sorrentino F. Synchronization of hypernetworks of coupled dynamical systems[J]. New J. Phys., 2012, 14(3): 033035.

[12] Irving D, Sorrentino F. Synchronization of dynamical hypernetworks: Dimensionality reduction through simultaneous block diagonalization of matrices[J]. Phys. Rev. E, 2012, 86(5): 056102.

[13] Rakshit S, Bera B K, Ghosh D. Synchronization in a temporal multiplex neuronal hypernetwork[J]. Phys. Rev. E, 2018, 98(3): 032305.

[14] Zhao X Y, Zhou J, Lu J A. Pinning synchronization of multiplex delayed networks with stochastic perturbations[J]. IEEE Trans. Cybern., 2019, 49(12): 4262–4270.

[15] Zhao X Y, Zhou J, Zhu S B, Ma C, Lu J A. Topology identification of multiplex delayed networks[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. II:Exp. Briefs, 2020, 67(2): 290–294.

[16] Liu H, Lu J A, Lü J H, Hill D J. Structure identification of uncertain general complex dynamical networks with time delay[J]. Automatica, 2009, 45(8): 1799–1807.

[17] Zhou J, Yu W W, Li X M, Small M, Lu J A. Identifying the topology of a coupled fitzhugh - nagumo neurobiological network via a pinning mechanism[J]. IEEE Trans. Neural. Netw., 2009, 20(10): 1679–1684.

[18] Wu X Q, Zhao X Y, Lü J H, Tang L K, Lu J A. Identifying topologies of complex dynamical networks with stochastic perturbations[J]. IEEE Trans. Control Netw. Syst., 2016, 3(4): 379–389.

[19] Zhu S B, Zhou J, Chen G R, Lu J A. A new method for topology identification of complex dynamical networks[J]. IEEE Trans. Cybern., 2021, 51(4): 2224–2231.

[20] Wang W X, Yang R, Lai Y C, Kovanis V, Grebogi C. Predicting catastrophes in nonlinear dynamical systems by compressive sensing[J]. Phys. Rev. Lett., 2011, 106(15): 154101.

[21] Mei G, Wu X Q, Wang Y F, Hu M, Lu J A, Chen G R. Compressive-sensing-based structure identification for multilayer networks[J]. IEEE Trans. Cybern., 2018, 48(2): 754–764.

[22] Bressler S L, Seth A K. Wiener – granger causality: a well established methodology[J]. Neuroimage, 2011, 58(2): 323–329.

[23] Lin W, Ma H F. Failure of parameter identification based on adaptive synchronization techniques[J]. Phys. Rev. E, 2007, 75(6): 066212.

[24] Chen L, Lu J A, Chi K T. Synchronization: an obstacle to identification of network topology[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. II-Express Briefs, 2009, 56(4): 310–314.

[25] Zhu S B, Zhou J, Lu J A. Identifying partial topology of complex dynamical networks via a pinning mechanism[J]. Chaos, 2018, 28(4): 043108.

[26] Wang X F, Chen G R. Pinning control of scale-free dynamical networks[J]. Physica A, 2002, 310(3-4): 521–531.

[27] Sorrentino F, Di B M, Garofalo F, Chen G R. Controllability of complex networks via pinning[J]. Phys. Rev. E, 2007, 75(2): 046103.

[28] Zhou J, Lu J A, Lü J H. Pinning adaptive synchronization of a general complex dynamical network[J]. Automatica, 2008, 44: 996–1003.

[29] Porfiri M, Bernardo M D. Criteria for global pinningcontrollability of complex networks[J]. Automatica, 2008, 44(12): 3100–3106.

[30] Song Q, Cao J D. On pinning synchronization of directed and undirected complex dynamical networks[J]. IEEE Trans. Circuits Syst. I:Reg. Papers, 2010, 57(3): 672–680.

[31] Mao X R. Stochastic versions of the LaSalle theorem[J]. J. Differ. Equ., 1999, 153(1): 175–195.

[32] Boyd S, Ghaoui L El, Feron E, Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in system and control theory[J]. Siam, 1994, vol. 15.

[33] Zhou J, Wu X Q, Yu W W, Small M, Lu J A. Pinning synchronization of delayed neural networks[J]. Chaos, 2008, 18: 043111.

[34] Rössler O E. An equation for continuous chaos[J]. Phys. Lett. A, 1976, 57: 397–398.

IDENTIFYING TOPOLOGY OF DELAYED HYPERNETWORK WITH STOCHASTIC PERTURBATIONS VIA PINNING CONTROL

ZHAO Xue-yi[1], ZHU Shuai-bing[2], DENG Le-bin[1], XIE Hong[1]

(*1. School of Mathematics and Computer Science, Hanjiang Normal University, Shiyan 442000, China*)

(*2. MOE-LCSM, School of Mathematics and Statistics, Hunan Normal University, Changsha 410081, China*)

Abstract: This manuscript proposes a pinning-control scheme to identify the topology of delayed hypernetworks with stochastic perturbations. In virtue of the LaSalle-type Invariance Principle for stochastic differential delay equations and the Lyapunov stability theory, the theory on topology identification of hypernetwork via pinning control is established. In addition, a numerical example is provided to demonstrate the theoretical results. Taking a three-layer network for example, the unknown topology of the network can be identified successfully by controlling only one node, and in the meanwhile, the drive network and the response network reach synchronization.

Keywords: pinning control; delayed hypernetwork; stochastic perturbation; topology identification

2010 MR Subject Classification: 54H20; 60H10; 74P15