

多层 FitzHugh-Nagumo 神经网络的控制同步

程 卉

(武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

摘要: 本文研究了在 FitzHugh-Nagumo 神经元耦合而成的多层神经网络中, 控制神经元节点分量对于神经元动力学特性和网络同步行为的影响问题. 利用舒尔补定理和李雅普诺夫稳定性理论等分析方法, 分别推导出了单层网络和多层网络两种情况下实现网络同步时的控制条件, 推广了多层神经网络控制同步的理论研究.

关键词: 多层网络; FitzHugh-Nagumo 神经网络; 同步; 控制

MR(2010) 主题分类号: 37B25 中图分类号: O193

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2021)05-0458-13

1 引言

复杂网络是生物、物理、工程和社会科学中很多系统的通用模型^[1-3]. 近些年来, 人们开始对网络中的代数关系、统计内容和图论相关性质以及它们和网络的动力学之间的关系产生浓厚的兴趣. 随着神经网络在信息传输、模式识别和图像处理等方向的广泛应用, 神经系统的动态行为成为研究的热点^[4-6].

生物神经系统是一个由数亿个神经细胞构成的极其错综复杂的信息网络. 生物机体的整个系统和器官在信息的加工和传播过程中受到控制和协调, 使其能够适应内外环境的差异, 完成各种生理过程^[7]. 神经元作为神经系统中最基本的结构单元, 其许多的动态行为通过放电活动来表现出来. 许多个神经元通过电突触和化学突触紧密相连, 组成一个巨大的复杂的神经网络, 具有高层次和多功能的特性. 为了能更加了解神经元信息传递的过程以及其认知、思想、控制等功能, 我们需要探索更多的神经元和网络的动力学行为.

过去生物神经研究主要集中在大脑的不同部分, 但现代的研究更偏向于使用复杂网络的模式来分析不同神经网络的结构和动力学行为^[8]. 神经网络中最基本的结构单元是神经元, 而突触建立了神经元之间进行信息交流和传递的桥梁. 由于神经元的类型和神经元间连接的突触方式的多样性, 神经系统的拓扑结构复杂多样, 具有非线性的动力学行为. 庞大的神经系统对于信息的处理并不是由单个的神经元完成的, 而是由相互作用的神经元集群共同完成的. 所以, 我们需要从复杂网络动力学的角度来探究神经元系统进行信息处理、管理、整合的方式, 通过研究神经元系统的复杂同步行为和时变动力学行为来进一步了解神经元的高级认知功能.

同步是非线性系统中最基本的合作行为形式之一, 在自然界和社会现象中经常发生, 同时在神经元系统中也普遍存在^[9,10]. 根据许多研究表明, 探究和理解大脑的功能已开始广泛应用混沌同步理论. 在神经科学中, 对于健康和 unhealthy 的大脑的功能分析在理解神经元与其

*收稿日期: 2021-03-30 接收日期: 2021-05-06

基金项目: 国家自然科学基金资助 (1301210900049).

作者简介: 程卉 (1996-), 女, 湖北荆门, 研究生, 主要研究方向: 复杂动态网络的同步.

网络之间复杂的相互作用机制方面扮演着重要的角色^[11]. 但是导致脑部疾病的一个重要原因是神经元间无法同步, 像帕金森氏病, 自闭症等影响身体功能的疾病已被证实与神经元间缺乏同步有关^[12,13].

到目前为止, 研究人员们已经提出了很多种控制方案来实现神经网络的同步, 例如主动控制、自适应控制、反同步控制、滑模控制、有限时间同步控制等. 至今对 FitzHugh-Nagumo(简称 FHN) 神经网络在外部施加电刺激的同步控制已经得到了许多有效的研究^[14-19]. 文献 [14] 利用后推和滑膜控制技术的鲁棒控制实现了两个间隙连接耦合的混沌 FHN 神经元的同步, 通过仿真证明了控制方案的有效性. 文献 [15] 考虑了两个具有不同离子电流的非耦合 FHN 神经元与外部电刺激之间的同步, 应用鲁棒自适应滑模控制器解决了系统的不确定性和外部干扰, 在 Lyapunov 稳定性定理的意义上给出了保证稳定同步的充分条件. 文献 [16] 利用空间采样策略的新型控制方法实现了一类反应扩散 FHN 系统之间的同步, 通过数值仿真较好地展示出控制器的效率. 现有研究神经元系统同步控制的文献大多考虑单层网络, 但在实际应用中, 神经元之间通过不同的突触连接方式相互联系, 形成多层次的神经网络, 因此考虑多层神经网络的同步控制具有重要价值. 本文从数学角度出发, 考虑多层神经网络, 多层网络中同步的控制条件与单层网络有所不同, 且相互之间有一定的联系, 这些均在文中有详细证明和介绍. 另外神经元节点间通过分量来耦合, 且考虑控制节点的分量对同步的影响, 这对于以前的研究而言是创新部分, 为控制神经网络的同步提供了一些新的思路.

本文研究了由 FHN 神经元模型耦合而成的多层神经网络, 探究控制神经元节点的不同分量对于系统达到同步的影响. 在单层网络和多层网络两种情况下, 基于舒尔补式^[20] 和李雅普诺夫稳定性理论^[21], 分别给出了保证神经元系统稳定同步的充分条件. 通过比较分析, 从理论上讨论了两者的同步条件的差异与联系.

2 数学准备

我们首先介绍一些本文中将要使用的符号. R^n 和 $R^{n \times m}$ 分别表示 n 维欧几里得空间和所有 $n \times m$ 维实矩阵的集合, R^+ 是正实数集, $\|\cdot\|$ 表示向量或矩阵的二范数, $\lambda_{\max}(\cdot)$ 表示对称矩阵的最大特征值, $\lambda_{\min}(\cdot)$ 表示对称矩阵的最小特征值. $I_{n \times n}$ 表示维数为 n 的单位矩阵.

2.1 数学知识准备

为了得到我们的主要结果, 将使用以下关于正规矩阵的引理:

引理 2.1^[20] 假设 $G = (G_{ij})_{n \times n}$ 是一个不可约矩阵满足 $G_{ij} = G_{ji} \geq 0, i \neq j, G_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^n G_{ij}$, 其中 $i = 1, 2, \dots, n$. 那么 G 有一个 0 特征值和 $n-1$ 个负的特征值, 0 特征值对应的特征向量为 $(1, 1, \dots, 1)^T$.

引理 2.2 (Schur Complement)^[21] 设 $n \times n$ 维矩阵 A 可被分块为下述形式

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中 A_{11} 和 A_{22} 为方阵. 如果 A_{11} 是非奇异的, 那么 A_{11} 在矩阵 A 中的 Schur 补被定义为矩阵 $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$. 同理, 如果 A_{22} 是非奇异的, 那么 A_{22} 在矩阵 A 中的 Schur 补被定

义为 $A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$.

不难验证, 下述的恒等式成立

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}.$$

利用上式, 不难验证以下有用结论

$$\det A = (\det A_{11})\det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}),$$

上式就是关于行列式的 Schur 补公式, 也称为 Schur 公式.

2.2 FitzHugh-Nagumo(FHN) 神经元模型

自 1951 年以来, 对电化学细胞的定量研究主要受到了霍奇金和赫胥黎对长乌贼巨型轴索神经传导的杰出研究的推动. 霍奇金和赫胥黎主要是建立四维模型来表示在乌贼的巨大轴突上传播脉冲的过程^[22], 该模型能够描述神经元膜内的自激振荡、混沌、多重稳定等非线性现象, 为人们探索神经元的兴奋性提供了基本框架. 上千个神经元是如何相互连接, 怎么协调有序放电是理论研究和实验探索的重要课题. 这些年来, 复杂网络理论的发展为探索这一问题提供了一个很好的新方法.

由于这些方程太过复杂, 无法完全分析, 为了帮助理解霍奇金 - 赫胥黎方程的性质, 更简单的方程组确实是必要的. 因此, 考虑到生理背景, FitzHugh(1961) 和 Nagumo(1962) 独立地导出了一个二维系统, 该系统提供了一个四维的霍奇金 - 赫克斯利方程的简化^[22-25].

Fitzhugh-Nagumo (FHN) 神经元模型可以用下式描述:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= V - \frac{1}{3}V^3 - W + I_{ex}, \\ \dot{W} &= \epsilon(V + a - bW), \end{aligned}$$

其中, V 表示膜电位, W 表示恢复变量, I_{ex} 为外部输入电流, 参数 a, b, ϵ 均为正数. 一般来说, $0 < \epsilon \ll 1$ 使 V 成为快变量, 而 W 成为慢变量. 其中 b 是影响系统动力学的重要参数之一. 取 $\epsilon = 0.08$, $a = 0.7$, $b = 0.8$ 和 $I_{ex} = 0.5\cos(\frac{t}{50})$. FHN 模型的状态变量如图 (1) 所示. 变量 V 和 W 是有界的, 因为系统中任何一点的轨道收缩到极限环.

考虑一个由 N 个耦合 FHN 神经元组成的加权网络. 网络中第 i 个神经元的自身动力学可以用下式描述:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= V_i - \frac{1}{3}V_i^3 - W_i + I_{ex} \triangleq f_1(V_i, W_i), \\ \dot{W}_i &= \epsilon(V_i + a - bW_i) \triangleq f_2(V_i, W_i), \end{aligned}$$

其在同步流形 $s = (s_1, s_2)$ 处线性化后可以得到

$$f(x_i) - f(s) = Df(s)(x_i - s),$$

其中, $Df(s) = \begin{bmatrix} 1 - s_1^2 & -1 \\ \epsilon & -\epsilon b \end{bmatrix}$ 是 $f(x)$ 在 s 处的 Jacobian 矩阵. s_1 表示同步态 s 的第一个分量. 例如从上式可以看出, 当参数为 $\epsilon = 0.08$, $a = 0.7$, $b = 0.8$, $I_{ex} = 0.5\cos(\frac{t}{50})$ 时, 由图 (1) 可以看出, s_1 的界可以取 2.

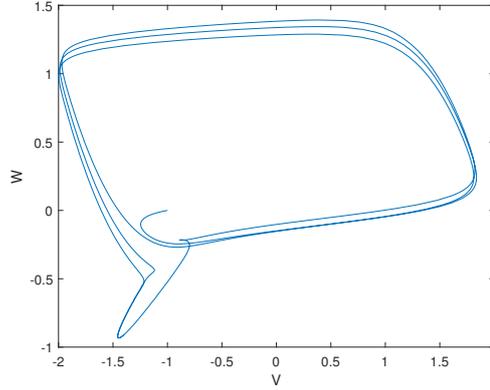


图 1:FHN 模型中状态变量 W 和 V 的相图, 其中 $\epsilon = 0.08, a = 0.7, b = 0.8, I_{ex} = 0.5\cos(\frac{t}{50})$. 可以看到, 系统的轨道收缩到极限环, 所以变量 V 和 W 是有界的. V 的边界可以取 2.

3 主要结论

3.1 单层网络

考虑一个二维的具有 N 个神经元的复杂网络. 描述网络动态演化的方程为:

$$\frac{dx_i}{dt} = f(t, x_i) + \sigma_1 \sum_{j=1}^n c_{ij} P x_j + u_i(t), \quad (3.1)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, N$, $u_i(t)$ 是施加在第 i 个节点的控制量. $x_i = [x_i^1(t), x_i^2(t)]^T \in R^2$ 是第 i 个神经元节点的二维状态向量, $f: R_+ \times R^2 \rightarrow R^2$ 是一个非线性函数, σ_1 是耦合强度, P 是内联矩阵, $C = (c_{ij})_{N \times N}$ 是加权对称的耦合矩阵. 如果神经元节点 i 和节点 $j (j \neq i)$ 之间有连边, 那么 $c_{ij} = c_{ji} > 0$ 且 c_{ij} 是权重; 否则, $c_{ij} = c_{ji} = 0$, 矩阵 C 的对角线元素定义为:

$$c_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}, i = 1, 2, \dots, N.$$

因为本文着重研究多层神经网络中控制节点分量对于网络动力学行为及同步现象的影响, 所以内联矩阵均考虑取对角元素为 0 或 1 的对角矩阵. 一方面是因为在一般的多层网络中也会考虑取对角矩阵, 这样在进行研究证明时会更方便, 如文献 [26]; 另一方面, 考虑控制节点分量对于同步的影响时, 内联矩阵取对角矩阵同时也可以考虑节点之间耦合不同分量时同步条件是否有所变化.

当内联矩阵 $P = \text{diag}(1, 0)$ 时, 对于 FHN 模型网络, 向量方程 (3.1) 可以写成标量形式:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^1 &= x_i^1 - \frac{1}{3}(x_i^1)^3 - x_i^2 + I_{ex} + \sigma_1 \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j^1 - u_i^1 \\ \dot{x}_i^2 &= \epsilon(x_i^1 + a - b x_i^2) - u_i^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

令 $e_i \triangleq x_i - s (1 \leq i \leq N)$, 其中 $s = (s_1, s_2) \in R^2$ 是同步态, 将网络方程 (3.2) 在 s 上

做变分, 可以得到方程 (3.2) 在 s 上的变分方程:

$$\begin{aligned}\dot{e}_i^1 &= Df(s)e_i^1 + \sigma_1 \sum_{j=1}^n c_{ij}e_j^1 - u_i^1, \\ \dot{e}_i^2 &= Df(s)e_i^2 - u_i^2.\end{aligned}\quad (3.3)$$

定理 3.1 当对每个神经元节点施加控制器 $u_i(t) = (u_i^1, u_i^2) = [de_i^1(t), 0]^T$ 时, 若控制强度 $d(d > 0)$ 满足:

$$d > 1 - s_1^2 + \frac{(\epsilon + 1)^2}{4\epsilon b},$$

其中 s_1 是同步态 $s = (s_1, s_2)$ 中的第一个分量, 那么神经网络 (3.2) 是局部同步的, 即 $t \rightarrow +\infty, e_i \rightarrow 0$.

证 选取系统 (3.1) 的李雅普诺夫函数如下

$$\begin{aligned}V(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N ((e_i^1)^2 + (e_i^2)^2), \\ \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^N (e_i^1 \dot{e}_i^1 + e_i^2 \dot{e}_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^N [e_i^1 (Df(s)e_i^1) + e_i^2 (Df(s)e_i^2)] + \sum_{i=1}^N e_i^1 \sigma_1 \sum_{j=1}^N c_{ij}e_j^1 - \sum_{i=1}^N d(e_i^1)^2 \\ &\leq [(1 - s_1^2)(e_i^1)^2 + (\epsilon - 1)e_i^1 e_i^2 - \epsilon b(e_i^2)^2] + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_1 c_{ij}e_i^1 e_j^1 - \sum_{i=1}^N d(e_i^1)^2 \\ &= \begin{bmatrix} E_i^1 & E_i^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_1 C - dI_{n \times n} + (1 - s_1^2)I_{n \times n} & \frac{\epsilon-1}{2}I_{n \times n} \\ \frac{\epsilon-1}{2}I_{n \times n} & -\epsilon bI_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i^1 \\ E_i^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E_i^1 & E_i^2 \end{bmatrix}^T \mathbf{R} \begin{bmatrix} E_i^1 \\ E_i^2 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

其中 $E_i^1 = (|e_1^1|, |e_2^1|, \dots, |e_n^1|)^T$, $E_i^2 = (|e_1^2|, |e_2^2|, \dots, |e_n^2|)^T$,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & \frac{\epsilon-1}{2}I_{n \times n} \\ \frac{\epsilon-1}{2}I_{n \times n} & -\epsilon bI_{n \times n} \end{bmatrix},$$

其中 $R_1 = \sigma_1 C - dI_{n \times n} + (1 - s_1^2)I_{n \times n}$.

那么有

$$\begin{aligned}R_1 - \frac{\epsilon-1}{2}I_{n \times n} \cdot (-\epsilon bI_{n \times n})^{-1} \cdot \frac{\epsilon-1}{2}I_{n \times n} &< 0, \\ \sigma_1 C - dI_{n \times n} + (1 - s_1^2)I_{n \times n} &< -\frac{(\epsilon-1)^2}{4\epsilon b}I_{n \times n}, \\ \sigma_1 C &< (d - 1 + s_1^2 - \frac{(\epsilon-1)^2}{4\epsilon b})I_{n \times n}, \\ \sigma_1 \lambda_{\max}(C) &< d - 1 + s_1^2 - \frac{(\epsilon-1)^2}{4\epsilon b}.\end{aligned}$$

根据引理 2.1, 我们有: $\lambda_{\max}(C) = 0$. 所以当 $d > 1 - s_1^2 + \frac{(\epsilon-1)^2}{4\epsilon b}$ 时, $R_1 - \frac{\epsilon-1}{2}I_{n \times n} \cdot (-\epsilon b I_{n \times n})^{-1} \cdot \frac{\epsilon-1}{2}I_{n \times n} < 0$ 同时 $-\epsilon b I_{n \times n} < 0$, 根据引理 2.2 (舒尔补定理), 我们可以推断出 $R < 0$, 即矩阵 R 是负定的.

根据 LaSalle 不变原理, 系统的每个解收敛到集合的最大不变集 $\dot{V}(t) = 0$, 即 $E_i^1 = 0, E_i^2 = 0 (1 \leq i \leq n)$. 所以当 $t \rightarrow +\infty, e_i \rightarrow 0 (1 \leq i \leq n)$, 网络处于局部同步状态.

注 3.1 对于动态神经网络 (3.2), 当线性控制添加到每个节点的第一个分量时, 网络可以达到局部同步, 其所需的控制强度 d 只与神经元节点自身动力学有关, 与耦合强度和耦合矩阵等无关.

注 3.2 另外通过证明, 当内联矩阵 $P = \text{diag}(0, 1)$ 时, 对网络 (3.2) 施加控制 $u_i(t) = [de_i^1(t), 0]^T$, 网络均能同步, 其中控制强度均需满足 $d > 1 - s_1^2 + \frac{(\epsilon+1)^2}{4\epsilon b}$, 本文不再详细证明. 这一现象说明当对网络 (3.2) 中神经元节点的第一个分量施加控制时, 耦合任意一个分量对于控制强度没有影响.

若换成其他内联矩阵时网络依旧能同步, 大部分神经网络文章中均有介绍, 但同步条件与本文有所不同, 这不是本文考虑的重点, 所以此处不再赘述.

上面讨论了在单层生物神经网络的情况下, 当节点仅通过第一分量相互耦合时, 可以对节点的第一分量进行线性控制, 从而实现网络的局部同步. 那么当节点通过第二分量相互耦合时, 考虑是否可以通过控制节点第二的分量来实现网络同步.

接下来考虑神经网络 (3.1), 当耦合矩阵 $P = \text{diag}(0, 1)$, 线性控制器 $u_i(t) = [0, de_i^2(t)]^T$ 施加在每个节点上, 那么网络的动态方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^1 &= x_i^1 - \frac{1}{3}(x_i^1)^3 - x_i^2 + I_{ex}, \\ \dot{x}_i^2 &= \epsilon(x_i^1 + a - bx_i^2) + \sigma_1 \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j^2 - de_i^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

那么有误差系统

$$\begin{aligned} \dot{e}_i^1 &= Df(s)e_i^1, \\ \dot{e}_i^2 &= Df(s)e_i^2 + \sigma_1 \sum_{j=1}^n c_{ij}e_j^2 - de_i^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

定理 3.2 当对每个神经元节点施加控制器 $u_i(t) = (u_i^1, u_i^2) = [0, de_i^2(t)]^T$ 时, 若控制强度 $d (d > 0)$ 满足

$$\frac{1}{\epsilon b + d} < \frac{4(s_1^2 - 1)}{(\epsilon - 1)^2},$$

其中 s_1 是同步态 $s = (s_1, s_2)$ 中的第一个分量, 那么神经网络 (3.4) 是局部同步的, 即 $t \rightarrow +\infty, e_i \rightarrow 0$.

证 选取系统 (3.4) 的李雅普诺夫函数如下:

$$\begin{aligned}
 V(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N ((e_i^1)^2 + (e_i^2)^2), \\
 \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^N (e_i^1 \dot{e}_i^1 + e_i^2 \dot{e}_i^2) \\
 &= \sum_{i=1}^N [e_i^1 (Df(s)e_i^1) + e_i^2 (Df(s)e_i^2)] + \sum_{i=1}^N e_i^2 \sigma_1 \sum_{j=1}^N c_{ij} e_j^2 - \sum_{i=1}^N d(e_i^2)^2 \\
 &\leq [(1-s_1^2)(e_i^1)^2 + (\epsilon-1)e_i^1 e_i^2 - \epsilon b(e_i^2)^2] + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_1 c_{ij} e_i^2 e_j^2 - \sum_{i=1}^N d(e_i^2)^2 \\
 &= \begin{bmatrix} E_i^1 & E_i^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (1-s_1^2)I_{n \times n} & \frac{\epsilon-1}{2}I_{n \times n} \\ \frac{\epsilon-1}{2}I_{n \times n} & \sigma_1 C - dI_{n \times n} - \epsilon bI_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i^1 \\ E_i^2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} E_i^1 & E_i^2 \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} E_i^1 \\ E_i^2 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

其中 $E_i^1 = (|e_1^1|, |e_2^1|, \dots, |e_n^1|)^T$, $E_i^2 = (|e_1^2|, |e_2^2|, \dots, |e_n^2|)^T$,

$$Q = \begin{bmatrix} (1-s_1^2)I_{n \times n} & \frac{\epsilon-1}{2}I_{n \times n} \\ \frac{\epsilon-1}{2}I_{n \times n} & Q_1 \end{bmatrix},$$

其中 $Q_1 = \sigma_1 C - dI_{n \times n} - \epsilon bI_{n \times n}$.

那么有

$$\begin{aligned}
 (1-s_1^2)I_{n \times n} - \frac{\epsilon-1}{2}I_{n \times n} \cdot Q_1^{-1} \cdot \frac{\epsilon-1}{2}I_{n \times n} &< 0, \\
 (1-s_1^2)I_{n \times n} - \frac{(\epsilon-1)^2}{4}Q_1^{-1} &< 0, \\
 \lambda_{\min}(Q_1^{-1}) &> (1-s_1^2) \frac{4}{(\epsilon-1)^2},
 \end{aligned}$$

另外

$$\lambda_{\min}(Q_1^{-1}) = \frac{1}{\lambda_{\max}(Q_1)} = \frac{1}{\lambda_{\max}(\sigma_1 C - \epsilon bI_{n \times n} - dI_{n \times n})} = \frac{1}{\sigma_1 \lambda_{\max}(C) - \epsilon b - d},$$

根据引理 2.1 可得: $\lambda_{\max}(C) = 0$, and $\lambda_{\min}(Q_1^{-1}) = \frac{1}{-\epsilon b - d}$. 所以我们可以得到: 当 $\frac{1}{\epsilon b + d} < \frac{4(s_1^2 - 1)}{(\epsilon - 1)^2}$ 时, $(1-s_1^2)I_{n \times n} - \frac{\epsilon-1}{2}I_{n \times n} \cdot Q_1^{-1} \cdot \frac{\epsilon-1}{2}I_{n \times n} < 0$ 成立, 同时 $Q_1 < 0$ 也恒成立. 结合引理 2.2 有, $Q < 0$, 即矩阵 Q 是负定的.

根据 LaSalle 不变原理, 系统的每个解收敛到集合的最大不变集 $\dot{V}(t) = 0$, 即 $E_i^1 = 0, E_i^2 = 0 (1 \leq i \leq n)$. 所以当 $t \rightarrow +\infty$, $e_i \rightarrow 0 (1 \leq i \leq n)$, 网络处于局部同步状态.

注 3.3 对于动态神经网络 (3.4), 当节点通过第二个分量相互耦合时, 对节点的第二个分量施加控制, 使网络同步所需的控制强度也受到神经元节点自身动力学的影响, 与耦合

强度和耦合矩阵无关. 此时的控制强度与耦合控制第一分量时所需的控制强度有所不同, 且所需的控制强度更大.

注 3.4 通过证明, 当内联矩阵 $P = \text{diag}(1, 0)$ 时, 对网络 (3.4) 施加控制 $u_i(t) = [0, de_i^2(t)]^T$, 网络均能同步, 其中控制强度均需满足 $\frac{1}{\epsilon b+d} < \frac{4(s_1^2-1)}{(\epsilon-1)^2}$, 本文不再详细证明. 这一现象说明当对网络 (3.4) 中节点的第二个分量施加控制时, 无论耦合哪个分量对于控制强度均没有影响.

3.2 两层网络

对于两层生物神经网络, 复杂网络模型描述如下 [26]:

$$\frac{dx_i}{dt} = f(t, x_i) + \sigma_1 \sum_{j=1}^n c_{ij} P x_j + \sigma_2 \sum_{j=1}^n g_{ij} L x_j + u_i(t), \quad (3.6)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, N$, $u_i(t) = [d_1 e_i^1, d_2 e_i^2]$ 是施加在第 i 个节点上的控制器, $x_i = [x_i^1(t), x_i^2(t)]^T$ 表示第 i 个神经元节点的二维状态向量, f 是非线性函数, σ_1 和 σ_2 都是耦合强度. $C = (c_{ij})$, $G = (g_{ij})$ 是 $n \times n$ 维行和为 0 的耦合矩阵, 且非负对角元素分别为 $c_{ij} = c_{ji}$, $g_{ij} = g_{ji}$. 耦合矩阵 C 和 G 分别表示两层不同的连接方式, 即神经元间不同的突触连接方式. 内联矩阵 P 和 L 分别决定了在 C 和 G 层内, 振荡器之间的哪些变量相互耦合. 因此, C 层的内联矩阵 $P = \text{diag}(1, 0)$ 表示第一层网络将通过第一个分量即分量 x^1 来相互耦合, 而 G 层的内联矩阵 $L = \text{diag}(0, 1)$ 表示第二层连接将通过第二个分量即分量 x^2 来耦合.

对于 FHN 神经元模型构成的两层网络, 其动态网络方程为:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^1 &= x_i^1 - \frac{1}{3}(x_i^1)^3 - x_i^2 + I_{ex} + \sigma_1 \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j^1 - d_1 e_i^1, \\ \dot{x}_i^2 &= \epsilon(x_i^1 + a - b x_i^2) + \sigma_2 \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j^2 - d_2 e_i^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

令 $e_i \triangleq x_i - s = (e_i^1, e_i^2)$, ($1 \leq i \leq N$), 我们可以得到在 s 上的变分方程:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i^1 &= Df(s)e_i^1 + \sigma_1 \sum_{j=1}^n c_{ij} e_j^1 - d_1 e_i^1, \\ \dot{e}_i^2 &= Df(s)e_i^2 + \sigma_2 \sum_{j=1}^n g_{ij} e_j^2 - d_2 e_i^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

定理 3.3 当 $d_2 = 0$ 时, 即对两层神经网络中的每个神经元节点施加控制器 $u_i(t) = [d_1 e_i^1(t), 0]^T$ 时, 若控制强度 d_1 ($d_1 > 0$) 满足:

$$d_1 > 1 - s_1^2 + \frac{(\epsilon - 1)^2}{4\epsilon b},$$

网络 (3.7) 是局部同步的, 即 $t \rightarrow +\infty$, $e_i \rightarrow 0$.

定理 3.4 当 $d_1 = 0$ 时, 即对两层神经网络中的每个神经元节点施加控制器 $u_i(t) = [0, d_2 e_i^2(t)]^T$ 时, 若控制强度 d_2 ($d_2 > 0$) 满足:

$$\frac{1}{\epsilon b + d_2} < \frac{4(s_1^2 - 1)}{(\epsilon - 1)^2},$$

网络 (3.7) 是局部同步的, 即 $t \rightarrow +\infty, e_i \rightarrow 0$.

定理 3.5 当对两层神经网络中的每个神经元节点施加控制器 $u_i(t) = [d_1 e_i^1(t), d_2 e_i^2(t)]^T$ 时, 若控制强度 d_1, d_2 ($d_1, d_2 > 0$) 满足:

$$(1 - s_1^2 - d_1)(\epsilon b + d_2) < -\frac{(\epsilon - 1)^2}{4},$$

网络 (3.7) 是局部同步的, 即 $t \rightarrow +\infty, e_i \rightarrow 0$.

证 考虑网络 (3.7) 的李雅普诺夫函数如下:

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N ((e_i^1)^2 + (e_i^2)^2), \\ \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^N (e_i^1 \dot{e}_i^1 + e_i^2 \dot{e}_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^N [e_i^1 Df(s) e_i^1 + e_i^2 Df(s) e_i^2] + \sum_{i=1}^N e_i^1 \sigma_1 \sum_{j=1}^N c_{ij} e_j^1 \\ &\quad + \sum_{i=1}^N e_i^2 \sigma_2 \sum_{j=1}^N g_{ij} e_j^2 - \sum_{i=1}^N (d_1 (e_i^1)^2 + d_2 (e_i^2)^2) \\ &\leq \sum_{i=1}^N [(1 - s_1^2)(e_i^1)^2 + (\epsilon - 1)e_i^1 e_i^2 - \epsilon b (e_i^2)^2] + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_1 c_{ij} e_i^1 e_j^1 \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_2 g_{ij} e_i^2 e_j^2 - \sum_{i=1}^N (d_1 (e_i^1)^2 + d_2 (e_i^2)^2) \\ &= \begin{bmatrix} E_i^1 & E_i^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_1 C - d_1 I_{n \times n} + (1 - s_1^2) I_{n \times n} & \frac{\epsilon - 1}{2} I_{n \times n} \\ \frac{\epsilon - 1}{2} I_{n \times n} & \sigma_2 G - d_2 I_{n \times n} - \epsilon b I_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_i^1 \\ E_i^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E_i^1 & E_i^2 \end{bmatrix}^T \mathbf{K} \begin{bmatrix} E_i^1 \\ E_i^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其中 $E_i^1 = (|e_1^1|, |e_2^1|, \dots, |e_n^1|)^T$, $E_i^2 = (|e_1^2|, |e_2^2|, \dots, |e_n^2|)^T$, 令

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & \frac{\epsilon - 1}{2} I_{n \times n} \\ \frac{\epsilon - 1}{2} I_{n \times n} & K_2 \end{bmatrix},$$

其中 $K_1 = \sigma_1 C - d_1 I_{n \times n} + (1 - s_1^2) I_{n \times n}$, $K_2 = \sigma_2 G - d_2 I_{n \times n} - \epsilon b I_{n \times n}$.

由引理 2.2 可知, 如果 $K_2 < 0$ 且下式成立

$$F = K_1 - \frac{\epsilon - 1}{2} I_{n \times n} \cdot K_2^{-1} \cdot \frac{\epsilon - 1}{2} I_{n \times n} < 0,$$

则 $K < 0$. 所以有

$$f(x) = x^T Fx = \sigma_1 x^T Cx + (1 - s_1^2 - d_1)x^T x - \frac{(\epsilon - 1)^2}{4} x^T K_2^{-1} x < 0.$$

由引理 2.1 可得: $\lambda_{\max}(C) = 0, \lambda_{\max}(G) = 0$, 则 $\sigma_1 x^T Cx \leq \sigma_1 \lambda_{\max}(C)x^T x = 0$, 则有

$$f(x) < (1 - s_1^2 - d_1)x^T x - \frac{(\epsilon - 1)^2}{4} x^T K_2^{-1} x,$$

同样地有

$$\begin{aligned} & \lambda_{\min}(K_2^{-1}) \\ &= \frac{1}{\lambda_{\max}(K_2)} = \frac{1}{\lambda_{\max}(\sigma_2 G - d_2 I_{n \times n} - \epsilon b I_{n \times n})} = \frac{1}{\sigma_2 \lambda_{\max}(G) - d_2 - \epsilon b} = \frac{1}{-d_2 - \epsilon b}, \end{aligned}$$

所以 $x^T K_2^{-1} x \geq \lambda_{\min}(K_2)x^T x \geq \frac{1}{-d_2 - \epsilon b} x^T x$, 则

$$\begin{aligned} f(x) &< (1 - s_1^2 - d_1)x^T x - \frac{(\epsilon - 1)^2}{4} x^T K_2^{-1} x \\ &< (1 - s_1^2 - d_1)x^T x + \frac{(\epsilon - 1)^2}{4} \cdot \frac{1}{d_2 + \epsilon b} x^T x \\ &< (1 - s_1^2 - d_1 + \frac{(\epsilon - 1)^2}{4(d_2 + \epsilon b)})x^T x. \end{aligned}$$

若下式成立

$$1 - s_1^2 - d_1 + \frac{(\epsilon - 1)^2}{4(d_2 + \epsilon b)} < 0, \quad (1 - s_1^2 - d_1)(d_2 + \epsilon b) < -\frac{(\epsilon - 1)^2}{4},$$

那么 $f(x) < 0$ 且 $F < 0$.

另一方面, $K_2 = \sigma_2 G - d_2 I_{n \times n} - \epsilon b I_{n \times n} < 0$ 始终成立. 根据引理 2.2, 我们可推断出当 d_1, d_2 取合适的正实数时, $K < 0$, 也就意味着 K 是负定的.

根据 LaSalle 不变原理, 系统的每个解收敛到集合的最大不变集 $\dot{V}(t) = 0$, 即 $E_i^1 = 0, E_i^2 = 0 (1 \leq i \leq n)$. 所以当 $t \rightarrow +\infty, e_i \rightarrow 0 (1 \leq i \leq n)$, 网络处于局部同步状态.

注 3.5 对于两层生物神经元动态网络 (3.6), 当对每个节点的两个分量都施加线性控制时, 网络可以达到局部同步, 其所需的控制强度 d_1, d_2 相互限制、相互影响, 与节点本身的动力学有关. 它们也与耦合强度、耦合矩阵等无关. 当其中一个分量上的控制强度降为 0 时, 另一个分量上所需的控制条件与单层网络情况相同.

定义下式

$$g = (1 - s_1^2 - d_1)(d_2 + \epsilon b) + \frac{(\epsilon - 1)^2}{4},$$

当 $g < 0$ 时网络可以达到一个同步状态. 若取 $\epsilon = 0.08, a = 0.7, b = 0.8$, 那么 FHN 模型中的神经元节点的分量是有界的. 从图 1 中我们可以计算出 s^1 的界可以取值为 2, 我们可以画出 g 关于 d_1 和 d_2 的图像, 如图 2 所示.

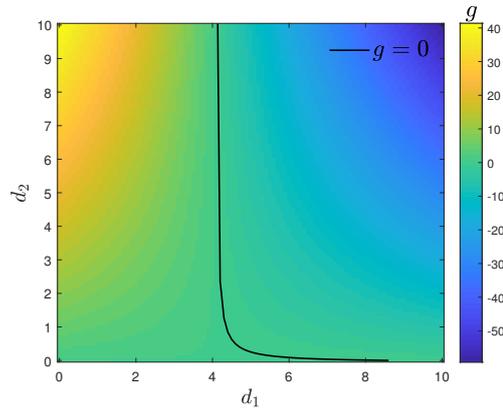


图 2: 两层生物神经网络中分别控制节点的两个分量时, 网络同步与控制强度之间的关系.

由上图 2 可知, 当 $d_2 = 0$ 时, $d_1 = d$, 即与仅控制第一分量时所需的控制强度相同. 同样地, 当 $d_1 = 0$ 时, $d_2 = d$, 即与仅控制第二分量时所需的控制强度相同. 当 $d_2 > 0, d_1 < d$, 这说明在对每个节点的第二个分量施加控制后, 网络达到同步时对第一个分量所需的控制强度会相应降低. 相应地, 当 d_1 越小, 所需的 d_2 会变得更大. 这相应地说明, 两者之间是相互影响, 共同促进网络同步的关系.

4 结论

综上所述, 我们讨论了由 FHN 模型耦合而成的多层神经网络, 探究控制神经元节点的不同分量对于系统达到同步的影响. 对单层网络和两层网络进行了分类和讨论, 通过严格的理论验证, 分别给出了保证神经元系统稳定同步的充分条件.

在单层网络中, 神经元节点之间仅通过第一个分量耦合, 且仅控制第一个分量, 当控制强度大于 $1 - s_1^2 + \frac{(\epsilon+1)^2}{4\epsilon b}$ 时, 网络可以实现同步. 那么, 当节点之间仅耦合第二分量, 并对所有节点的第二个分量进行控制时, 当控制强度满足 $\frac{1}{\epsilon b+d} < \frac{4(s_1^2-1)}{(\epsilon-1)^2}$ 时, 可以实现网络的同步. 这一现象说明控制神经元节点的不同分量对于促进网络同步的影响有所不同, 对于 FHN 模型而言, 控制神经元节点的第一分量能更好地促进网络同步.

对于多层生物神经网络, 为了能使网络同步, 在两层神经网络中的节点上分别对两个分量施加控制, 其控制强度是相互影响的. 当在两个分量上同时施加不同的控制强度时, 两者需要满足 $(1 - s_1^2 - d_1)(\epsilon b + d_2) < -\frac{(\epsilon-1)^2}{4}$. 在对每个节点的第二个分量施加控制后, 相较于仅控制节点的第一个分量或者第二个分量的情况, 网络达到同步时所需的单个分量上控制强度会相应降低.

我们可以发现, 由 FHN 模型耦合的单层生物神经网络和多层生物神经网络中实现同步时所需的控制强度是不同的. 当多层网络中仅控制一个分量时, 所需的控制强度与单层网络中所需的控制强度相同, 且控制第一分量对于同步的影响要优于第二分量. 多层网络中两个分量上的控制相互影响, 共同促进网络的同步, 另外同步所需的充分条件是单层网络情况的扩展.

未来的工作包括研究由其他模型耦合的网络中控制节点分量对同步的影响, 以及通过牵制控制部分节点, 分析控制节点中某一分量对同步的影响.

参 考 文 献

- [1] Strogatz S H. Exploring complex networks[J]. *Nature*, 2001, 401(6825): 268–276.
- [2] Albert R, Barabasi A L. Statistical mechanics of complex networks[J]. *Review of Modern Physics*, 2002, 74(1): 47–97.
- [3] Newman M E J. The structure and function of complex networks[J]. *Siam Review*, 2003, 45(2): 167–256.
- [4] Abdalnabi A H, Shuai B, Zuo Z. Multimodal recurrent neural networks with information transfer layers for indoor scene labeling[J/OL]. *IEEE Transactions on Multimedia*, 2018, 20(7): 1656–1671. DOI: 10.1109/TMM.2017.2774007.
- [5] Andreas, Bartschat, Stephan. Digital image processing and deep neural networks in ophthalmology—current trends[J]. *Klinische Monatsblätter für Augenheilkunde*, 2019, 236(12): 1399–1406.
- [6] Cho J H, Park C G. Multiple feature aggregation using convolutional neural networks for sar image-based automatic target recognition[J/OL]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2018, 15(12): 1882–1886. DOI: 10.1109/LGRS.2018.2865608.
- [7] 李玉叶. 三类神经网络的时空动力学行为研究 [D]. 西安: 陕西师范大学, 2012.
- [8] Mesulam M M. From sensation to cognition[J/OL]. *Brain*, 1998, 121(6): 1013–1052.
- [9] Wei W. Synchronization of coupled chaotic Hindmarsh Rose neurons: an adaptive approach[J]. *Chinese Physics B*, 2015, 10(24): 97–104.
- [10] She W Q, Ma M H. Tracking synchronization of networked lagrangian systems via impulsive control and its applications [J]. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2019, 32(4): 1093–1103.
- [11] Al Shargie F, Tang T B, Kiguchi M. Stress assessment based on decision fusion of eeg and fnirs signals[J]. *IEEE Access*, 2017, 8(5): 19889–19896.
- [12] Sun X, Li G. Synchronization transitions induced by partial time delay in a excitatory–inhibitory coupled neuronal network[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 89(4): 2509–2520.
- [13] Rigatos G. Robust synchronization of coupled neural oscillators using the derivative–free nonlinear kalman filter[J]. *Cognitive Neurodynamics*, 2014, 8(6): 465–478.
- [14] Yu H, Jiang W, Deng B. Adaptive backstepping sliding mode control for chaos synchronization of two coupled neurons in the external electrical stimulation[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17(3): 1344–1354.
- [15] Yang C, Lin C L. Robust adaptive sliding mode control for synchronization of space-clamped fitzhugh–nagumo neurons[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, 69(4): 2089–2096.
- [16] Chen S, Lim C C, Shi P. Synchronization control for reaction – diffusion fitzhugh – nagumo systems with spatial sampled-data[J/OL]. *Automatica*, 2018, 93: 352–362. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.03.043>.
- [17] Ibrahim M M, Jung H. Complex synchronization of a ring-structured network of fitzhugh–nagumo neurons with single-and dual-state gap junctions under ionic gates and external electrical disturbance[J]. *IEEE Access*, 2019, PP(99): 1–1.
- [18] Tar J K, Bitó J, Kovács L. Fractional order pid-type feedback in fixed point transformation-based adaptive control of the fitzhugh–nagumo neuron model with time-delay [J]. *IFAC-Papers On Line*, 2018, 51(4): 906–911.
- [19] Plotnikov S A, Lehnert J, Fradkov A L. Adaptive control of synchronization in delay-coupled heterogeneous networks of FitzHugh–Nagumo nodes [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2016, 26(4) : 165008.
- [20] Bapat R B. 图与矩阵 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2014

- [21] 汪小帆, 李翔, 陈关荣. 复杂网络理论及其应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.
- [22] Finkbeiner S. Mathematical aspects of hodgkin-huxley neural theory[J]. Yale Journal of Biology and Medicine, 1987, 61(5): 483–484.
- [23] Zhikevich E M. Dynamical systems in neuroscience: the geometry of excitability and bursting[J]. MIT Press, 2006, 50(2): 397–401.
- [24] Fitzhugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane[J]. Biophysical Journal, 1961, 1(6): 445–466.
- [25] Li X, Wang J, Hu W. Effects of chemical synapses on the enhancement of signal propagation incoupled neurons near the canard regime[J]. Physical Review E Statistical Nonlinear and Soft MatterPhysics, 2007, 76(4): 041902.
- [26] Belykh I, Carter D, Jeter R. Synchronization in multilayer networks: When good links go bad[J/OL]. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 2019, 18(4): 2267–2302. <https://doi.org/10.1137/19M1257123>.

CONTROL SYNCHRONIZATION OF MULTILAYER FITZHUGH-NAGUMO NEURAL NETWORKS

CHENG Hui

(*School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China*)

Abstract: In this paper, we study the influence of controlling the node components of Fitzhugh-Nagumo neurons on the dynamic characteristics of neurons and the synchronization behavior of networks. By using the analysis methods of Shur complement theorem and Lyapunov stability theory, the control conditions for realizing network synchronization in single-layer network and multi-layer network are derived respectively, which generalize the theoretical research of multi-layer neural network control synchronization.

Keywords: Multilayer network; Fitzhugh-Nagumo neural network; synchronous; control

2010 MR Subject Classification: 37B25