

G - 布朗运动指数泛函的矩估计

胡鑫宇¹, 闫理坦¹, 郭梦凡²

(1. 东华大学理学院统计系, 上海 201620)

(2. 中国工商银行上海分行, 上海 200120)

摘要: 本文研究了 G - 布朗运动指数泛函的矩估计的问题. 利用拉普拉斯变换的方法, 获得了 $A_t = \int_0^t \exp(\lambda(B_s + \mu s))ds (\lambda \in \mathbb{R}^+, \mu \in \mathbb{R})$ n 阶矩的上下界. 利用对称随机游动构造 G - 布朗运动指数泛函离散化形式的方法, 推广了 $Y = \int_0^\infty \exp(B_t + \mu t)dt$ p 阶矩的上下界.

关键词: G - 布朗运动; 次线性空间; G - 正态分布; 拉普拉斯变换; 积分矩

MR(2010) 主题分类号: 60H05; 60H30

中图分类号: 0211.6

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2021)05-0440-09

1 引言

在快速发展的金融市场, 金融衍生品的定价问题一直以来都是人们关注的焦点, 其中亚式期权作为股票期权衍生的一种新式期权, 其特殊性在于它是通过相关证券在合同期间某段时间内的平均价格来决定回报, 这就既减少了合同期内价格浮动对期权定价的影响, 同时也能较为准确地反映资产价格的浮动趋势. 在经典的 Black-Scholes 期权定价模型中, 亚式期权的定价问题等价于布朗运动指数泛函的分布问题, 可以表示为以下数学形式, 若 $\tilde{B}(t)$ 为标准布朗运动

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0) \exp(\sigma \tilde{B}(t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t), t \geq 0, \sigma \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \\ A(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t S(u)du, t > 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

其中 $S(t)$ 为定价过程, $A(t)$ 为平均定价过程.

近些年来, 众多学者对布朗运动指数泛函的相关问题进行了广泛研究. Marc.Yor[1], Dufresne.Daniel[2-3] 研究了指数泛函的分布问题并将其应用于风险理论与年金问题中. Tamás.Szabados[4-6] 利用对称随机游动构造出指数泛函的离散化形式, 进一步研究其矩问题.

然而 Black-Scholes 定价公式本身的一些假设与现实存在差距. 比如金融资产价格服从对数正态分布, 且波动率为常数. 但实际上, 波动率可能是不确定的, 不一定是常数. G - 布朗运动的参数在一个区间内变化, 更加符合复杂多变的金融市场. 在不确定问题、风险测度和金融中的超套期保值问题的驱动下, 彭实戈 [7-8] 院士提出了次线性空间的概念, 这是概率

*收稿日期: 2020-10-11

接收日期: 2021-04-27

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11971101).

作者简介: 胡鑫宇 (1996-), 男, 江苏扬州, 研究生, 主要研究方向: 随机分析与数理金融.

通讯作者: 闫理坦 (1961-), 男, 黑龙江牡丹江, 教授, 主要研究方向: 随机分析及其应用.

空间的一个推广. G - 正态分布与 G - 布朗运动在次线性期望理论中起着正态分布与布朗运动在线性期望中相同重要的作用.

本文将布朗运动指数泛函推广至相应 G - 布朗运动的情况. 第二节中我们将首先介绍 G - 布朗运动的基本定义与相关性质. 第三节中我们将借助拉普拉斯变换, 讨论 G - 布朗运动指数泛函 $A_t = \int_0^t \exp(\lambda(B_s + \mu s))ds$ 的 n 阶矩的上下界, 其中 B_t 服从 G - 正态分布 $N(0, [\underline{\sigma}^2 t, \bar{\sigma}^2 t]) (0 < \underline{\sigma} < \bar{\sigma})$. 第四节中我们在 Tamás.Szabados[4] 的基础上, 借助对称随机游动的“扭曲与伸缩”, 构造 G - 布朗运动的近似序列, 进而推导出 $Y = \int_0^\infty \exp(B_t + \mu t)dt$ 的离散化形式 $Y_{m,n}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $Y_{m,n} \rightarrow Y_m$, $Y_m = 2^{-2m}(1 + \xi_{m1} + \xi_{m1}\xi_{m2} + \cdots + \xi_{m1}\xi_{m2}\cdots)$. 当 $m \rightarrow \infty$ 时, $Y_m \rightarrow Y$, 进而计算出 Y 的 p 阶矩的上下界.

2 预备知识

定义 2.1 令 Ω 为给定非空集合, $\mathbb{H}$ 为定义在 Ω 上的由全体实值函数组成的线性空间, 且满足 $1 \in \mathbb{H}$; 若 $X \in \mathbb{H}$, 则 $|X| \in \mathbb{H}$; 若 $\varphi \in C_{b,Lip}(\mathbb{R}^d)$, $X_i \in \mathbb{H}$, $i = 1, 2, \cdots, d$, 则有 $\varphi(X_1, X_2, \cdots, X_d) \in \mathbb{H}$. 其中 $C_{b,Lip}(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的全体有界 Lipschitz 函数的集合. 如果定义在 $\mathbb{H}$ 上的函数 $\hat{\mathbb{E}}$ 满足对任意 $X, Y \in \mathbb{H}$, 有

- (1) 单调性: 若 $X \geq Y$, 那么 $\hat{\mathbb{E}}[X] \geq \hat{\mathbb{E}}[Y]$,
- (2) 保常性: 对任意 $c \in \mathbb{R}$, 有 $\hat{\mathbb{E}}[c] = c$,
- (3) 次可加性: $\hat{\mathbb{E}}[X + Y] \leq \hat{\mathbb{E}}[X] + \hat{\mathbb{E}}[Y]$,
- (4) 正齐次性: 若 $\lambda \geq 0$, 则 $\hat{\mathbb{E}}[\lambda X] = \lambda \hat{\mathbb{E}}[X]$,

则称函数 $\hat{\mathbb{E}}$ 为次线性期望. $(\Omega, \mathbb{H}, \hat{\mathbb{E}})$ 为次线性期望空间, 其中 $\mathbb{H}$ 被看作是 Ω 上的随机变量空间.

定义 2.2 在次线性期望空间 $(\Omega, \mathbb{H}, \hat{\mathbb{E}})$ 中, 随机过程 $\{B_t, t \geq 0\} \in \mathbb{H}$ 叫做 G - 布朗运动, 如果满足以下条件

- (1) $B_0 = 0$,
- (2) 对每个 $t, s \geq 0$, 增量 $B_{t+s} - B_t$ 服从 G - 正态分布 $N(0, [\underline{\sigma}^2 s, \bar{\sigma}^2 s])$ 分布且其与 $(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_n})$ 独立, 其中 $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq t$.

G - 布朗运动满足以下性质

- (1) 对 $\xi \in \mathbb{L}^2(\Omega_t)$, 有 $\hat{\mathbb{E}}[\xi(B_T - B_t)] = 0$, $0 \leq t \leq T$,
- (2) 对 $\mathcal{B}(\Omega_t)$ 可测实值有界函数 ξ , 满足 $\hat{\mathbb{E}}[\xi^2(B_T - B_t)^2] \leq \bar{\sigma}^2(T - t)\hat{\mathbb{E}}[\xi^2]$, $0 \leq t \leq T$,
- (3) 对 $t \geq 0$, 有 $\hat{\mathbb{E}}[B_t] = \hat{\mathbb{E}}[-B_t] = 0$,
- (4) 当 $t \rightarrow \infty$ 时, B_t 拟必然 Hölder 连续, 其中 $\delta < \frac{1}{2}$.

3 A_t 的积分矩

定理 3.1 若 $\mu \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, 且 $\alpha > \varphi(\bar{\sigma}(\mu + n))$, 则有

$$\begin{aligned} n! \frac{1}{\prod_{j=0}^n (\alpha - \varphi(\underline{\sigma}(\mu + j)))} &\leq \int_0^\infty \exp(-\alpha t) \hat{\mathbb{E}}[(\int_0^t \exp(B_s) ds)^n \exp(\mu B_t)] \\ &\leq n! \frac{1}{\prod_{j=0}^n (\alpha - \varphi(\bar{\sigma}(\mu + j)))}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

证 首先对任意 $x \in \mathbb{R}$, 定义 $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$.
若 B_t 为 G - 布朗运动, 服从 G - 正态分布 $N(0, [\underline{\sigma}^2 t, \bar{\sigma}^2 t])$, 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\exp(t\varphi(\underline{\sigma}\lambda)) \leq \hat{\mathbb{E}}[\exp(\lambda B_t)] \leq \exp(t\varphi(\bar{\sigma}\lambda)), \quad (3.2)$$

若 $\tilde{B}_t$ 为标准布朗运动, 则有 $\mathbb{E}[\exp(\lambda \tilde{B}_t)] = \exp(t\varphi(\lambda))$.

接下来定义

$$\begin{aligned} \phi_{n,t}(\mu) &= \hat{\mathbb{E}}[(\int_0^t \exp(B_s) ds)^n \exp(\mu B_t)] \\ &= n! \hat{\mathbb{E}}[\int_0^t \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \cdots \int_0^{s_{n-1}} \exp(B_{s_1} + B_{s_2} + \cdots + B_{s_n} + \mu B_t) ds_1 ds_2 \cdots ds_n]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

由公式 (3.2) 可得

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbb{E}}[\exp(B_{s_1} + \cdots + B_{s_n} + \mu B_t)] \\ &= \hat{\mathbb{E}}[\exp(\mu(B_t - B_{s_1}) + (\mu + 1)(B_{s_1} - B_{s_2}) + \cdots + (\mu + n)B_{s_n})] \\ &\leq \exp(\varphi(\bar{\sigma}\mu)(t - s_1) + \varphi(\bar{\sigma}(\mu + 1))(s_1 - s_2) + \cdots + \varphi(\bar{\sigma}(\mu + n))s_n). \end{aligned} \quad (3.4)$$

将公式 (3.4) 代入公式 (3.3) 得

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \exp(-\alpha t) \phi_{n,t}(\mu) dt \\ &\leq n! \int_0^\infty \exp(-\alpha t) \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{n-1}} \exp(\varphi(\bar{\sigma}\mu)(t - s_1) + \varphi(\bar{\sigma}(\mu + 1))(s_1 - s_2) + \\ &\quad \cdots + \varphi(\bar{\sigma}(\mu + n))s_n) ds_1 \cdots ds_n dt \\ &= n! \int_0^\infty \exp(-(\alpha - \varphi(\bar{\sigma}(\mu + n)))s_n) ds_n \\ &\quad \int_{s_n}^\infty \exp(-(\alpha - \varphi(\bar{\sigma}(\mu + n - 1)))(s_n - s_{n-1})) ds_{n-1} \\ &\quad \cdots \int_{s_1}^\infty \exp(-(\alpha - \varphi(\bar{\sigma}(\mu))) (t - s_1)) dt \\ &= n! \frac{1}{\prod_{j=0}^n (\alpha - \varphi(\bar{\sigma}(\mu + j)))}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

由公式 (3.5) 可知, 当 $\alpha > \varphi(\bar{\sigma}(\mu + n)) = \frac{\bar{\sigma}^2(\mu+n)^2}{2}$ 时, 公式 (3.1) 右边得证.

同理当 $\alpha > \varphi(\underline{\sigma}(\mu + n)) = \frac{\underline{\sigma}^2(\mu+n)^2}{2}$ 时, 公式 (3.1) 左边得证.

定理 3.2 若 $\mu \geq 0, n \in \mathbb{N}$, 且 $t \geq 0$, 则有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[p_n^{(\mu)}(\exp(\underline{\sigma}\tilde{B}_t)) \exp(\underline{\sigma}\mu\tilde{B}_t)] &\leq \hat{\mathbb{E}}[(\int_0^t \exp(B_s) ds)^n \exp(\mu B_t)] \\ &\leq \mathbb{E}[P_n^{(\mu)}(\exp(\bar{\sigma}\tilde{B}_t)) \exp(\bar{\sigma}\mu\tilde{B}_t)]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中

$$\begin{aligned} P_n^\mu(z) &= n! \sum_{j=0}^n C_j^{(\mu)} z^j, \quad C_j^{(\mu)} = \prod_{\substack{k \neq j \\ 0 \leq k \leq n}} (\varphi(\bar{\sigma}(\mu + j)) - \varphi(\bar{\sigma}(\mu + k)))^{-1}, \\ p_n^{(\mu)}(z) &= n! \sum_{j=0}^n c_j^{(\mu)} z^j, \quad c_j^{(\mu)} = \prod_{\substack{k \neq j \\ 0 \leq k \leq n}} (\varphi(\underline{\sigma}(\mu + j)) - \varphi(\underline{\sigma}(\mu + k)))^{-1}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

证

$$\frac{1}{\prod_{j=0}^n (\alpha - \varphi(\bar{\sigma}(\mu + j)))} = \sum_{j=0}^n C_j^{(\mu)} \frac{1}{(\alpha - \varphi(\bar{\sigma}(\mu + j)))}. \quad (3.8)$$

将公式 (3.8) 代入公式 (3.5) 得到

$$\int_0^\infty \exp(-\alpha t) \phi_{n,t}(\mu) dt \leq n! \sum_{j=0}^n C_j^{(\mu)} \int_0^\infty \exp(-\alpha t) \exp(\varphi(\bar{\sigma}(\mu + j))t) dt. \quad (3.9)$$

从而可以推出

$$\begin{aligned} \phi_{n,t}(\mu) &\leq n! \sum_{j=0}^n C_j^{(\mu)} \exp(\varphi(\bar{\sigma}(\mu + j))t) = n! \sum_{j=0}^n C_j^{(\mu)} \mathbb{E}[\exp(\bar{\sigma}j\tilde{B}_t) \exp(\bar{\sigma}\mu\tilde{B}_t)] \\ &= \mathbb{E}[P_n^{(\mu)}(\exp(\bar{\sigma}\tilde{B}_t)) \exp(\bar{\sigma}\mu\tilde{B}_t)]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

同理可得

$$\mathbb{E}[p_n^{(\mu)}(\exp(\underline{\sigma}\tilde{B}_t)) \exp(\underline{\sigma}\mu\tilde{B}_t)] \leq \phi_{n,t}(\mu). \quad (3.11)$$

定理 3.3 若 $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, 且 $t \geq 0$, 则有

$$\frac{\mathbb{E}[P_n(\exp(\underline{\sigma}\lambda\tilde{B}_t))]}{\underline{\sigma}^{2n}} \leq \lambda^{2n} \hat{\mathbb{E}}[(\int_0^t \exp(\lambda B_s) ds)^n] \leq \frac{\mathbb{E}[P_n(\exp(\bar{\sigma}\lambda\tilde{B}_t))]}{\bar{\sigma}^{2n}},$$

其中 $P_n(z) = 2^n(-1)^n \{ \frac{1}{n!} + 2 \sum_{j=1}^n \frac{n!(-z)^j}{(n-j)!(n+j)!} \}$.

证 对公式 (3.6), 取 $\mu = 0$, 且将 B_s 替换为 λB_s , 则有

$$\hat{\mathbb{E}}[(\int_0^t \exp(\lambda B_s) ds)^n] \leq \mathbb{E}[P_n^{(0)}(\exp(\bar{\sigma}\lambda\tilde{B}_t))], \quad (3.12)$$

其中 $P_n^{(0)}(z) = n! \sum_{j=0}^n C_j^{(0)} z^j$, $C_j^{(0)} = \prod_{\substack{k \neq j \\ 0 \leq k \leq n}} (\varphi(\bar{\sigma}\lambda j) - \varphi(\bar{\sigma}\lambda k))^{-1}$.

当 $j = 0$ 时,

$$C_0^{(0)} = \frac{2^n(-1)^n}{\bar{\sigma}^2 \lambda^2 (n!)^2}.$$

当 $1 \leq j \leq n$ 时,

$$C_j^{(0)} = \prod_{\substack{k \neq j \\ 0 \leq k \leq n}} \left(\frac{\bar{\sigma}^2 \lambda^2 j^2 - \bar{\sigma}^2 \lambda^2 k^2}{2} \right)^{-1} = \prod_{\substack{k \neq j \\ 0 \leq k \leq n}} \frac{2^n (-1)^n}{\bar{\sigma}^2 \lambda^2 (k-j)(k+j)} = \frac{2^n (-1)^{n-j} 2}{\bar{\sigma}^{2n} \lambda^{2n} (n-j)!(n+j)!}.$$

进而可得

$$\mathbb{E}[P_n^{(0)}(\exp(\bar{\sigma} \lambda \tilde{B}_t))] = \frac{2^n (-1)^n}{\bar{\sigma}^{2n} \lambda^{2n}} \left\{ \frac{1}{n!} + 2 \sum_{j=1}^n \frac{n! (-\mathbb{E}(\bar{\sigma} \lambda \tilde{B}_t))^j}{(n-j)!(n+j)!} \right\}. \quad (3.13)$$

记 $P_n(z) = 2^n (-1)^n \left\{ \frac{1}{n!} + 2 \sum_{j=1}^n \frac{n! (-z)^j}{(n-j)!(n+j)!} \right\}$, 代入公式 (3.12) 可得

$$\lambda^{2n} \hat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^t \exp(\lambda B_s) ds \right)^n \right] \leq \frac{\mathbb{E}[P_n(\exp(\lambda \tilde{B}_t))]}{\bar{\sigma}^{2n}}. \quad (3.14)$$

同理可得

$$\frac{\mathbb{E}[P_n(\exp(\underline{\sigma} \lambda \tilde{B}_t))]}{\underline{\sigma}^{2n}} \leq \lambda^{2n} \hat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^t \exp(\lambda B_s) ds \right)^n \right]. \quad (3.15)$$

定理 3.4 若 $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, 且 $t \geq 0$, 则有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[p_n^{(\nu, \mu)}(\exp(\underline{\sigma} \tilde{B}_t + \mu t)) \exp(\nu(\underline{\sigma} \tilde{B}_t + \mu t))] &\leq \hat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^t \exp(B_s + \mu s) ds \right)^n \exp(\nu(B_t + \mu t)) \right] \\ &\leq \mathbb{E}[P_n^{(\nu, \mu)}(\exp(\bar{\sigma} \tilde{B}_t + \mu t)) \exp(\nu(\bar{\sigma} \tilde{B}_t + \mu t))]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

证 记

$$\phi_{n,t}(\nu, \mu) = \hat{\mathbb{E}} \left[\left(\int_0^t \exp(B_s + \mu s) ds \right)^n \exp(\nu(B_t + \mu t)) \right]. \quad (3.17)$$

结合定理 3.1 可推出

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \exp(-\alpha t) \phi_{n,t}(\nu) dt &\leq n! \frac{1}{\prod_{j=0}^n (\alpha - \varphi(\bar{\sigma}(\nu + j)) - \mu(\nu + j))} \\ &= n! \sum_{j=1}^n C_j^{(\nu, \mu)} \int_0^\infty \exp(-\alpha t) \exp(\varphi(\bar{\sigma}(\nu + j))t + \mu(\nu + j)t) dt, \end{aligned} \quad (3.18)$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{1}{\prod_{j=0}^n (\alpha - \varphi(\bar{\sigma}(\nu + j)) - \mu(\nu + j))} &= \sum_{j=0}^n C_j^{(\nu, \mu)} \frac{1}{\alpha - \varphi(\bar{\sigma}(\nu + j)) - \mu(\nu + j)}, \\ C_j^{(\nu, \mu)} &= \prod_{\substack{k \neq j \\ 0 \leq k \leq n}} (\varphi(\bar{\sigma}(\nu + \frac{\mu}{\bar{\sigma}^2} + j)) - \varphi(\bar{\sigma}(\nu + \frac{\mu}{\bar{\sigma}^2} + k)))^{-1}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

进而将公式 (3.19) 代入公式 (3.18) 可推出

$$\begin{aligned}
 \phi_{n,t}(\nu, \mu) &\leq n! \sum_{j=0}^n C_j^{(\nu, \mu)} \exp(\varphi(\bar{\sigma}(\nu + j))t + \mu(\nu + j)t) \\
 &= n! \sum_{j=0}^n C_j^{(\nu, \mu)} \mathbb{E}[\exp(j(\bar{\sigma}\tilde{B}_t + \mu t)) \exp(\nu(\bar{\sigma}\tilde{B}_t + \mu t))] \\
 &= \mathbb{E}[P_n^{(\nu, \mu)}(\exp(\bar{\sigma}\tilde{B}_t + \mu t)) \exp(\nu(\bar{\sigma}\tilde{B}_t + \mu t))], \\
 P_n^{(\nu, \mu)}(z) &= n! \sum_{j=0}^n C_j^{(\nu, \mu)} z^j.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

同理可得

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[p_n^{(\nu, \mu)}(\exp(\underline{\sigma}\tilde{B}_t + \mu t)) \exp(\nu(\underline{\sigma}\tilde{B}_t + \mu t))] &\leq \phi_{n,t}(\nu, \mu), \\
 p_n^{(\nu, \mu)}(z) &= n! \sum_{j=0}^n c_j^{(\nu, \mu)} z^j, \\
 c_j^{(\nu, \mu)} &= \prod_{\substack{k \neq j \\ 0 \leq k \leq n}} (\varphi(\underline{\sigma}(\nu + \frac{\mu}{\underline{\sigma}^2} + j)) - \varphi(\underline{\sigma}(\nu + \frac{\mu}{\underline{\sigma}^2} + k)))^{-1}.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

定理 3.5 若 $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, 且 $t \geq 0$, 则有

$$\mathbb{E}[p_n^*(\exp(\lambda(\underline{\sigma}\tilde{B}_t + \mu t)))] \leq \hat{\mathbb{E}}[(\int_0^t \exp(\lambda(B_s + \mu s))ds)^n] \leq \mathbb{E}[P_n^*(\exp(\lambda(\bar{\sigma}\tilde{B}_t + \mu t)))] \tag{3.22}$$

证 对定理 3.4, 取 $\nu = 0$, 将 $B_s + \mu s$ 替换为 $\lambda(B_s + \mu s)$, 则有

$$\begin{aligned}
 &\hat{\mathbb{E}}[(\int_0^t \exp(\lambda(B_s + \mu s))ds)^n] \\
 &\leq \left\{ \frac{n!2^n(-1)^n}{(\bar{\sigma}^2\lambda^2)^n \prod_{i=1}^n (\frac{2\mu}{\bar{\sigma}^2} + i)n!} + \frac{n!2^n(-1)^{n-j}}{(\bar{\sigma}^2\lambda^2)^n} \sum_{j=1}^n \frac{(\frac{2\mu}{\bar{\sigma}^2} + 2j) \prod_{i=1}^j (\frac{2\mu}{\bar{\sigma}^2 + i - 1})}{\prod_{i=1}^j (\frac{2\mu}{\bar{\sigma}^2} + n + i)!(j-1)!(n-j)!} \right\} \\
 &\exp(\frac{\lambda^2\bar{\sigma}^2 j^2 t}{2}) \exp(\lambda\mu j t).
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

记

$$\begin{aligned}
 P_n^*(z) &= \left\{ \frac{n!2^n(-1)^n}{(\bar{\sigma}^2\lambda^2)^n \prod_{i=1}^n (\frac{2\mu}{\bar{\sigma}^2} + i)n!} + \frac{n!2^n(-1)^{n-j}}{(\bar{\sigma}^2\lambda^2)^n} \sum_{j=1}^n \frac{(\frac{2\mu}{\bar{\sigma}^2} + 2j) \prod_{i=1}^j (\frac{2\mu}{\bar{\sigma}^2 + i - 1})}{\prod_{i=1}^j (\frac{2\mu}{\bar{\sigma}^2} + n + i)!(j-1)!(n-j)!} \right\} z^j, \\
 p_n^*(z) &= \left\{ \frac{n!2^n(-1)^n}{(\underline{\sigma}^2\lambda^2)^n \prod_{i=1}^n (\frac{2\mu}{\underline{\sigma}^2} + i)n!} + \frac{n!2^n(-1)^{n-j}}{(\underline{\sigma}^2\lambda^2)^n} \sum_{j=1}^n \frac{(\frac{2\mu}{\underline{\sigma}^2} + 2j) \prod_{i=1}^j (\frac{2\mu}{\underline{\sigma}^2 + i - 1})}{\prod_{i=1}^j (\frac{2\mu}{\underline{\sigma}^2} + n + i)!(j-1)!(n-j)!} \right\} z^j.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

进而可得

$$\mathbb{E}[p_n^*(\exp(\lambda(\underline{\sigma}\tilde{B}_t + \mu t)))] \leq \hat{\mathbb{E}}[(\int_0^t \exp(\lambda(B_s + \mu s))ds)^n] \leq \mathbb{E}[P_n^*(\exp(\lambda(\bar{\sigma}\tilde{B}_t + \mu t)))] \quad (3.25)$$

4 Y 的矩估计

参考 Tamás.Szabados[5] 提出的方法, 我们可以借助“扭曲与收缩”对称随机游动来定义标准布朗运动的一种近似序列, 即将单位一的步长压缩至 $1/2^m, m = 1, 2, \dots$, 对应完成该步长的时间被压缩至 $1/2^{2m}, m = 1, 2, \dots$. 接下来我们将简述这一方法.

定义序列 $\{\tilde{S}_m(k), k \geq 0\}$ 满足以下条件

$$\begin{aligned} \tilde{S}_m(0) &= 0, \tilde{S}_m(n) = \tilde{X}_m(1) + \tilde{X}_m(2) + \dots + \tilde{X}_m(n), n \geq 1, \\ \tilde{S}_m(t) &= \tilde{S}_m(n) + (t - n)\tilde{X}_m(n+1), n \leq t < n+1. \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中 $\tilde{X}_m(k), m \geq 0, k \geq 1$ 是独立同分布随机游动且满足

$$\mathbb{E}(\tilde{X}_m(k)) = 0, \mathbb{D}(\tilde{X}_m(k)) = 1, \mathbb{P}(\tilde{X}_m(k) = \pm 1) = \frac{1}{2}.$$

接下来可以定义标准布朗运动 $\tilde{B}_t$ 的 m 阶近似序列

$$\tilde{B}_m(t) = 2^{-m}\tilde{S}_m(t2^{2m}), t \geq 0, \quad (4.2)$$

即 $\tilde{B}_m(t)$ 为标准布朗运动 $\tilde{B}_t$ 在时刻 $j/2^m, j = 1, 2, \dots$ 的一个“分割模型”.

引理 4.1 定义序列 $\tilde{Y}_m = 2^{-2m}(\sum_{k=0}^{\infty} \exp(2^{-m}\tilde{S}_m(k) + \mu k 2^{-2m}))$, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, $\tilde{Y}_m$ 几乎处处收敛于 $\tilde{Y} = \int_0^{\infty} \exp(\tilde{B}_t + \mu t)dt$.

参考 [7] 注释 3.4 知存在序列 $X_m(k)$ 服从 G -正态分布 $N(0, [\underline{\sigma}^2, \bar{\sigma}^2])$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_i^n X_m(i)$ 依分布收敛于 X , X 服从 G -正态分布 $N(0, [\sigma^2, \bar{\sigma}^2])$. 从而可推出序列 $\{S_m(k), k \geq 0\}$ 满足以下条件

$$\begin{aligned} S_m(0) &= 0, S_m(n) = X_m(1) + X_m(2) + \dots + X_m(n), n \geq 1, \\ S_m(t) &= S_m(n) + (t - n)X_m(n+1), n \leq t < n+1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

$\{B_m(t) = 2^{-m}S_m(t2^{2m}), t \geq 0\}$ 为 G -布朗运动 B_t 的 m 阶近似序列.

推论 4.2 定义序列 $Y_m = 2^{-2m}(\sum_{k=0}^{\infty} \exp(2^{-m}S_m(k) + \mu k 2^{-2m}))$, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, Y_m 几乎处处收敛于 $Y = \int_0^{\infty} \exp(B_t + \mu t)dt$, 进而我们完成了 G -布朗运动指数泛函离散化形式的构造.

定理 4.3 对任意正整数 p , 当 $\mu < -\frac{\bar{\sigma}^2}{2}p$ 时, $\hat{\mathbb{E}}(Y_m^p) = \frac{1}{1 - \hat{\mathbb{E}}(\xi_m^p)} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} 2^{-2m(p-k)} \hat{\mathbb{E}}(\xi_m^k) \mathbb{E}(Y_m^k)$.

证 对任意 $m \geq 0, n \geq 1$, 定义序列 $Y_{m,n}$ 满足 $Y_{m,n} = 2^{-2m} \sum_{k=0}^n \exp(2^{-m}S_m(k) + \mu k 2^{-2m}) = 2^{-2m}(1 + \xi_{m1} + \xi_{m1}\xi_{m2} + \dots + \xi_{m1}\xi_{m2} \dots \xi_{mn})$, 其中 $Y_{m,0} = 2^{-2m}, \xi_{mj} =$

$\exp(2^{-m}X_m(j) + \mu 2^{-2m})$. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $Y_{m,n} \rightarrow Y_m$, $Y_m = 2^{-2m}(1 + \xi_{m1} + \xi_{m1}\xi_{m2} + \cdots + \xi_{m1}\xi_{m2}\cdots)$, 且 Y_m 满足分布自相似性

$$Y_m \stackrel{d}{=} 2^{-2m} + \xi_m Y_m, \quad (4.4)$$

$\xi_m \stackrel{d}{=} \xi_{m1}$, 且 ξ_m 与 Y_m 相互独立, 其中 $\stackrel{d}{=}$ 表示同分布. 对任意 $m \geq 0$, k 为整数

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{E}}(\xi_m^k) &= \hat{\mathbb{E}}(\exp(2^{-m}kX_m(1) + \mu k 2^{-2m})) \\ &\leq \exp\left(\frac{\bar{\sigma}^2 k^2 2^{-2m}}{2}\right) \exp(\mu k 2^{-2m}) = \exp(k 2^{-2m}(\frac{\bar{\sigma}^2}{2}k + \mu)). \end{aligned} \quad (4.5)$$

当 $\frac{\bar{\sigma}^2}{2}k + \mu < 0$, 即 $\mu < -\frac{\bar{\sigma}^2}{2}k$ 时, $\hat{\mathbb{E}}(\xi_m^k) < 1$. 当 $m \rightarrow \infty$ 时, 由 $\exp(x) = 1 + x + o(x)$ 可得

$$\hat{\mathbb{E}}(\xi_m^k) < 1 + k 2^{-2m}(\frac{\bar{\sigma}^2}{2}k + \mu) + o(2^{-2m}). \quad (4.6)$$

当 $\hat{\mathbb{E}}(\xi_m^p) < 1$, $p \geq 1$ 时, 对公式 (4.4) 两边取 p 阶矩可得

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{E}}(Y_m^p) &= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} 2^{-2m(p-k)} \hat{\mathbb{E}}(\xi_m^k) \hat{\mathbb{E}}(Y_m^k) + \hat{\mathbb{E}}(\xi_m^p) \hat{\mathbb{E}}(Y_m^p), \\ \hat{\mathbb{E}}(Y_m^p) &= \frac{1}{1 - \hat{\mathbb{E}}(\xi_m^p)} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} 2^{-2m(p-k)} \hat{\mathbb{E}}(\xi_m^k) \hat{\mathbb{E}}(Y_m^k). \end{aligned} \quad (4.7)$$

定理 4.4 对任意正整数 p , 当 $\mu < -\frac{\bar{\sigma}^2}{2}p$ 时, $\frac{1}{\prod_{k=1}^p -(\frac{\bar{\sigma}^2}{2}k + \mu)} < \lim_{m \rightarrow \infty} \hat{\mathbb{E}}(Y_m^p) < \frac{1}{\prod_{k=1}^p -(\frac{\bar{\sigma}^2}{2}k + \mu)} < \infty$.

证 由公式 (4.6) 知, 当 $m \rightarrow \infty$ 时

$$\hat{\mathbb{E}}(\xi_m^p) \leq \exp(p 2^{-2m}(\frac{\bar{\sigma}^2}{2}p + \mu)) \leq 1 + p 2^{-2m}(\frac{\bar{\sigma}^2}{2}p + \mu) + o(2^{-2m}). \quad (4.8)$$

进而可得

$$\frac{1}{1 - \hat{\mathbb{E}}(\xi_m^p)} < \frac{1}{-p 2^{-2m}(\frac{\bar{\sigma}^2}{2}p + \mu)}, \quad (4.9)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{\mathbb{E}}(\xi_m^k) = 1, \quad 0 \leq k \leq p-2,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\binom{p}{k} 2^{-2m(p-k)}}{p 2^{-2m}} = 0. \quad (4.10)$$

将 (4.8)–(4.10) 式代入公式 (4.7) 可得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{\mathbb{E}}(Y_m^p) < \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{-(\frac{\bar{\sigma}^2}{2}p + \mu)} \hat{\mathbb{E}}(Y_m^{p-1}). \quad (4.11)$$

进而通过迭代可得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{\mathbb{E}}(Y_m^p) < \frac{1}{\prod_{k=1}^p -(\frac{\bar{\sigma}^2}{2}k + \mu)} < \infty.$$

同理当 $m \rightarrow \infty$ 时, $\hat{\mathbb{E}}(\xi_m^p) > 1 + p2^{-2m}(\frac{\sigma^2}{2}p + \mu) + o(2^{2m})$, 可得

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^p -(\frac{\sigma^2}{2}k + \mu)} < \lim_{m \rightarrow \infty} \hat{\mathbb{E}}(Y_m^p).$$

参 考 文 献

- [1] Yor M. On Some Exponential functionals of brownian motion[M]. Heidelberg: Springer, 1992.
- [2] Dufresne D. The distribution of a perpetuity, with applications to risk theory and pension funding[J]. Scandinavian Actuarial Journal, 1990, 1990(1): 39–79.
- [3] Dufresne D. An affine property of the reciprocal Asian option process[J]. Osaka Journal of Mathematics, 2001, 38(2): 379–381.
- [4] Tamás S, Balázs S. An exponential functional of random walks[J]. Journal of Applied Probability, 2003, 40(2): 413–426.
- [5] Tamás S. An elementary introduction to the Wiener process and stochastic, integrals[J]. Studia entiarum Mathematicarum Hungarica, 2010, 31(1): 249–297.
- [6] Tamás S, Balázs S. Moments of an exponential functional of random walks and permutations with given descent sets[J]. Periodica Mathematica Hungarica, 2004, 49(1): 131–139.
- [7] Peng S. Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty[M]. Heidelberg: Springer, 2019.
- [8] Peng S. Law of large numbers and central limit theorem under nonlinear expectations[J]. Probability, Uncertainty and Quantitative Risk, 2019, 4(1): 1–8.

THE MOMENTS OF EXPONENTIAL FUNCTIONAL OF G-BROWNIAN MOTION

HU Xin-yu¹, YAN Li-tan¹, GUO Meng-fan²

(1. Department of Statistics, College of Science, Donghua University, Shanghai 201620, China)

(2. Industrial and Commercial Bank of China, Shanghai Branch, Shanghai 200120, China)

Abstract: In this note, we investigate the exponential functional of G -Brownian Motion. Based on the Laplace transform, we derive the upper bound and lower bound of $A_t = \int_0^t \exp(\lambda(B_s + \mu s))ds$, ($\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\mu \in \mathbb{R}$). With the help of suitable symmetric random walks, we construct the approximation to G -Brownian Motion, then generalize the upper bound and lower bound of moments of $Y = \int_0^\infty \exp(B_t + \mu t)dt$.

Keywords: G -Brownian motion; nonlinear expectation space; G -normal distribution; laplace transform; integral moments

2010 MR Subject Classification: 60H05; 60H30