Vol. 41 (2021)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

Sturm-Liouville 算子的一维奇异扰动的逆特征值问题

吴雪雯

(西北工业大学数学与统计学院, 陕西 西安 710072)

摘 要: 本文研究了 Sturm-Liouville 算子的一维奇异扰动的逆特征值的问题. 利用 Sturm-Liouville 算子的逆谱理论中的方法, 获得了由 Sturm-Liouville 算子及其一维扰动的谱可以重构势函数的结果, 推广了实数列成为扰动后算子的谱的充要条件的结论.

关键词: 逆问题; Sturm-Liouville 算子; 一维扰动

MR(2010) 主题分类号: 34L05; 34A55 **中图分类号**: O175.1

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2021)05-0435-05

1 引言

考虑方程

$$Ly := -y'' + q(x)y + \delta(x)\int_0^1 \delta(x)y dx = \lambda y \tag{1.1}$$

带有边值条件

$$y'(0) = y(1) = 0 \tag{1.2}$$

其中 $q(x) \in L^2(0,1)$, $\delta(x)$ 是狄拉克函数. 这里算子 L 是自伴的并且是 Sturm-Liouville 算子 $L_0 y := -y'' + q(x)y$ 带有边值条件 (1.2) 的一个一维奇异扰动. 由文献 [1] 知, 算子 L_0 在 $L^2(0,1)$ 上是自伴的且下半有界, 它的谱由特征值组成.

本文的目的是通过运用 Sturm-Liouville 算子的逆谱理论 (见文献 [1]), 由算子 L_0 及 L 的谱重构 (1.1) 中的势函数 $q(x)$. 然而, 方程 (1.1) 的初值问题无法直接解出. 结合文献 [2] 中的方法, 我们研究的逆问题可以由 Sturm-Liouville 算子的逆谱理论有效地解决.

Sturm-Liouville 算子的一维扰动的谱问题 [2–5] 中已有所研究. 关于逆问题, 扰动项是属于 $L^2(0,1)$ 中函数的算子已被考虑过, 例如文献 [6, 7]. 由文献 [2], 我们知道扰动项的函数可以为奇异函数. 我们的文章考虑的算子 L_0 的扰动项是 $\delta(x)$. 通过运用文献 [2] 中的方法, 我们得到了算子 L 的特征值函数, 这为我们之后考虑的逆问题提供了一个必要的准备. 关于其它的 Sturm-Liouville 算子的一维扰动的逆问题, 见文献 [8, 9].

本文的主要结论是, 已知算子 L_0 的谱为 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, 如果一列实数列 $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足一个交替性质及渐近式, 则存在势函数 $q(x)$ 使得算子 L 的谱是 $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$. 下一节我们将陈述这个主要结论及证明, 并且给出重构 $q(x)$ 的具体算法.

2 预备知识

首先我们提及一些需要用到的预备知识, 参见文献 [2, P8–10].

*收稿日期: 2020-09-28 接收日期: 2021-04-14

作者简介: 吴雪雯 (1991–), 女, 辽宁, 博士, 主要研究方向: 谱与反谱理论.

引入关于算子 L_0 的如下的线性赋范空间 $H_{\pm 1}(L_0)$. 定义 $H_{+1}(L)$ 是 $D(L^{1/2})$ 以

$$||\varphi||_{H_{+1}} = ||(L_0+1)^{1/2}\varphi||_{L^2(0,1)}$$

为范数的线性赋范空间, 易知, $H_{+1}(L_0)$ 是完备的; $H_{-1}(L)$ 是 $L^2(0,1)$ 以

$$||\varphi||_{H_{-1}} = ||(L_0+1)^{-1/2}\varphi||_{L^2(0,1)}$$

为范数后完备化得到的线性赋范空间. $H_{+1}(L_0)$ 和 $H_{-1}(L_0)$ 是对偶的, ϕ 在 $H_{+1}(L_0)$ 中的对偶函数 η 由 $l_\phi(\eta) = \int_0^1 \phi(x)\eta(x)dx$ 给出.

由 Sobolev 估计我们得到, 对于任意函数 $y \in H_{+1}(L_0)$ 有

$$|y(0)|^2 \le c(y,(L_0+1)y),$$

即 $\delta(x) \in H_{-1}(L_0)$. 令 b 是 $H_{+1}(L_0)$ 上的二次型, 定义如下

$$b(\eta_1,\eta_2) = \overline{\eta_1(0)}\eta_2(0).$$

我们便可得到由 $L_0 + b$ 作为二次型且满足 $H_{\pm 1}(L) = H_{\pm 1}(L_0)$ 的自伴算子 L, 我们将算子 L 记为 (1.1) 的形式.

如果 Δ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界子区间,$E_\Delta(L_0)$ 是 $H_{-1}(L_0)$ 到 $H_{+1}(L_0)$ 上 L_0. 的谱映射, 那么我们能定义一个如下的谱测度:

$$\mu_{L_0}(\Delta) = (\delta, E_\Delta(L_0)\delta).$$

令

$$F(z) = (\delta,(L_0-z)^{-1}\delta) \equiv \int \frac{d\mu_{L_0}(x)}{x-z}. \tag{2.1}$$

3 主要结论及其证明

在下面的引理中, 我们将给出算子 L 的谱及特征值函数.

引理 2.1 算子 L 的谱由简单的实特征值 $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ 组成. 算子 L 的特征值函数是

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda)(F(\lambda+i0)+1), \tag{3.1}$$

其中 $\Delta_0(\lambda)$ 是算子 L_0 的特征值函数.

证 由 (2.1) 和 [1,p15] 知,

$$F(z) = G(0,0,z) \tag{3.2}$$

其中 $G(x,y,z)$ 是 L_0 的 Green 函数. 由 [1, p15,p29], $G(0,0,z)$ 是算子 L_0 的 Weyl 函数并且是有简单极点的亚纯函数, 其极点为 $z=\lambda_n$, $n \ge 0$. 对于 $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, 有

$$F(\lambda+i0) = F(\lambda)$$

和

$$\frac{dF(\lambda+i0)}{d\lambda} = \int \frac{d\mu(y)}{(\lambda-y)^2} < \infty. \tag{3.3}$$

值得注意的是 L_0 的谱由简单的实特征值 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ 组成. 再由 [2] 中的定理 I.6, 有

$$\mathrm{Im}F(\lambda+i0)=\begin{cases}\infty,\lambda\in\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty},\\ 0,\lambda\in\mathbb{R}\backslash\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty},\end{cases}$$

因此, 由 (6) 和 [2] 中的定理 II.2, L 的谱由实特征值 $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ 组成并且

$$\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}=\{\lambda\in\mathbb{R}|F(\lambda+i0)+1=0\}. \tag{3.4}$$

(3.3) 意味着 $F(\lambda+i0)$ 在 $\mathbb{R}\backslash\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ 上是单调递增的. 再由文献 [1,p29-30], 有

$$\lim_{\lambda\to\lambda_n^-}F(\lambda+i0)=+\infty, \tag{3.5}$$

$$\lim_{\lambda\to\lambda_n^+}F(\lambda+i0)=-\infty \tag{3.6}$$

和

$$\lim_{\lambda\to-\infty}F(\lambda+i0)=0. \tag{3.7}$$

因此, $F(\lambda+i0)+1$ 在 $(-\infty,\lambda_0)$ 上没有零点且在 $(\lambda_n,\lambda_{n+1})$ 上恰有一个零点. 这就意味着

$$\lambda_n<\mu_n<\lambda_{n+1}, \tag{3.8}$$

即算子 L 的特征值是简单的. 因此, 由 (3.4), 要证明 $\Delta(\lambda)$ 是算子的特征值函数即证明 $\Delta(\lambda)=0$ 当且仅当 $F(\lambda+i0)+1=0$.

易知, $F(\lambda+i0)+1=0\Rightarrow\Delta(\lambda)=0$. 下面我们证明 $\Delta(\lambda)=0\Rightarrow F(\lambda+i0)+1=0$. 假设 $\Delta(x_0)=0$, $x_0\in\mathbb{R}$. 如果 $F(x_0+i0)+1\neq0$, 则 $\Delta_0(x_0)=0$, 即, $x_0=\lambda_k,k\geq0$. 由 [1] 中的定理 1.1.2, $\Delta_0(\lambda)$ 的零点是简单的, 有

$$\dot{\Delta}_0(\lambda_k)\neq0.$$

其中 $\dot{\Delta}_0=\frac{d\Delta_0(\lambda)}{d\lambda}$. 由假设 $\Delta(x_0)=0$, 我们有

$$\frac{\Delta(\lambda_k)}{\dot{\Delta}_0(\lambda_k)}=0. \tag{3.9}$$

由 [1] 中的定理 1.4.6, $\frac{\dot{\Delta}_0(\lambda_k)}{\Delta(\lambda_k)}$ 是 [1] 中 (1.1.17) 定义的权数且不能是无穷, 这与 (3.9) 矛盾. 我们有 $F(x_0+i0)+1=0$, 引理得证. 本文的主要结论如下:

定理 2.2 令 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 L_0 的谱. 一列实数列 $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ 成为算子 L 的谱的充要条件是 (3.8) 和

$$\sqrt{\mu_n}=(\frac{1}{2}+n)\pi+\frac{\int_0^1q(\tau)d\tau-2}{2n\pi}+\frac{\kappa_n}{n},\kappa_n\in l_2. \tag{3.10}$$

成立.

证 必要性 令 $s=\sqrt{\lambda}=\alpha+\beta i$ 并且 $\beta>0$. 由引理 2.1, 定义如 (3.1) 的 $\Delta(\lambda)$ 是算子 L 的特征值函数. 由 (3.2) 和文献 [1] 中的定理 1.1.3, 我们得到如下 $\Delta(\lambda)$ 渐近式

$$\Delta(\lambda)=\cos s-\frac{\sin s}{s}+\frac{1}{s}\int_0^1q(\tau)\sin\{s(1-\tau)\}\cos s\tau d\tau+O(\frac{\exp(|\beta|)}{s^2}). \tag{3.11}$$

由 Rouche 定理, 对于充分大的 n, 在 $\Gamma_n(\varepsilon)=\{\rho:|\rho-(\frac{\pi}{2}+n\pi)|\le\varepsilon\}$ 中恰好存在 $\Delta(\lambda)$ 的一个零点, 记为 $s_n=\sqrt{\mu_n}$. 因为 $\varepsilon>0$ 是任意的, 有

$$s_n=\frac{\pi}{2}+n\pi+\varepsilon_n,\ \varepsilon_n=o(1),n\to\infty. \tag{3.12}$$

将 (3.12) 代入到 (3.11) 中得到

$$(\frac{\pi}{2}+n\pi+\varepsilon_n)\cos(\frac{\pi}{2}+n\pi+\varepsilon_n)+(\frac{1}{2}\int_0^1 q(\tau)d\tau-1)\sin(\frac{\pi}{2}+n\pi+\varepsilon_n)+\kappa_n=0,\kappa_n\in l_2. \tag{3.13}$$

则 $\varepsilon_n=O(\frac{1}{n})$. 再由 (3.13), 我们得到

$$\varepsilon_n=\frac{\int_0^1 q(\tau)d\tau-2}{2n\pi}+\frac{\kappa_n}{n},$$

即 (3.10) 成立. 进一步用文献 [1] 中定理 1.1.4 的相同的方法, 得到

$$\Delta(\lambda)=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\mu_n}{(\frac{\pi}{2}+n\pi)^2}(1-\frac{\lambda}{\mu_n}). \tag{3.14}$$

充分性 由已知数列 $\{\lambda_n,\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$, 我们构造如下函数 $w(\lambda)$ 通过

$$w(\lambda)=\frac{\Delta(\lambda)}{\Delta_0(\lambda)},$$

其中 $\Delta(\lambda)$ 由 (3.14) 得到并且

$$\Delta_0(\lambda)=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_n}{(\frac{\pi}{2}+n\pi)^2}(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}).$$

由 (3.10)), 易知, 对于固定的 λ, $\Delta(\lambda)$ 收敛. 由文献 [1] 中的定理 1.1.4, $\Delta_0(\lambda)$ 是算子 L_0 的特征值函数. 由 (3.8) 和文献 [10] 中的定理 2.1, 函数 $w(\lambda)$ 是 Herglotz 函数. 由文献 [10] 中的 Herglotz 表示定理, $w(\lambda)$ 有如下表达式

$$w(\lambda)=1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda-\lambda_n},$$

并且 a_n 可由如下公式计算得到

$$a_n=\frac{\Delta(\lambda_n)}{\dot{\Delta}_0(\lambda_n)},$$

其中 $\dot{\Delta}_0(\lambda)=\frac{d\Delta_0(\lambda)}{d\lambda}$.

由文献 [1] 中的定理 1.5.2, 我们需要找到 $\frac{1}{a_n}$ 的渐近式. 由渐近式 (3.10) 和文献 [1] 中的定理 1.5.2, 存在一个算子 $\tilde{L}_0y:=-y''+q_0(x)y(q_0(x)\in L^2(0,1)$ 并且 $q_0(x)$ 不唯一. 带有边值条件 $y'(0)+y(0)=y(1)=0$ 使得算子 $\tilde{L}_0$ 的谱是 $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$, 则 $\Delta(\lambda)$ 是算子 $\tilde{L}_0$ 的特征值函数. 再由文献 [1] 中的 (1.1.15) 和 (1.1.29), 我们能得到

$$\Delta(\lambda_n)=(-1)^{n+1}+O(\frac{1}{n}).$$

由文献 [1] 中引理 1.1.1, 有 $\dot{\Delta}_0(\lambda_n)=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{2}+\frac{\kappa_{n1}}{n},\{\kappa_{n1}\}\in l_2$. 因此, 我们得到 $\frac{1}{a_n}=\frac{\pi}{2}+\frac{\kappa_{n2}}{n},\{\kappa_{n2}\}\in l_2$. 由文献 [1] 中的定理 1.5.2, 存在函数 $q(x)\in L_2(0,1)$ 使得算子 L 的谱是 $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$. 充分性得证.

参 考 文 献

[1] Freiling G, Yurko V. Inverse sturm-liouville problems and their applications[M]. New York: Nova Science Publishers. 2001.

[2] Simon B. Spectral analysis of rank one perturbations and applications[A]. Feldman J, Froese R, Rosen L M. CRM proceedings and lecture notes Vol.8[C]. Rhode Island: American Mathematical Society, 1995: 109 – 149.

[3] Bourget O, Cortes V, Rio R, Fernandez C. Resonances under rank-one perturbations[J]. Journal of Mathematical Physics, 2017, 58(9): 093502.

[4] Freitas P. A nonlocal Sturm-Liouville eigenvalue problem[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A Mathematics, 1994, 124(1): 169–188.

[5] Gesztesy F, Simon B. Rank one perturbations at infinite coupling[J]. Journal of Functional Analysis, 1995, 128(1): 245–252.

[6] Albeverio S, Hryniv R O, Nizhnik L P. Inverse spectral problems for non-local Sturm-Liouville operators[J]. Inverse Problems, 2007, 23(2): 523–535.

[7] Nizhnik L P. Inverse eigenvalue problems for nonlocal Sturm-Liouville operators[J]. Methods of Functional Analysis and Topology. 2009, 15(1): 41–47.

[8] Nizhnik L P. Inverse nonlocal Sturm-Liouville problem[J]. Inverse Problems, 2010, 26(12): 635–684.

[9] Zolotarev V A. Direct and inverse problems for an operator with nonlocal potential[J]. Russian Academy of Sciences Sbornik Mathematics, 2012, 203(12): 1785–1807.

[10] Gesztesy F, Simon B. On the determination of a potential from three spectra[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1997, 189(2): 85–92.

INVERSE EIGENVALUE PROBLEMS FOR STURM-LIOUVILLE OPERATORS WITH SINGULAR RANK ONE PERTURBATIONS

WU Xue-wen

(*School of Mathematics and Statistics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*)

Abstract: This paper is concerned with the inverse eigenvalue problem for Sturm-Liouville operators with singular rank one perturbations. The result that the potential function can be reconstructed from the spectra of a Sturm-Liouville operator and the perturbation is obtained, by applying the method in the inverse spectral theory of Sturm-Liouville differential operators. The conclusion about a necessary and sufficient condition for a sequence of real numbers to be the spectrum of the perturbation is generalized.

Keywords: inverse problem; Sturm-Liouville operator; rank one perturbation

2010 MR Subject Classification: 34L05; 34A55