

涉及分担函数的全纯函数正规规定则

许会会, 叶亚盛
(上海理工大学理学院, 上海 200093)

摘 要: 本文主要研究全纯函数族的正规问题, 采用 Nevanlinna 理论证明了一类零点个数为有限的全纯函数族在分担条件下的正规性, 改进了 Pang X.C. 和 Zalcman L. 于 2000 年得到的亚纯函数族关于分担值的正规规定则.

关键词: 全纯函数; 正规族; 零点重级

MR(2010) 主题分类号: 30D45

中图分类号: O174.52

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2020)06-0746-07

1 引言与结果

本文所用的 Nevanlinna 理论的基本概念与记号同文献 [1,2]. 例如: 特征函数 $T(r, f)$, a -值点的密指量函数 $N(r, a) = N(r, \frac{1}{f-a})$, 接近函数 $m(r, f)$, $S(r, f) = o(T(r, f))$ 和正规族定义等. 设 $f(z), g(z)$ 为区域 D 上的两个亚纯函数, 记 $f(z) = a(z) \Leftrightarrow g(z) = b(z)$: 若 $f(z) - a(z)$ 与 $g(z) - b(z)$ 的零点相同.

1959 年, Hayman^[3] 证明了一些重要的 Picard 型定理, 并于 1967 年提出了相应的正规族猜想^[4]. 围绕 Hayman 问题的亚纯函数正规规定则的研究由此展开并取得很大的发展. 特别地, 1978 年顾永兴^[5] 证明了如下 Hayman 猜想.

定理 A 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 上的亚纯函数族, $k \in \mathbb{N}^+$. 若 $\forall f \in \mathcal{F}, f(z) \neq 0, f^{(k)}(z) \neq 1$, 则 $\mathcal{F}$ 在区域 D 上正规.

2000 年, Pang 和 Zalcman^[6] 在分担值的情形下, 推广了定理 A, 证明了

定理 B 设 $\mathcal{F}$ 为区域 D 上的亚纯函数族, $k \in \mathbb{N}^+, b \in \mathbb{C}, b \neq 0, h$ 为有穷正数. 如果对于任意 $f \in \mathcal{F}$, f 的零点重级 $\geq k$, 且满足

$$(1) \overline{E}_f(0) = \overline{E}_{f^{(k)}}(b);$$

$$(2) \text{对任意 } f \text{ 的零点, } 0 < |f^{(k+1)}(z)| < h,$$

那么 $\mathcal{F}$ 在区域 D 上正规. 这里 $\overline{E}_f(a) = \{z \in D : f(z) = a\}$.

文中也给出反例: $f_n(z) = \frac{1}{n^2}(e^{nz} + e^{-nz} - 2)$, 其中 $f_n(z)$ 的零点重级为 2, 且 $\overline{E}_f(0) = \overline{E}_{f''}(2) \subset \overline{E}_{f'''}(0)$, 但 $\{f_n(z)\}$ 在单位圆上不正规. 这个例子说明 $k = 2$ 时, 定理 B 中的条件 (2) 不能省略.

例 1 设 $\mathcal{F} = \{f_n(z) = z^2(nz - \frac{1}{\sqrt{2}})^2\}$, 则 $f_n(z) = 0 \Leftrightarrow f_n''(z) = 1 \Rightarrow f_n'''(z) \neq 0$, 但 $\mathcal{F}$ 在单位圆上不正规.

例 1 说明当 $k = 2$ 时, 即使在 $f(z)$ 的零点处 $|f_n'''(z)| > 0$, 定理 B 的结论仍不能成立.

*收稿日期: 2020-06-10 接收日期: 2020-09-03

基金项目: 国家自然科学基金 (11371139).

作者简介: 许会会 (1995-), 女, 安徽合肥, 硕士, 主要研究方向: 复分析.

本文在 $k \geq 3$ 且分担函数的条件下证明了

定理 1 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的全纯函数族, $k \geq 3$ 为正整数, $a(z)$ 为 D 内零点与极点均为重级, 且重级均 $< k$ 的亚纯函数 (极点重级可以等于 k). 若 $\forall f \in \mathcal{F}$, f 的零点重级均 $\geq k$, 其判别零点个数至多为 t , 且满足

$$(1) f(z) = 0 \Leftrightarrow f^{(k)}(z) = a(z) \Rightarrow |f^{(k+1)}(z) - a'(z)| > 0;$$

(2) $f(z)$ 与 $a(z)$ 不同时为零; 那么 $\mathcal{F}$ 在区域 D 上正规.

例 2 设 $\mathcal{F} = \{f_n(z) = \frac{nz^{k+1}}{(k+1)!}\}$, $a(z) = z$, 则 $f_n(z) = 0 \Leftrightarrow f_n^{(k)}(z) = a(z) \Rightarrow |f_n^{(k+1)}(z) - a'(z)| > 0$, 但 $\mathcal{F}$ 在 $z = 0$ 处不正规. 故定理 1 中的条件 (2) 是不能省略的.

例 3 设 $\mathcal{F} = \{f_n(z) = \frac{n(z-\frac{1}{n})^k}{k!}\}$, $a(z) = \frac{1}{z}$, 则 $f_n(z) = 0 \Leftrightarrow f_n^{(k)}(z) = a(z) \Rightarrow |f_n^{(k+1)}(z) - a'(z)| > 0$, 但 $\mathcal{F}$ 在 $z = 0$ 处不正规. 故定理 1 中 $a(z)$ 的极点均为重级是必须的.

推论^[7] 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的全纯函数族, $k \geq 3$ 为正整数, 复数 $a \neq 0$. 若 $\forall f \in \mathcal{F}$, f 的零点重级均 $\geq k$, 其判别零点个数至多为 t , 且满足 $f(z) = 0 \Leftrightarrow f^{(k)}(z) = a \Rightarrow |f^{(k+1)}(z)| > 0$, 那么 $\mathcal{F}$ 在区域 D 上正规.

2 几个引理

在证明定理之前, 我们需要如下几个引理.

引理 1^[8] 设 $\mathcal{F}$ 是单位圆盘上的亚纯函数族, k 是一正整数. $\mathcal{F}$ 中每一个函数的零点重级至少为 k , 且存在 $A \geq 1$, 使得对于任意 $f \in \mathcal{F}$, 在 f 的零点处都有 $|f^{(k)}(z)| \leq A$. 如果 $\mathcal{F}$ 在单位圆内不正规, 则对任意的 $0 \leq \alpha \leq k$, 必存在

(i) 实数 r , $0 < r < 1$;

(ii) 点列 $z_n \in D$, $|z_n| < r < 1$;

(iii) 函数列 $f_n \in \mathcal{F}$;

(iv) 正数列 $\rho_n \rightarrow 0^+$;

使得 $\{\frac{f_n(z_n + \rho_n \xi)}{\rho_n^\alpha}\}$ 在 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于一个非常数的亚纯函数 $g(\xi)$, 并且 $g^\sharp(\xi) \leq g^\sharp(0) = kA + 1$.

引理 2^[9] 设 $f(z)$ 为开平面内的亚纯函数, l 为大于 1 的整数, 又设 $\varphi_1(z) \not\equiv \infty$, $\varphi_2(z) \not\equiv \varphi_1^{(l)}(z)$, ∞ 为两个亚纯函数满足条件 $T(r, \varphi_i) = o(T(r, f))$, $i = 1, 2$. ($r \rightarrow \infty$) 则有不等式

$$T(r, f) \leq (2 + \frac{2}{l-1})N(r, \frac{1}{f - \varphi_1}) + (2 + \frac{4}{l+1})\bar{N}(r, \frac{1}{f^{(l)} - \varphi_2}) + S(r, f),$$

其中,

$$\begin{aligned} S(r, f) = & (2 + \frac{1}{l+1})m(r, \frac{f^{(l)} - \varphi_1^{(l)}}{f - \varphi_1}) + 3(2 + \frac{1}{l-1})m(r, \frac{f^{(l+1)} - \varphi_1^{(l+1)}}{f - \varphi_1}) \\ & + 4(1 + \frac{1}{l-1})m(r, \frac{f^{(l+1)} - \varphi_2'}{f^{(l)} - \varphi_2}) + \frac{1}{l-1}m(r, \frac{f^{(l+2)} - \varphi_2''}{f^{(l+1)} - \varphi_2'}) + o(T(r, f)) \end{aligned}$$

引理 3 设 $\mathcal{F}$ 是区域 D 内的全纯函数族, $k \geq 3$ 为正整数, $\{a_n(z)\}$ 为 D 内全纯函数列, 且在区域 D 内满足 $a_n(z)$ 一致地趋于 $a(z)$, 这里 $a(z) (\neq 0)$ 全纯. 若 $\forall f \in \mathcal{F}$, f 的零点重级均 $\geq k$, 其判别零点个数至多为 t , 且对于任意的 n 满足 $f_n(z) = 0 \Leftrightarrow f_n^{(k)}(z) = a_n(z) \Rightarrow |f_n^{(k+1)}(z) - a'_n(z)| > 0$, 那么 $\mathcal{F}$ 在区域 D 上正规.

证 不妨设 $D = \Delta$, z_0 为 Δ 内任意一点. 假设 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处不正规, 由引理 1 可知: $\exists 0 < r < 1; \{z_n\}, |z_n| < r; \{f_n\} \subset \mathcal{F}$, 以及 $\rho_n \rightarrow 0^+$ 使得 $g_n(\xi) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi)}{\rho_n^k}$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 按球距内闭一致收敛于非常数亚纯函数 $g(\xi)$, 其零点重级至少为 k , 级至多为 2, 且满足 $g^\#(\xi) \leq g^\#(0) = k(d+1) + 1$, 其中 $d = \max\{|a(z)|, |z| < 1\}$. 于是可得到以下断言

- (i) $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow g^{(k)}(\xi) = a(z_0)$;
- (ii) $g(\xi)$ 至多有 t 个不同的零点.

先证明断言 (i). 假设 $\exists \xi_0$ 使得 $g(\xi_0) = 0$. 因为 $g(\xi)$ 不为常数, 所以 $g(\xi) \neq 0$. 根据 Hurwitz 定理可知, $\exists \xi_n \rightarrow \xi_0$ 使得 $g_n(\xi_n) = 0$. 即当 n 充分大时, $\frac{f_n(z_n + \rho_n \xi_n)}{\rho_n^k} = 0$, 所以 $f_n(z_n + \rho_n \xi_n) = 0$, 由条件可知 $f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi_n) = a_n(z_n + \rho_n \xi_n)$, 从而 $g^{(k)}(\xi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(z_n + \rho_n \xi_n) = a(z_0)$. 即证 $g(\xi) = 0 \Rightarrow g^{(k)}(\xi) = a(z_0)$. 反之, 假设 $\exists \xi_0$ 使得 $g^{(k)}(\xi_0) = a(z_0)$. 因为 $g^{(k)}(\xi) \neq a(z_0)$, 否则 $g(\xi) = \frac{a(z_0)}{k!}(\xi - \xi_1)^k$, 则有 $g^\#(0) \leq \begin{cases} \frac{k}{2}, & |\xi_1| \geq 1; \\ |a(z_0)|, & |\xi_1| < 1. \end{cases}$ 矛盾于 $g^\#(0) = k(d+1)+1$. 令 $G_n(\xi) = g_n^{(k)}(\xi) - a_n(z_n + \rho_n \xi) = f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi) - a_n(z_n + \rho_n \xi)$, 则 $G_n(\xi)$ 按常义内闭一致收敛于 $g^{(k)}(\xi) - a(z_0) \triangleq G(\xi)$. 由于 $G(\xi_0) = 0$ 且 $G(\xi) \neq \text{const}$, 根据 Hurwitz 定理, $\exists \xi_n \rightarrow \xi_0$, 使得 $G_n(\xi_n) = 0$, 即当 n 充分大时, $f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi_n) = a_n(z_n + \rho_n \xi_n) \Rightarrow f_n(z_n + \rho_n \xi_n) = 0$, 即有 $g_n(\xi_n) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi_n)}{\rho_n^k} = 0$. 从而 $g(\xi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi_n)}{\rho_n^k} = 0$, 即证 $g^{(k)}(\xi) = a(z_0) \Rightarrow g(\xi) = 0$.

综上, 断言 (i) 得证. 再证断言 (ii).

假设 $g(\xi)$ 至少有 $t+1$ 个判别的零点, 记为 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{t+1}$. 因为 $f_n(z)$ 均为全纯函数, 所以可得 $g_n(\xi)$ 按常义内闭一致收敛于 $g(\xi)$, 所以由 $g(\xi_i) = 0$, 根据 Hurwitz 定理, $\exists \xi_{ni} \rightarrow \xi_i$, 使得 $g_n(\xi_{ni}) = 0 \Rightarrow f_n(z_n + \rho_n \xi_{ni}) = 0, i = 1, 2, \dots, t+1$. 矛盾于 f_n 判别零点个数至多为 t , 故假设不成立, 即 $g(\xi)$ 至多有 t 个不同的零点.

综上, 断言 (ii) 得证.

下面根据上述断言推出矛盾.

由断言进一步可知, $G(\xi) = g^{(k)}(\xi) - a(z_0)$ 仅有有限多个零点, 根据 Hayman 不等式可知 $T(r, g) \leq (2 + \frac{1}{k})N(r, \frac{1}{g}) + (2 + \frac{2}{k})\bar{N}(r, \frac{1}{G}) + S(r, g)$. 易见 $T(r, g) \leq O(\log r)$. 从而可推出 $g(\xi)$ 为有理函数. 又 $f_n(z)$ 均为全纯函数, 所以可推出 $g(\xi)$ 为多项式函数. 不妨设 $g(\xi) = A(\xi - \xi_1)^k(\xi - \xi_2)^k \cdots (\xi - \xi_l)^k$. 这里 $l \geq 2$ 显然. (否则 $l = 1$, 则 $g(\xi) = A \cdot (\xi - \xi_0)^k = \frac{a(z_0)}{k!}(\xi - \xi_0)^k$. 此时 $g^{(k)}(\xi) - a(z_0) \equiv 0$, 矛盾于 $g^{(k)}(\xi) = a(z_0) \Leftrightarrow g(\xi) = 0$). 又因为 $\deg g(\xi) = lk, \deg g^{(k)}(\xi) = (l-1)k$, 其中 $l \geq 2, k \geq 3$, 故 $(l-1)k > l$, 故 $g^{(k)}(\xi) - a(z_0) = 0$ 必有重级零点. 不妨设 ξ_1 为 $g^{(k)}(\xi) - a(z_0) = 0$ 的某一重级零点, 即有 $g^{(k)}(\xi_1) = a(z_0), g^{(k+1)}(\xi_1) = 0$. 由幅角原理可知, $\exists \{\xi_{n1}\}, \{\xi_{n2}\}, \xi_{ni} \rightarrow \xi_1, i = 1, 2$. 使得 $g_n^{(k)}(\xi_{ni}) = a(z_n + \rho_n \xi_{ni})$, 即 $f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi_{ni}) = a(z_n + \rho_n \xi_{ni})$. 由条件 (1) 可知, $|f_n^{(k+1)}(z_n + \rho_n \xi_{ni}) - a'(z_n + \rho_n \xi_{ni})| > 0$. 所以 ξ_{ni} 是 $f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi) - a(z_n + \rho_n \xi) = 0$ 的简单零点, 从而 $\xi_{n1} \neq \xi_{n2}$. (否则 ξ_{n1} 为 $g_n^{(k)}(\xi) - a(z_n + \rho_n \xi) = 0$ 的重零点, 从而 $|f_n^{(k+1)}(z_n + \rho_n \xi_{ni}) - a'(z_n + \rho_n \xi_{ni})| = 0$ 矛盾) 又因为

$$g_n(\xi_{n1}) = g_n'(\xi_{n1}) = g_n''(\xi_{n1}) = \cdots = g_n^{(k-1)}(\xi_{n1}) = 0,$$

$$g_n(\xi_{n2}) = g_n'(\xi_{n2}) = g_n''(\xi_{n2}) = \cdots = g_n^{(k-1)}(\xi_{n2}) = 0.$$

所以 ξ_1 至少为 $g(\xi)$ 的 $2k$ 重零点, 矛盾于 $g^{(k)}(\xi_1) = a(z_0)$.

综上, 假设不成立.

3 定理证明

证 不妨假设 D 为单位圆, z_0 为 D 内任意一点.

情形 1 若 $a(z_0) \neq \infty$.

情形 1.1 若 $a(z_0) \neq 0$. 不妨设 $z_0 = 0$, 因为 $a(z)$ 为亚纯函数, 故 $\exists \delta > 0, \forall z \in \Delta(0, \delta) = \{|z| < \delta\}, a(z) \neq 0, \infty$.

假设 $\mathcal{F}$ 在 $z_0 = 0$ 处不正规, 由引理 1 可知: $\exists 0 < r < 1; \{z_n\}, |z_n| < r; \{f_n\} \subset \mathcal{F}$, 以及 $\rho_n \rightarrow 0^+$ 使得 $g_n(\xi) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi)}{\rho_n^k}$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于非常数亚纯函数 $g(\xi)$, 其零点重级至少为 k , 级至多为 2, 且满足 $g^\sharp(\xi) \leq g^\sharp(0) = k(d+1) + 1$, 其中 $d = \max\{|a(z)|, |z| < 1\}$. 仿照引理 3 证明, 于是我们可得到以下断言

- (i) $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow g^{(k)}(\xi) = a(z_0)$;
- (ii) $g(\xi)$ 至多有 t 个不同的零点.

继而可知存在 ξ_1 至少为 $g(\xi)$ 的 $2k$ 重零点, 矛盾于 $g^{(k)}(\xi_1) = a(z_0) \neq 0$.

情形 1.2 若 $a(z_0) = 0$. 不妨设 $a(0) = 0$, 由于 $a(z)$ 为亚纯函数且零点均为重级, 不妨设 $a(z) = z^m + a_{m+1}z^{m+1} + \dots = z^m b(z)$, 其中 $1 < m < k, b(0) = 1$ 且 $b(z) \neq 0$ 于单位圆上.

考虑函数族 $\mathcal{F}_1 = \{F(z) : F(z) = \frac{f(z)}{z^m}, f \in \mathcal{F}\}$, 根据定理中条件 (2), $f(z)$ 与 $a(z)$ 不同时为 0, 所以 $f(0) \neq 0$, 故 $F(0) = \infty$.

假设 $\mathcal{F}_1$ 在 $z = 0$ 处不正规, 由引理 1 可知: $\exists 0 < r < 1; \{z_n\}, |z_n| < r; \{F_n\} \subset \mathcal{F}_1$, 以及 $\rho_n \rightarrow 0^+$ 使得 $g_n(\xi) = \frac{F_n(z_n + \rho_n \xi)}{\rho_n^k}$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球距内闭一致收敛于非常数亚纯函数 $g(\xi)$, 其零点重级至少为 k , 级至多为 2, 且满足 $g^\sharp(\xi) \leq g^\sharp(0) = k(d+1) + 1$, 其中 $d = \max\{|b(z)|, |z| < 1\}$.

情形 1.2.1 假设存在 $\{\frac{z_n}{\rho_n}\}$ 的一个子列趋于 ∞ , 不妨仍记为 $\frac{z_n}{\rho_n} \rightarrow \infty$.

因为在圆盘 $\{|\xi| < R\}$ 中, 当 n 充分大时, $z_n + \rho_n \xi \neq 0$, 故 $g_n(\xi)$ 为全纯函数, 从而其极限函数 $g(\xi)$ 也是全纯函数. 又因为 $f_n^{(k)}(z) = (z^m F_n(z))^{(k)} = z^m F_n^{(k)}(z) + \sum_{l=1}^k c_l \cdot z^{m-l} \cdot$

$F_n^{(k-l)}(z)$, 其中 $c_l = \begin{cases} m \cdot (m-1) \cdots (m-l+1) \cdot C_k^l, & l \leq m; \\ 0, & l > m. \end{cases}$ 以及 $\rho_n^l \cdot g_n^{(k-l)}(\xi) = F_n^{(k-l)}(z_n + \rho_n \xi), l = 0, 1, 2, \dots, k$, 故

$$\frac{f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi)}{a(z_n + \rho_n \xi)} = [g_n^{(k)}(\xi) + \sum_{l=1}^k c_l \cdot \frac{g_n^{(k-l)}(\xi)}{(\frac{z_n}{\rho_n} + \xi)^l}] \cdot \frac{1}{b(z_n + \rho_n \xi)}.$$

而对于 $\forall l = 1, 2, 3, \dots, k, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_l}{(\frac{z_n}{\rho_n} + \xi)^l} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b(z_n + \rho_n \xi)} = 1$, 所以 $\frac{f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi)}{a(z_n + \rho_n \xi)}$ 按常义内闭一致收敛于 $g^{(k)}(\xi)$. 易得以下断言

- (i) $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow g^{(k)}(\xi) = b(0)$;
- (ii) $g(\xi)$ 至多有 t 个判别的零点.

类似引理 3 中的证明, 存在 ξ_1 至少为 $g(\xi)$ 的 $2k$ 重零点, 矛盾于 $g^{(k)}(\xi_1) = b(0)$.

情形 1.2.2 假设存在 $\{\frac{z_n}{\rho_n}\}$ 的一个子列趋于有限复数 α , 不妨仍记为 $\frac{z_n}{\rho_n} \rightarrow \alpha$. 则 $\frac{F_n(\rho_n \xi)}{\rho_n^k} = \frac{F_n(z_n + \rho_n(\xi - \frac{z_n}{\rho_n}))}{\rho_n^k}$ 在除去 $g(\xi)$ 的极点外按常义内闭一致收敛于 $g(\xi - \alpha)$, 并且

$g(\xi - \alpha)$ 的零点重数至少为 k , 其中 $\xi = 0$ 是 $g(\xi - \alpha)$ 的唯一极点, 极点重数为 m . 令 $G_n(\xi) = \frac{f_n(\rho_n \xi)}{\rho_n^{m+k}} = \frac{F_n(\rho_n \xi)}{\rho_n^k} \cdot \frac{\rho_n \xi}{\rho_n^m}$, 则 $G_n(\xi)$ 按常义内闭一致收敛于 $\xi^m g(\xi - \alpha) \triangleq G(\xi)$, 并且 $G(\xi)$ 的零点重数至少为 k , 易知 $G(0) \neq 0$.

断言: $G(\xi) = 0 \Leftrightarrow G^{(k)}(\xi) = \xi^m$.

先证明 $G(\xi) = 0 \Leftrightarrow G^{(k)}(\xi) = \xi^m$.

假设 $\exists \xi_0$, 使得 $G(\xi_0) = 0$. 因为 $G(\xi) \neq 0$. (否则矛盾于 $G(0) \neq 0$.) 根据 Hurwitz 定理可知, $\exists \{\xi_n\}, \xi_n \rightarrow \xi_0$, 使得 $G_n(\xi_n) = 0$. 即当 n 充分大时, $f_n(\rho_n \xi_n) = 0$, 从而 $f_n^{(k)}(\rho_n \xi_n) = a(\rho_n \xi_n)$. 又因为

$$G^{(k)}(\xi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n^{(k)}(\rho_n \xi_n)}{\rho_n^m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\rho_n \xi_n)^m \cdot b(\rho_n \xi_n)}{\rho_n^m} = \xi_0^m,$$

故有 $G^{(k)}(\xi_0) = \xi_0^m$.

反之, 假设 $\exists \xi_0$, 使得 $G^{(k)}(\xi_0) = \xi_0^m$. 由于 $G^{(k)}(\xi) \neq \xi^m$, 否则 $G(\xi)$ 为 $m+k$ 阶多项式, 而 $G(\xi)$ 的零点重数至少为 k 重, 又 $1 < m < k$, 可知 $G(\xi)$ 只有一个 $m+k$ 重零点 $\xi_0 \neq 0$, 矛盾于 $G^{(k)}(\xi_0) = \xi_0^m \neq 0$. 又因为 $G_n^{(k)}(\xi) - \frac{a(\rho_n \xi)}{\rho_n^m}$ 按常义内闭一致收敛于 $G^{(k)}(\xi) - \xi^m$, 根据 Hurwitz 定理, $\exists \{\xi_n\}, \xi_n \rightarrow \xi_0$, 使得 $G_n^{(k)}(\xi_n) - \frac{a(\rho_n \xi_n)}{\rho_n^m} = 0$. 即当 n 充分大时, $f_n^{(k)}(\rho_n \xi_n) = a(\rho_n \xi_n)$. 由定理条件 (1) 知, $f_n(\rho_n \xi_n) = 0$, 进而有 $G(\xi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(\rho_n \xi_n)}{\rho_n^{m+k}} = 0$, 即证 $G^{(k)}(\xi) = \xi^m \Rightarrow G(\xi) = 0$.

综上, 断言得证.

同样地, 易证 $G(\xi)$ 至多有 t 个判别的零点. 下面利用 $G(\xi)$ 导出矛盾.

如上已证 $G(\xi) = 0 \Leftrightarrow G^{(k)}(\xi) = \xi^m$, 且 $G(\xi)$ 至多有 t 个判别的零点. 若 $G(\xi)$ 为超越函数, 则由引理 2 可知

$$T(r, G(\xi)) \leq (2 + \frac{2}{l-1})N(r, \frac{1}{G(\xi)}) + (2 + \frac{4}{l+1})\bar{N}(r, \frac{1}{G^{(k)}(\xi) - \xi^m}) + S(r, G(\xi))$$

即 $T(r, G(\xi)) \leq O(\log r)$, 矛盾. 由此可得 $G(\xi)$ 为有理函数. 由于 $G(\xi) = \xi^m g(\xi - \alpha)$, 其中 $\xi = 0$ 是 $g(\xi - \alpha)$ 的唯一极点, 极点重数为 m . 所以可推得 $G(\xi)$ 为多项式. 不妨设

$$G(\xi) = A(\xi - \xi_1)^k (\xi - \xi_2)^k \cdots (\xi - \xi_l)^k,$$

这里 $l \geq 2$ 显然. 否则, 若 $l = 0$ 时, 即 $G(\xi) \neq 0$, 根据断言可知 $G^{(k)}(\xi) \neq \xi^m$, 矛盾于 $G(\xi)$ 为多项式函数; 若 $l = 1$ 时, 即 $G(\xi) = A(\xi - \xi_0)^k, (\xi_0 \neq 0)$. 因为 $G(\xi) = 0 \Leftrightarrow G^{(k)}(\xi) = \xi^m$, 故 $k!A = \xi_0^m$, 则 $G(\xi) = \frac{\xi_0^m}{k!}(\xi - \xi_0)^k$. 又 $m > 1$, 令 $G^{(k)}(\xi) - \xi^m = 0 \Leftrightarrow (\frac{\xi}{\xi_0})^m = 1$, 则 $G^{(k)}(\xi) - \xi^m = 0$ 有 m 个不同的解, 矛盾. 此时, 易知 $\deg G(\xi) = lk$, 因为 $1 < m < k$, 故当 $l \geq 2, k \geq 3, \deg G^{(k)}(\xi) = lk - k \geq k > m$, 所以 $G^{(k)}(\xi) - \xi^m = 0$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上有 $lk - k$ 个根 (计重数). 而 $lk - k - l \geq 2(k-1) - k \geq 1$, 所以 $G^{(k)}(\xi) - \xi^m = 0$ 必有重根.

同样地如引理 3 中证明, 存在 ξ_0 至少为 $G(\xi)$ 的 $2k$ 重零点, 矛盾于 $G^{(k)}(\xi_0) = \xi_0^m \neq 0$.

综上所述, 假设不成立, 故 $\mathcal{F}_1$ 在 $z = 0$ 处正规.

下面证明 $\mathcal{F}$ 在 $z = 0$ 处正规.

因为 $\mathcal{F}_1 = \{F_n(z) : F_n(z) = \frac{f(z)}{z^m}, f \in \mathcal{F}\}$, 所以 $\forall \{f_n(z)\} \subset \mathcal{F}, \exists \{F_n(z)\} \subset \mathcal{F}_1$. 因为 $\mathcal{F}_1$ 在 $z = 0$ 处正规, 故存在 $\{F_n(z)\}$ 的子列 (不妨仍记为 $\{F_n(z)\}$), 以及 $\Delta(0, \delta)$, 使得 $\{F_n(z)\}$

在 $\Delta(0, \delta)$ 内按球距内闭一致收敛于一个亚纯函数 $F(z)$. 又 $F_n(0) = \infty$, 故存在 $\delta_1 > 0$, 使得 $\forall z \in \Delta(0, \delta_1), |F_n(z)| \geq 1$. 因此在 $|z| = \frac{\delta_1}{2}$ 上, 有 $|\frac{1}{f_n(z)}| = |\frac{1}{F_n(z)}| \cdot \frac{1}{|z|^m} \leq \frac{2^m}{\delta_1^m}$. 根据最大模原理以及 Montel 正规定则可, $\mathcal{F}$ 在 $z = 0$ 处正规.

情形 2 若 $a(z_0) = \infty$. 不妨设 $a(0) = \infty$, 由于 $a(z)$ 为极点重数均大于 1 的亚纯函数, 不妨设 $a(z) = \frac{\phi(z)}{z^m}$, 其中 $\phi(0) = 1$, 且 $\phi(z) \neq 0, \infty$ 于 Δ 上, $m > 1$. 由情形 1, $\mathcal{F}$ 在 $\Delta' = \Delta \setminus \{0\}$ 内正规. 下证 $\mathcal{F}$ 在 $z_0 = 0$ 处正规.

根据定理 1 的条件有 $1 < m \leq k$. 假设 $\mathcal{F}$ 在 $z = 0$ 处不正规, 由引理 1 可知: $\exists 0 < r < 1; \{z_n\}, z_n \rightarrow 0; \{f_n\} \subset \mathcal{F}$; 以及 $\rho_n \rightarrow 0^+$, 使得 $g_n(\xi) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi)}{\rho_n^{k-m}}$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 按球距内闭一致收敛于非常数亚纯函数 $g(\xi)$, 级至多为 2. 且满足 $g^\#(\xi) \leq g^\#(0) = k(d+1) + 1$, 其中 $d = \max\{|\phi(z)|, |z| < 1\}$. 因为 $f_n(z)$ 为全纯函数且零点重数均 $\geq k$, 故 $g_n(\xi)$ 为全纯函数且零点重级至少为 k , 从而其极限函数 $g(\xi)$ 也是全纯函数.

情形 2.1 假设存在 $\{\frac{z_n}{\rho_n}\}$ 的一个子列趋于 ∞ , 不妨仍记为 $\frac{z_n}{\rho_n} \rightarrow \infty$.

令 $T_n(\xi) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi)}{z_n^{k-m}}, S_n(\xi) = z_n^m a(z_n + z_n \xi)$, 则 $\{T_n(\xi)\}$ 为 Δ 内全纯函数列, 其零点重数至少为 k , 而 $\{S_n(\xi)\}$ 在 Δ 上也是全纯的, 且一致收敛于 $\frac{1}{(\xi+1)^m}$. 再根据条件可得 $T_n(z) = 0 \Leftrightarrow T_n^{(k)}(z) = S_n(z) \Rightarrow |T_n^{(k+1)}(z) - S_n'(z)| > 0$, 从而由引理 3 可知 $\{T_n(\xi)\}$ 在 Δ 内正规. 不妨设 $T_n(\xi)$ 在 Δ 内按球距内闭一致收敛于 $T(\xi)$.

若 $T(\xi)$ 为全纯函数, 则有 $T(0) \neq \infty$, 所以

$$\begin{aligned} g^{(k-m)}(\xi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k-m)}(z_n + \rho_n \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k-m)}(z_n + z_n \frac{\rho_n \xi}{z_n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n^{(k-m)}(\frac{\rho_n \xi}{z_n}) = T^{(k-m)}(0), \end{aligned}$$

即得 $g^{(k-m)}(\xi)$ 为常数. 又因为 $0 \leq k-m \leq k-1$, 所以 $g(\xi)$ 为次数至多为 $k-1$ 的多项式, 矛盾于 $g(\xi)$ 其零点重级至少为 k .

若 $T(\xi) \equiv \infty$, 此时

$$g(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi)}{\rho_n^{k-m}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{z_n}{\rho_n})^{k-m} \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi)}{z_n^{k-m}} = \infty$$

即得 $g(\xi) \equiv \infty$, 矛盾于 $g(\xi)$ 为非常数亚纯函数.

情形 2.1 假设存在 $\{\frac{z_n}{\rho_n}\}$ 的一个子列趋于有限复数 α , 不妨仍记为 $\frac{z_n}{\rho_n} \rightarrow \alpha$.

先证 $\xi = -\alpha$ 不为 $g(\xi)$ 的零点, 否则 $g(-\alpha) = 0$, 根据 Hurwitz 定理 $\exists \{\xi_n\}, \xi_n \rightarrow -\alpha$, 使得 $g_n(\xi_n) = 0$. 即当 n 充分大时, $g_n(\xi_n) = 0$, 则 $f_n(z_n + \rho_n \xi_n) = 0$. 由定理条件 (1) 知, $f_n(z_n + \rho_n \xi_n) = 0 \Leftrightarrow f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi_n) = a(z_n + \rho_n \xi_n)$, 所以

$$g^{(k)}(-\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^m f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n^m \cdot \frac{\phi(z_n + \rho_n \xi_n)}{(z_n + \rho_n \xi_n)^m} = \infty.$$

矛盾于 $g(\xi)$ 全纯.

类似如上讨论, 我们也可得断言

- (i) $\xi \neq -\alpha, g(\xi) = 0 \Leftrightarrow g^{(k)}(\xi) = \frac{1}{(\xi+\alpha)^m}$;
- (ii) $g(\xi)$ 至多有 t 个不同的零点.

下面利用 $g(\xi)$ 导出矛盾. 根据以上断言可知, 若 $g(\xi)$ 为超越函数, 则由引理 2 有

$$T(r, g(\xi)) \leq (2 + \frac{2}{l-1})N(r, \frac{1}{g(\xi)}) + (2 + \frac{4}{l+1})\bar{N}(r, \frac{1}{g^{(k)}(\xi) - \frac{1}{(\xi+\alpha)^m}}) + S(r, g(\xi))$$

即 $T(r, g(\xi)) \leq O(\log r)$, 矛盾. 由此可得 $g(\xi)$ 为多项式. 不妨设 $g(\xi) = A(\xi - \xi_1)^k(\xi - \xi_2)^k \cdots (\xi - \xi_l)^k$. 这里 $l \geq 2$ 显然. 若 $l = 1$ 时, 则 $g(\xi) = \frac{1}{k!(\xi_0+\alpha)^m}(\xi - \xi_0)^k$, $(\xi_0 \neq -\alpha)$. 令 $g^{(k)}(\xi) - \frac{1}{(\xi+\alpha)^m} = 0 \Leftrightarrow (\frac{\xi+\alpha}{\xi_0+\alpha})^m = 1$, 易见 $g^{(k)}(\xi) - \frac{1}{(\xi+\alpha)^m} = 0$ 有 m 个不同的解, 矛盾. 此时, 易知 $\deg g(\xi) = lk$, 故当 $l \geq 2, k \geq 3, \deg G^{(k)}(\xi) = lk - k$, 所以 $g^{(k)}(\xi) - \frac{1}{(\xi+\alpha)^m} = 0$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上至少有 $lk - k$ 个根 (计重数). 而 $lk - k - l \geq 2(k-1) - k \geq 1$, 所以 $g^{(k)}(\xi) - \frac{1}{(\xi+\alpha)^m} = 0$ 必有重根.

同样地参照引理 3 中的证明, 由 $g_n^{(k)}(\xi) - \rho_n^m a(z_n + \rho_n \xi) = \rho_n^m f_n^{(k)}(z_n + \rho_n \xi) - \rho_n^m a(z_n + \rho_n \xi)$ 按常义内闭一致收敛于 $g^{(k)}(\xi) - \frac{1}{(\xi+\alpha)^m}$, 可证得存在 ξ_0 至少为 $g(\xi)$ 的 $2k$ 重零点, 矛盾于 $g^{(k)}(\xi_0) = \frac{1}{(\xi_0+\alpha)^m} \neq 0$.

综上, $\mathcal{F}$ 在 $z = 0$ 处正规, 即定理 1 证毕.

参 考 文 献

- [1] Yang Lo. Value distribution theory[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [2] Hayman W K. Meromorphic function[M]. Oxford: Clarendon Press, 1967.
- [3] Hayman W K. Picard values of meromorphic functions and their derivatives [J]. Ann. Math., 1959, 70(2): 9-42.
- [4] Hayman W K. Research problems in function theory[M]. London: Athlone Press, 1967.
- [5] 顾永兴. 关于亚纯函数正规族 [J]. 中国科学 A 辑, 1978, 21(4): 374-386.
- [6] Pang X C, Zalcman L. Normal families and shared value[J]. Bull London Math. Soc., 2000, 32: 325-331.
- [7] 黄文, 叶亚盛. 一类全纯函数的正规定则 [J]. 数学物理学报, 2012, 32(06): 1166-1170.
- [8] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [9] 肖修治. 海曼不等式的一种推广 [J]. 数学杂志, 1982, (4): 313-318.

NORMAL CRITERIA OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS SHARING MEROMORPHIC FUNCTIONS

XU Hui-hui, YE Ya-sheng

(College of Science, University Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, china)

Abstract: In this paper, Nevanlinna's theory is used to study the normality of a family of holomorphic functions with a finite number of zeros on the basic of the condition of sharing, which improves a result concluded by Pang X.C. and Zalcman L. in 2000.

Keywords: holomorphic functions; normal family; multiple zeros

2010 MR Subject Classification: 30D45