Vol. 40 (2020)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

环上含参变量的 Boltzmann 测度的对数 Sobolev 不等式

程 新 [1], 毛 闰 [2], 张正良 [1]
(1. 武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072)
(2. 重庆市第八中学校, 重庆 401120)

摘 要: 本文主要研究环上的含参变量 h 的 Boltzmann 测度 μ_h 的对数 Sobolev 不等式. 通过降维方法以及对该不等式最佳常数 $C_{LS}(\mu_h)$ 的估计, 证明了该测度关于 h 满足一致的对数 Sobolev 不等式, 且对数 Sobolev 最佳常数 $C_{LS}(\mu_h)$ 在 $h>0$ 时是具有常数阶的. 结合已有的结果, 再次佐证对数 Sobolev 不等式严格强于 Talagrand 传输不等式以及 Poincaré 不等式.

关键词: Boltzmann 测度; 对数 Sobolev 不等式; 传输不等式; Poincaré 不等式
MR(2010) **主题分类号**: 60E15; 39B62 **中图分类号**: O177
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2020)06-0673-10

1 引言

Poincaré 不等式, 传输不等式和对数 Sobolev 不等式是研究测度集中性的有力工具 [1,2]. 在这三类不等式中, 对数 Sobolev 不等式强于 Talagrand 传输不等式, Talagrand 传输不等式不等式又强于 Poincaré 不等式, 具体例子可分别参看文献 [3, 4]. 在文献 [5] 中, Qian, Ma, Zhang 证明了 Boltzmann 测度在维数 $n\geq 3$ 固定时关于参数 $h>0$ 满足一致的对数 Sobolev 不等式, 但是并没有讨论 $n=2$ 的情形. 在 Ma 与 Zhang 的文献 [6] 中, 作者针对 $n=2$ 的情形给出了 Boltzmann 测度比较精确的谱系, 而且有趣的是: 当 $h\to\infty$ 时, 谱系以 h 的速率趋于无穷大, 即庞加莱常数以 $1/h$ 的速率趋于 0. 本文将给出在 $n=2$ 时, 对数 Sobolev 常数 $C_{LS}(\mu_h)$ 关于 $h>0$ 的一致非 0 上下界, 这在一定程度上也能表明三个不等式之间的强弱关系. 下面先介绍一下 Boltzmann 测度以及相关不等式.

Boltzmann 测度 设 S^{n-1} 是 $\mathbb{R}^n(n\geq 2)$ 上的单位球面, μ 是 S^{n-1} 上的标准 Lebesgue 测度, *i.e.* $\mu=\sigma_{n-1}/s_{n-1}$, 其中 σ_{n-1} 为单位球面 S^{n-1} 上的均匀测度, $s_{n-1}:=n\pi^{n/2}/\Gamma(1+n/2)$ 为单位球面面积 (归一化因子). 对任意的 $h>0$ 和 $e_1=(1,0,\dots,0)\in S^{n-1}$, 单位球面 S^{n-1} 上的概率测度 μ_h 有如下表达式:

$$d\mu_{n,h}(x)=\frac{e^{h\langle e_1,x\rangle}}{c_n(h)}d\mu(x),\quad x\in S^{n-1}.$$

其中, $c_n(h)$ 为归一化因子. 称该概率测度 μ_h 为外磁场下的 Boltzmann 测度. 特别 $n=2$ 时, S^1 即为环, 我们简记为 S, 对应测度 $\mu_{2,h}$ 简记为 μ_h, 此即为本文所考虑的含参变量 h 的环上的 Boltzmann 测度.

*收稿日期: 2020-07-23 接收日期:2020-09-08
基金项目: 国家自然科学基金 (NSFC11371283, 11671076, 11871382).
作者简介: 程新 (1996–), 男, 重庆, 硕士, 主要研究方向: 概率论. E-mail: chengxin021@whu.edu.cn.
通讯作者: 张正良

下面介绍几个相关不等式: 设 M 是一个完备黎曼流形, 其上的测地度量记为 d, ∇ 为 M 上的梯度. $\mathcal{M}_1(M)$ 为 M 上的概率测度空间.

Poincaré 不等式 我们称测度 $\mu\in\mathcal{M}_1(M)$ 满足 Poincaré不等式 (记 $\mu\in PI(C)$), 若对任意光滑函数 $f:M\to\mathbb{R}$, 都存在非负常数 C 使得

$$\mathrm{Var}_\mu(f)=\int_M f^2d\mu-(\int_M fd\mu)^2\le C\int_M|\nabla f|^2d\mu.$$

记 $C_{\mathrm{P}}(\mu)$ 为最佳 Poincaré 常数.

L^{p} 传输不等式 称测度 μ 满足 L^{p} 传输不等式, 若对任意的 $\nu=f^2\mu\in\mathcal{M}_1(M)$, 都存在非负常数 C 使得

$$W_p^2(\nu,\mu)\le 2C\mathrm{Ent}_\mu\left(f^2\right).$$

其中 $W_p(\nu,\mu)$ 是测度 ν 和 μ 的 L^{p}-Wasserstein 距离, 其定义如下:

$$W_p(\nu,\mu)=\inf_\pi\Big(\iint\limits_{M^2}d^p(x,y)\pi(dx,dy)\Big)^{1/p}.$$

这里 π 是 $M\times M$ 上的概率测度, 其边缘分布为 μ,ν. 记 $C_{W_pH}(\mu)$ 为满足该不等式的最佳常数.

对数 Sobolev 不等式 称测度 μ 满足对数 Sobolev 不等式, 若对任意光滑函数 $f:M\to\mathbb{R}$, 都存在非负常数 C 使得

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2)\le 2C\int_M|\nabla_M f|^2d\mu$$

成立, 其中 $\mathrm{Ent}_\mu(f^2):=\mu(f^2\log f^2)-\mu(f^2)\log(\mu(f^2))$ 为函数 f^2 关于 μ 的熵. 记 $C_{LS}(\mu)$ 为最佳对数 Sobolev 常数.

2 准备工作

本文沿用 [7, 8] 中的降维方法: 设 ν_h 为 μ_h 在映射 $x\to d(e_1,x)$ 下的像测度, 则 ν_h 为 $[0,\pi]$ 上的概率测度, 其概率密度为 $\rho_{2,h}=\frac{d\nu_h}{d\theta}=\frac{1}{C_2(h)}e^{h\cos\theta}$ 其中, $C_2(h)=\displaystyle\int_0^\pi e^{h\cos\theta}d\theta$ 为归一化因子.

在处理环上测度的对数 Sobolev 不等式时可参考如下的降维定理.

定理 2.1 [8] 设 μ 为环 S 上的均匀测度, M 为 S 上的概率测度, 其定义如下

$$M(dy)=\varphi(d(y,e_1))\mu(dy),\quad y\in S.$$

其中, φ 是非负可测的. 设 M 在映射 $y\to d(y,e_1)$ 下的像测度为 ν, 则最佳对数 Sobolev 常数满足 $C_{LS}(\nu)\le C_{LS}(M)\le C_{LS}(\nu)+\frac{1}{\lambda^{DD}(\nu)}$ 其中, $\lambda^{DD}(\nu)$ 是满足 $[0,\pi]$ 上 Dirichlet 边界

条件的 ν 的第一特征值.

$$\lambda^{DD}(\nu) := \inf\left\{\frac{\int_0^\pi (f')^2\, d\nu}{\nu(f^2)} : f(0) = f(\pi) = 0, f\text{不是常数}\right\}$$

而对于本文中所考虑的 Boltzmann 测度对应的 $\lambda^{DD}(\nu_h)$ 也有如下估计.

引理 2.2 [6] 对于任意 $h > 0$, 对任意的光滑函数 $f : S \to \mathbb{R}$, ν_h 为 Boltzmann 测度 μ_h 在映射 $x \to d(e_1, x)$ 下的像测度, 则 Dirichlet 边界条件下的第一特征值 $\lambda^{DD}(\nu_h)$ 满足

$$\frac{1}{\lambda^{DD}(\nu_h)} \le \min\left\{\frac{7}{h}, 1\right\}.$$

在上面两个结论的基础上, 本文的讨论将主要集中在 $[0, \pi]$ 上的一维测度 ν_h 上. 针对一维测度, Barthe 和 Roberto 在 [9] 中给出了关于对数 Sobolev 不等式的刻画, 现陈述如下.

定理 2.3 [9] 设 μ_B, ν_B 是 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 测度, 其中 $\mu_B(\mathbb{R}) = 1$ 且 $d\nu_B(x) = n(x)dx$, $n(x)$ 为一绝对光滑函数. 设 m 是测度 μ_B 上的中位数, 且对任意光滑函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 满足

$$\mathrm{Ent}_{\mu_B}(f^2) \le 2C_{LS} \int (f')^2 d\nu_B.$$

其中, C_{LS} 为最佳对数 Sobolev 常数. 则有 $\max(b_-, b_+) \le 2C_{LS} \le 4\max(B_-, B_+)$, 其中

$$\begin{aligned}
b_+ &= \sup_{x>m} \mu_B([x,\infty)) \log\left(1 + \frac{1}{2\mu_B([x,\infty))}\right) \int_m^x \frac{1}{n} \\
B_+ &= \sup_{x>m} \mu_B([x,\infty)) \log\left(1 + \frac{e^2}{\mu_B([x,\infty))}\right) \int_m^x \frac{1}{n} \\
b_- &= \sup_{x<m} \mu_B((-\infty,x]) \log\left(1 + \frac{1}{2\mu_B((-\infty,x])}\right) \int_x^m \frac{1}{n} \\
B_- &= \sup_{x<m} \mu_B((-\infty,x]) \log\left(1 + \frac{e^2}{\mu_B((-\infty,x])}\right) \int_x^m \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

注意到, 对于任意 $0 \le y \le 1/2$, 都有 $\log\left(1 + \frac{e^2}{y}\right) \le \frac{\log(1+2e^2)}{\log 2} \log\left(1 + \frac{1}{2y}\right) \le 4\log\left(1 + \frac{1}{2y}\right)$ 因此, $B_+ \le 4b_+$ 且 $B_- \le 4b_-$. 不难发现, 此时最佳对数 Sobolev 常数 C_{LS} 满足 $\max(b_-, b_+) \le 2C_{LS} \le 16\max(b_-, b_+)$. 本文的目的仅在于给出常数阶, 故此证明也只需去估计 b_-, b_+. 为此还需下面几个估计.

引理 2.4 设 $C_2(h) := \int_0^\pi e^{h\cos\theta} d\theta$, 则

$$\begin{aligned}
2 \le C_2(h) \le 2\pi, &\qquad 0 < h < 1; \\
\frac{e^h}{2\sqrt{h}} \le C_2(h) \le \frac{3e^h}{\sqrt{h}}, &\qquad h \ge 1.
\end{aligned}$$

证 a) 当 $0<h<1$ 时,

$$C_2(h)=\int_0^{\pi/2}e^{h\cos\theta}d\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}e^{h\cos\theta}d\theta\leq\frac{\pi}{2}(e+1)<2\pi;$$

$$C_2(h)\geq\int_0^{\pi}e^{h\cos\theta}\sin\theta d\theta=\frac{e^h-e^{-h}}{h}\geq 2.$$

b) 当 $h\geq 1$ 时, 一方面

$$C_2(h)=\int_{-1}^{1}\frac{e^{ht}}{\sqrt{1-t^2}}dt\geq\int_0^1\frac{e^{ht}}{\sqrt{1-t}}dt\geq\frac{\sqrt{2}e^h}{\sqrt{h}}\int_0^1 e^{-u^2}du\geq\frac{\sqrt{2}e^h}{\sqrt{h}}e^{-1}\geq\frac{e^h}{2\sqrt{h}};$$

另一方面, 利用 $\int_0^x e^{t^2}dt\leq e^{x^2}$, $\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

$$\begin{aligned}C_2(h)&=\int_{-1}^{0}\frac{e^{ht}}{\sqrt{1-t^2}}dt+\int_0^1\frac{e^{ht}}{\sqrt{1-t^2}}dt\leq\int_{-1}^{0}\frac{e^{ht}}{\sqrt{1+t}}dt+\int_0^1\frac{e^{ht}}{\sqrt{1-t}}dt\\&=\frac{2e^{-h}}{\sqrt{h}}\int_0^{\sqrt{h}}e^{v^2}dv+\frac{2e^h}{\sqrt{h}}\int_0^{\sqrt{h}}e^{-v^2}dv\leq\frac{2}{\sqrt{h}}+\frac{2e^h}{\sqrt{h}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\leq\frac{3e^h}{\sqrt{h}}.\end{aligned}$$

引理 2.5 $\{h(1-\cos m_h):h>0\}$ 关于 h 一致有界, 且满足

$$\begin{aligned}&\frac{h}{4e^2}\leq h(1-\cos m_h)\leq h, && h<1\\&\frac{1}{64}\leq h(1-\cos m_h)\leq\log 2+2<3, && h\geq 1\end{aligned}$$

其中, m_h 是 μ_h 的中位数.

注 $m_0=\pi/2$, 从上面结论可以看出 $\lim_{h\to\infty}m_h=0$, 而且不难得到对任意 $h>0$ 时, 都有 $0<m_h<\pi/2$. 反设 $m_h\geq\pi/2$, $\int_0^{m_h}e^{h\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{h\cos\theta}d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{m_h}e^{h\cos\theta}d\theta>\frac{\pi}{2}$ 而 $\int_{m_h}^{\pi}e^{h\cos\theta}d\theta<(\pi-m_h)\leq\frac{\pi}{2}$ 与中位数定义矛盾.

证 a) 当 $h<1$ 时, 已知 $C_2(h)\geq 2$, 且 $\frac{1}{2}C_2(h)=\int_0^{m_h}e^{h\cos\theta}d\theta\leq\frac{2e^h}{\sqrt{h}}\int_0^{\sqrt{h(1-\cos m_h)}}e^{-t^2}dt\leq\frac{2e}{\sqrt{h}}\sqrt{h(1-\cos m_h)}$. 因此可以得出结论

$$\frac{h}{4e^2}\leq h(1-\cos m_h)\leq h.$$

b) 当 $h\geq 1$ 时, 一方面, 由引理 2.4 知 $C_2(h)\geq\frac{e^h}{2\sqrt{h}}$, 且

$$\int_0^{m_h}e^{h\cos\theta}d\theta\leq\frac{2e^h}{\sqrt{h}}\int_0^{\sqrt{h(1-\cos m_h)}}e^{-t^2}dt\leq\frac{2e^h}{\sqrt{h}}\sqrt{h(1-\cos m_h)},$$

从而可得

$$h(1-\cos m_h) \geq \frac{1}{64};$$

另一方面, $\int_0^{m_h} e^{h\cos\theta}d\theta \geq \frac{\sqrt{2}e^h}{\sqrt{h}}\int_0^{\sqrt{h(1-\cos m_h)}} e^{-t^2}dt$, 利用极坐标变换, 有

$$\begin{aligned}(\int_0^{\sqrt{h(1-\cos m_h)}} e^{-x^2}dx)^2 =&(\int_0^{\sqrt{h(1-\cos m_h)}} e^{-x^2}dx)(\int_0^{\sqrt{h(1-\cos m_h)}} e^{-y^2}dy)\\ =&\int_0^{\sqrt{h(1-\cos m_h)}}\int_0^{\sqrt{h(1-\cos m_h)}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\\ \geq&\int_0^{\sqrt{h(1-\cos m_h)}}\int_0^{\pi/2} e^{-r^2}rdrd\theta\\ =&\frac{1}{4}\pi(1-e^{-h(1-\cos m_h)}),\end{aligned}$$

于是

$$\frac{C_2(h)}{2}=\int_0^{m_h} e^{h\cos\theta}d\theta \geq \frac{e^h}{\sqrt{2h}}\sqrt{\pi(1-e^{-h(1-\cos m_h)})}.$$

而对于 $C_2(h)$, 类似引理 2.4 的证明可得

$$\begin{aligned}C_2(h)=&\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{h\cos\theta}d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{h\cos\theta}d\theta \leq \frac{\pi}{2}+\int_0^1 \frac{e^{ht}}{\sqrt{1-t^2}}dt\\ =&\frac{\pi}{2}+\frac{2e^h}{\sqrt{h}}\int_0^{\sqrt{h}} e^{-v^2}dv \leq \frac{\pi}{2}+e^h\sqrt{\frac{\pi}{h}}.\end{aligned}$$

故而有,

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{2}e^h}{\sqrt{h}}\sqrt{\pi(1-e^{-h(1-\cos m_h)})} \leq \frac{\pi}{2}+e^h\sqrt{\frac{\pi}{h}}\\ \Longrightarrow&\sqrt{1-e^{-h(1-\cos m_h)}} \leq \frac{\sqrt{\pi h}}{2\sqrt{2}e^h}+\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\sqrt{\pi}}{2e}\right)\\ \Longrightarrow&e^{-h(1-\cos m_h)} \geq \frac{4e^2-\pi-4e\sqrt{\pi}}{8e^2} \geq \frac{1}{2e^2}\\ \Longrightarrow&h(1-\cos m_h) \leq \log 2+2<3.\end{aligned}$$

证毕!

3 主要结论

定理 3.1 对于任意 $h>0$, ν_h 为 Boltzmann 测度 μ_h 在映射 $x\to d(e_1,x)$ 下的像测度, 则 ν_h 满足一致的对数 Sobolev 不等式, 即对于任意光滑函数 $f: S\to\mathbb{R}$, 有 $\mathrm{Ent}_{\nu_h}(f^2) \leq$

$2C_{LS}(\nu_h)\int_0^\pi (f')^2 d\nu_h$, 其中对数 Sobolev 最佳常数 $C_{LS}(\nu_h)$ 一致有界, 且满足

$$\begin{aligned}&\frac{\pi^2}{32e^2}\log(1+\frac{2}{\pi}) \le C_{LS}(\nu_h) \le 8\pi^2\log 2, \quad 0<h<1;\\ &\frac{1}{4e} \le C_{LS}(\nu_h) \le 32e\sqrt{\pi}\bigvee\frac{24e^3}{h}. \qquad h\ge 1.\end{aligned}$$

进而有, 环 S 上的 Boltzmann 测度 μ_h 满足一致的对数 Sobolev 不等式, 且最佳常数 $C_{LS}(\mu_h)$ 满足

$$\begin{aligned}&\frac{\pi^2}{32e^2}\log(1+\frac{2}{\pi}) \le C_{LS}(\mu_h) \le 8\pi^2\log 2+1, \quad 0<h<1,\\ &\frac{1}{4e} \le C_{LS}(\mu_h) \le 32e\sqrt{\pi}\bigvee\frac{24e^3}{h}+1. \qquad h\ge 1.\end{aligned}$$

注 从定理结论中我们可以看出, 对于任意的 $h>0$, $C_{LS}(\mu_h)=O(1)$. 而在 [6] 中, 作者给出了该测度谱系的比较精确的刻画 $1\vee\frac{|h|}{7}\le\lambda_1(\mu_h)\le\sqrt{3}|h|+\frac{2h^2+3}{h^2+3}$. 此即说明 Poincaré 常数 $C_P(\mu_h)=1/\lambda_1(\mu_h)=O(1/h)$, 再通过 [10] 中的结论, 我们还可知道 Talagrand 传输不等式常数 $C_{W_2H}(\mu_h)\le O(1/\sqrt{h})$, 此也可佐证对数 Sobolev 不等式严格强于 Talagrand 传输不等式.

4 定理 3.1 的证明

根据降维定理 2.1, 我们仅需考虑一维测度 ν_h, 再由定理 2.3, 考虑如下的 b_+, b_-

$$\begin{aligned}b_+ &= \sup_{m_h<\alpha<\pi}\int_\alpha^\pi e^{h\cos\theta}d\theta\log(1+\frac{C_2(h)}{2\int_\alpha^\pi e^{h\cos\theta}d\theta})\int_{m_h}^\alpha\frac{d\theta}{e^{h\cos\theta}},\\ b_- &= \sup_{0<\alpha<m_h}\int_0^\alpha e^{h\cos\theta}d\theta\log(1+\frac{C_2(h)}{2\int_0^\alpha e^{h\cos\theta}d\theta})\int_{m_h}^\alpha\frac{d\theta}{e^{h\cos\theta}}.\end{aligned}$$

讨论将分两种情形展开.

情形 1 $0<h<1$. 先看 b_+ 的下界: 由 $0<m_h<\pi/2$, 有

$$\begin{aligned}b_+ \ge& \sup_{\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi}\int_\alpha^\pi e^{h\cos\theta}d\theta\log(1+\frac{C_2(h)}{2\int_\alpha^\pi e^{h\cos\theta}d\theta})\int_{\frac{\pi}{2}}^\alpha\frac{d\theta}{e^{h\cos\theta}}\\ \ge&\frac{1}{e}(\pi-\frac{3\pi}{4})\log(1+\frac{C_2(h)}{\pi-\frac{3\pi}{4}})e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{e^{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}\frac{\pi^2}{16}\log(1+\frac{C_2(h)}{\pi})\ge\frac{1}{e^2}\frac{\pi^2}{16}\log(1+\frac{2}{\pi}).\end{aligned}$$

其次, 考虑 b_+ 的上界. 因对任意 $C>0$，$x\log(1+\frac{C}{x})$ 在 $x>0$ 上都是单调递增的, 故有

$$\begin{aligned}b_+ &\le \sup_{0<\alpha<\pi}\int_\alpha^\pi e^{h\cos\theta}d\theta\log(1+\frac{C_2(h)}{2\int_\alpha^\pi e^{h\cos\theta}d\theta})\int_0^\alpha\frac{d\theta}{e^{h\cos\theta}}\\ &\le\sup_{0<\alpha<\pi}(\pi-\alpha)\alpha\log(1+\frac{\pi}{\pi-\alpha})=\sup_{0<\alpha<\pi}\alpha\log(1+\frac{\pi}{\alpha})(\pi-\alpha)\end{aligned}$$

$$\leq \sup_{0<\alpha<\pi} \pi\alpha \log(1+\frac{\pi}{\alpha}) = \pi^2 \log 2.$$

最后, 考虑 b_- 的上界

$$\begin{aligned} b_- &\leq \sup_{0<\alpha<\pi/2} \int_0^\alpha e^{h\cos\theta} d\theta \log(1+\frac{C_2(h)}{2\int_0^\alpha e^{h\cos\theta} d\theta}) \int_\alpha^{m_h} \frac{d\theta}{e^{h\cos\theta}} \\ &\leq \sup_{0<\alpha<\frac{\pi}{2}} e\alpha \log\left(1+\frac{\pi}{e\alpha}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \leq \frac{\pi^2}{4} e \log\left(1+\frac{2}{e}\right). \end{aligned}$$

故当 $0<h<1$ 时, 有 $\frac{\pi^2}{32e^2}\log\left(1+\frac{2}{\pi}\right) \leq C_{LS}(\nu_h) \leq 8\pi^2\log 2$.

情形 2 $h \geq 1$. 同情形 1, 首先考虑 b_+ 的下界

$$b_+ \geq \sup_{\pi/2<\alpha<\pi} \int_\alpha^\pi e^{h\cos\theta} d\theta \log(1+\frac{C_2(h)}{2\int_\alpha^\pi e^{h\cos\theta} d\theta}) \int_{\pi/2}^\alpha \frac{d\theta}{e^{h\cos\theta}}$$

由 $\int_\alpha^\pi e^{h\cos\theta} d\theta \geq \frac{\sqrt{2}e^{-h}}{\sqrt{h}} \int_0^{\sqrt{h(1+\cos\alpha)}} e^{t^2} dt$, $\int_{\pi/2}^\alpha \frac{d\theta}{e^{h\cos\theta}} \geq \frac{\sqrt{2}e^h}{\sqrt{h}} \int_{\sqrt{h(1+\cos\alpha)}}^{\sqrt{h}} e^{-t^2} dt$, 及 $x\log(1+\frac{C}{x}), C>0$ 在 $x>0$ 上的递增性, 有

$$\begin{aligned} b_+ &\geq \frac{2}{h} \sup_{0<x<\sqrt{h}} \int_0^x e^{t^2} dt \log(1+\frac{\sqrt{h}e^h C_2(h)}{2\sqrt{2}\int_0^x e^{t^2} dt}) \int_x^{\sqrt{h}} e^{-t^2} dt \\ &\geq \frac{2}{h} \sup_{0<x<1} \int_0^x e^{t^2} dt \log(1+\frac{e^{2h}}{4\sqrt{2}\int_0^x e^{t^2} dt}) \int_x^1 e^{-t^2} dt \\ &\geq \frac{2}{h} \int_0^{1/2} e^{t^2} dt \log(1+\frac{e^{2h}}{4\sqrt{2}\int_0^{1/2} e^{t^2} dt}) \int_{1/2}^1 e^{-t^2} dt \\ &\geq \frac{2}{h}\frac{1}{2}\log(1+\frac{e^{2h}}{2\sqrt{2}})\frac{1}{2e} \geq \frac{1}{2e}. \end{aligned}$$

其次, 对 b_+ 的上界进行估计.

$$\begin{aligned} b_+ &= \sup_{m_h<\alpha<\pi} \int_\alpha^\pi e^{h\cos\theta} d\theta \log(1+\frac{C_2(h)}{2\int_\alpha^\pi e^{h\cos\theta} d\theta}) \int_{m_h}^\alpha e^{-h\cos\theta} d\theta \\ &= \sup_{\pi/2\leq\alpha<\pi} \int_\alpha^\pi e^{h\cos\theta} d\theta \log(1+\frac{C_2(h)}{2\int_\alpha^\pi e^{h\cos\theta} d\theta}) \int_{m_h}^\alpha e^{-h\cos\theta} d\theta \\ &\quad \bigvee \sup_{m_h<\alpha<\pi/2} \int_\alpha^\pi e^{h\cos\theta} d\theta \log(1+\frac{C_2(h)}{2\int_\alpha^\pi e^{h\cos\theta} d\theta}) \int_{m_h}^\alpha e^{-h\cos\theta} d\theta \\ &= \sup_{-1<x\leq 0} \int_{-1}^x \frac{e^{ht}}{\sqrt{1-t^2}} dt \log(1+\frac{C_2(h)}{2\int_{-1}^x \frac{e^{ht}}{\sqrt{1-t^2}} dt}) \int_x^{\cos m_h} \frac{e^{-ht}}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &\quad \bigvee \sup_{0<x<\cos m_h} \int_{-1}^x \frac{e^{ht}}{\sqrt{1-t^2}} dt \log(1+\frac{C_2(h)}{2\int_{-1}^x \frac{e^{ht}}{\sqrt{1-t^2}} dt}) \int_x^{\cos m_h} \frac{e^{-ht}}{\sqrt{1-t^2}} dt. \end{aligned}$$

记

$$b_+^1 := \sup_{-1<x\le 0}\int_{-1}^{x}\frac{e^{ht}}{\sqrt{1-t^2}}dt\log(1+\frac{C_2(h)}{2\int_{-1}^{x}\frac{e^{ht}}{\sqrt{1-t^2}}dt})\int_{x}^{\cos m_h}\frac{e^{-ht}}{\sqrt{1-t^2}}dt$$
$$b_+^2 := \sup_{0<x<\cos m_h}\int_{-1}^{x}\frac{e^{ht}}{\sqrt{1-t^2}}dt\log(1+\frac{C_2(h)}{2\int_{-1}^{x}\frac{e^{ht}}{\sqrt{1-t^2}}dt})\int_{x}^{\cos m_h}\frac{e^{-ht}}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

1) 先考虑 b_+^1 的上界: 通过一个简单的放缩以及之前的变换, 易得

$$\begin{aligned}
b_+^1 &\le \sup_{-1<x\le 0}\int_{-1}^{x}\frac{e^{ht}}{\sqrt{1+t}}dt\log(1+\frac{C_2(h)}{2\int_{-1}^{x}\frac{e^{ht}}{\sqrt{1+t}}dt})\int_{x}^{\cos m_h}\frac{e^{-ht}}{\sqrt{1+t}}dt\\
&= \frac{4}{h}\sup_{0<x<\sqrt{h}}\int_{0}^{x}e^{t^2}dt\log(1+\frac{C_2(h)e^h\sqrt{h}}{4\int_0^x e^{t^2}dt})\int_{x}^{\sqrt{h(1+\cos m_h)}}e^{-t^2}dt\\
&\le \frac{4}{h}\sup_{0<x<\sqrt{h}}\int_{0}^{x}e^{t^2}dt\log(1+\frac{3e^{2h}}{4\int_0^x e^{t^2}dt})\int_{x}^{\infty}e^{-t^2}dt.
\end{aligned}$$

若上确界在 $x<1$ 时取得, 则由 $\displaystyle\int_0^x e^{u^2}du \le \int_0^1 e^{u^2}du \le e,\quad \int_x^\infty e^{-u^2}du \le \int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 可得

$$b_+^1 \le \frac{4}{h}e\log(1+\frac{3e^{2h}}{4e})\frac{\sqrt{\pi}}{2} < 4e\sqrt{\pi};$$

若上确界在 $x\ge 1$ 时取得, 则由

$$\begin{aligned}
&\int_0^x e^{u^2}du \le \int_0^1 e^{u^2}du + \int_1^x ue^{u^2}du \le \frac{e^{x^2}+e}{2} \le e^{x^2}\\
&\int_x^\infty e^{-u^2}du \le \int_x^\infty ue^{-u^2}du \le \frac{e^{-x^2}}{2},
\end{aligned}$$

可得

$$b_+^1 \le \frac{4}{h}\sup_{0<x<\sqrt{h}}e^{x^2}\log(1+\frac{3e^{2h}}{4e^{x^2}})\frac{1}{2e^{x^2}} = \frac{2}{h}\log(1+\frac{3e^{2h}}{4}) \le 4.$$

综上所述, 当 $h\ge 1$ 时, 有

$$b_+^1 \le 4e\sqrt{\pi}.$$

2) 再考虑 b_+^2 的上界: 注意 $0<x<\cos m_h<1$, 由 $\int_0^x e^{t^2}dt \le e^{x^2}$, 可得

$$\int_{-1}^{x}\frac{e^{ht}}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_{-1}^{0}\frac{e^{ht}}{\sqrt{1-t^2}}dt + \int_{0}^{x}\frac{e^{ht}}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$\leq \frac{2e^{-h}}{\sqrt{h}}\int_0^{\sqrt{h}} e^{t^2}dt + \frac{2e^h}{\sqrt{h}}\int_{\sqrt{h(1-x)}}^{\sqrt{h}} e^{-t^2}dt \leq \frac{2}{\sqrt{h}} + \frac{2e^h}{\sqrt{h}}\int_{\sqrt{h(1-x)}}^{\sqrt{h}} e^{-t^2}dt.$$

又 $\int_x^{\cos m_h} \frac{e^{-ht}}{\sqrt{1-t^2}}dt \leq \int_x^1 \frac{e^{-ht}}{\sqrt{1-t}}dt \leq \frac{2e^{-h}}{\sqrt{h}}\int_0^{\sqrt{h(1-x)}} e^{t^2}dt$, 令 $y=\sqrt{h(1-x)}$, 从而有

$$\begin{aligned}
b_+^2 &= \sup_{0<x<\cos m_h}\int_{-1}^x \frac{e^{ht}}{\sqrt{1-t^2}}dt \log(1+\frac{C_2(h)}{2\int_{-1}^x \frac{e^{ht}}{\sqrt{1-t^2}}dt})\int_x^{\cos m_h}\frac{e^{ht}}{\sqrt{1-t^2}}dt \\
&\leq \sup_{0<y<\sqrt{h}}(\frac{4}{he^h}+\frac{4}{h}\int_y^{\sqrt{h}} e^{-t^2}dt)\log(1+\frac{C_2(h)}{\frac{4}{\sqrt{h}}+\frac{4e^h}{\sqrt{h}}\int_y^{\sqrt{h}} e^{-t^2}dt})(\int_0^y e^{t^2}dt) \\
&\leq \sup_{0<y<\sqrt{h}}\frac{4}{he^h}(1+\frac{e^{h-y^2}}{2y})\log(1+\frac{\sqrt{h}C_2(h)}{4(1+\frac{e^{h-y^2}}{2y})})(\int_0^y e^{t^2}dt) \\
&\leq \sup_{0<y<1}\frac{4e}{he^h}\frac{\sqrt{h}C_2(h)}{4}\bigvee\sup_{1\leq y\leq\sqrt{h}}\frac{4}{he^{h-y^2}}(1+\frac{e^{h-y^2}}{2})\log(1+\frac{\sqrt{h}C_2(h)}{4(1+\frac{e^{h-y^2}}{2})}) \\
&\leq \frac{3e}{h}\bigvee\sup_{1\leq y\leq\sqrt{h}}\frac{4}{h}(\frac{1}{e^{h-y^2}}+\frac{1}{2})\log(1+\frac{\sqrt{h}C_2(h)}{4}) \\
&\leq \frac{3e}{h}\bigvee\frac{6}{h}\log(1+\frac{3e^h}{4}) \leq 12.
\end{aligned}$$

上面第二个不等式分别应用了 $\int_y^{\sqrt{h}} e^{-t^2}dt \leq \int_y^\infty e^{-t^2}dt \leq \frac{e^{-y^2}}{2y}$, 而第三个不等式则用到了 $\log(1+x)\leq x$ 与 $\int_0^x e^{t^2}dt \leq e^{x^2}, x\geq 0$.

最后, 对 b_- 的上界进行估计: 注意 $C_2(h)\leq\frac{3e^h}{\sqrt{h}}$, $h(1-\cos m_h)<3$, $\int_0^x e^{t^2}dt\leq e^{x^2}$.

$$\begin{aligned}
b_- &= \sup_{0<\alpha<m_h}\int_0^\alpha e^{h\cos\theta}d\theta\log(1+\frac{C_2(h)}{2\int_0^\alpha e^{h\cos\theta}d\theta})\int_\alpha^m e^{-h\cos\theta}dt \\
&\leq \sup_{\cos m_h<x<1}\int_x^1\frac{e^{ht}}{\sqrt{1-t}}dt\log(1+\frac{C_2(h)}{2\int_x^1\frac{e^{ht}}{\sqrt{1-t}}dt})\int_{\cos m_h}^x\frac{e^{-ht}}{\sqrt{1-t}}dt \\
&\leq \sup_{0<y<\sqrt{h(1-\cos m_h)}}\frac{4}{h}\int_0^y e^{-t^2}dt\log(1+\frac{C_2(h)e^{-h}\sqrt{h}}{4\int_0^y e^{-t^2}dt})\int_y^{\sqrt{h(1-\cos m_h)}} e^{t^2}dt \\
&\leq \frac{4}{h}\sup_{0<y<\sqrt{3}}\int_0^y e^{-t^2}dt\log(1+\frac{3}{4\int_0^y e^{-t^2}dt})\int_y^{\sqrt{3}} e^{t^2}dt \\
&\leq \frac{4}{h}\int_0^\infty e^{-t^2}dt\log(1+\frac{3}{4\int_0^\infty e^{-t^2}dt})\int_0^{\sqrt{3}} e^{t^2}dt \leq \frac{2\sqrt{\pi}e^3}{h}\log(1+\frac{3}{2\sqrt{\pi}}) \leq \frac{3e^3}{h}.
\end{aligned}$$

综合可得, $b_+\bigvee b_-\leq 4e\sqrt{\pi}\bigvee\frac{3e^3}{h}$, 进而可得定理 3.1 中的结论.

参 考 文 献

[1] Guionnet A, Zegarlinski B. Lectures on logarithmic Sobolev inequalities, in: Séminaire de Probabilité XXXVI[J]. Communications in Mathematical Physics, 2002, 1801(1): 1–134.

[2] Ledoux M. The concentration of measures phenomenon[J]. Math. Surveys Monographs, 2001, http://dx.doi.org/10.1090/surv/089

[3] Gjellout H, Guillin A, Wu L M. Transportation cost-information inequalities and applications to random dynamical systems and diffusions[J]. Ann. Proba., 2004, 32(3B): 2702–2732.

[4] Otto F, Villani C. Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality[J]. J. Funct. Anol. 2000, 173: 361–400.

[5] Zhang Z L, Qian B, Ma Y T. Uniform logarithmic sobolev inequality for boltzmann measures with exterior magnetic field over spheres[J]. Acta Appl. Math., 2011, 116: 305–315.

[6] Ma Y T, Zhang Z L. On the spectral gap of Boltzmann measures on the circle, submitted.

[7] Barthe F, Ma Y T, Zhang Z L. Logarithmic Sobolev inequalities for harmonic measures on spheres[J]. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 2014, 102(1): 234–248.

[8] Ma Y T, Zhang Z L. Logarithmic Sobolev and Poincaré inequalities for the circular Cauchy distribution[J]. Electronic Communications in Probability, 2014, DOI: 10.1214/ECP.v19-3071

[9] Barthe F, Roberto C. Sobolev inequalities for probability measures on the real line[J]. Studia Mathematica, 2003, 159(3): 481–497.

[10] Zhang Z L, Miao Y. An equivalent condition between Poincaré inequality and T2-transportation cost inequality[J]. Acta. Applicandae Mathematicae, 2010, 110(1): 39–46.

LOGARITHMIC SOBOLEV INEQUALITY ON BOLTZMANN MEASURES WITH PARAMETER ON CIRCLES

CHENG Xin [1], MAO Run [2], ZHANG Zheng-liang [1]

(1. Department of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

(2. Chongqing No.8 Secondary School, Chongqing 401120, China)

Abstract: In this paper, we mainly study logarithmic Sobolev inequality on Boltzmann Measures with parameter $h > 0$ on circles. By the method of dimension-reduction and estimating the Log-Sobolev optimal constant, denoted by $C_{LS}(\mu_h)$, we proved that the family of measures satisfy the uniform logarithmic Sobolev inequality in h and the optimal constant $C_{LS}(\mu_h)$ has a constant order in h, which, together with the known results, enhances the claim that logarithmic Sobolev inequality is strictly stronger than Talagrand's transportation and Poincaré inequalities .

Keywords: Boltzmann measure; logarithmic Sobolev inequality; transportation inequality; Poincaré inequality

2010 MR Subject Classification: 60E15; 39B62