Vol. 40 (2020)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

在 CEV 模型下带违约风险的时间一致再保险投资博弈

李国柱 , 马世霞
(河北工业大学理学院, 天津 300401)

摘 要: 本文研究两个竞争保险公司之间的非零和随机微分博弈问题. 利用博弈和随机动态规划方法, 获得了违约前和违约后的纳什均衡策略和相应的值函数. 最后对纳什均衡策略进行参数分析, 并给出经济解释.

关键词: 非零和随机微分博弈; 相对绩效; CEV 模型; 可违约风险
MR(2010) **主题分类号**: 62P05; 91B30; 91B70 **中图分类号**: O211.6; O29
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2020)06-0662-11

1 引言

近年来, 很多文章运用随机最优控制理论研究了多种关于保险公司的最优投资再保险问题. 一方面, 因为保险公司购买再保险可以有效的分散索赔风险, 而且将盈余投资到金融市场是获取利益的重要途径. 另一方面, 随机最优控制理论可以提供理论上可靠的、切实可行的解决方案. 关于保险公司最优策略的研究, 很多文章通常采用期望效用最大化作为目标函数. 例如, Lin and Li [1] 通过最大化终端财富的期望指数效用推导了最优再保险投资策略, 其中保险公司盈余过程遵循跳跃扩散风险过程. Cao and Wan [2] 通过最大化终端财富的预期指数和幂效用得到了最佳比例再保险和投资策略, 等等. 还有很多文章讨论其他的最优准则, 比如均值方差准则 (见文献 [3-4]).

如今, 尽管违约风险被认为是引发全球信贷危机的重要因素之一, 但由于其利润相对较高, 因此违约债券仍然受到很多投资者的青睐, 而且具有违约风险的最优投资组合选择问题已成为一个重要的研究领域. 在近些年的研究中, Zhao [5] 将可违约风险引入了跳扩散风险模型中的 Markowitz 均值方差最优再保险投资问题中. Zhu [6] 在可违约金融市场下通过最大化保险公司终端财富的期望效用推导出最优比例再保险和投资策略. Sun [7] 在方差保费原则和违约风险下推出了鲁棒最优再保险和投资策略, 等等.

前面提到的文献都只考虑单个保险公司的最优问题. 然而, 在竞争的经济环境下, 企业不可避免的要与对手竞争来突显自己的优势. 因此一些文章致力于处理两家公司的竞争问题. 例如, Bensoussan [8] 利用相对绩效的概念构造了非零和随机微分博弈得到了最优再保险投资策略. Zhu [9] 在 Heston 模型下考虑了均值方差保险公司的时间一致再保险投资博弈问题, 等等.

在本文中, 我们推广了 Zhu [9] 的模型, 考虑了在可违约风险下两个竞争保险公司之间的再保险投资博弈问题. 事实上, 保险公司乐于参与各种投资来从盈余中获取丰厚利润, 因此将

*收稿日期: 2019-06-18 接收日期:2019-12-05
基金项目: 国家自然科学基金项目 (11301133, 11471218).
作者简介: 李国柱 (1995–), 男, 山西运城, 硕士, 主要研究方向: 保险中的随机控制.

额外的可违约债券添加到投资组合中使模型更加通用. 另外, 这里我们采用更加具有可分析性的随机波动率模型：CEV 模型. 应用随机控制理论, 建立扩展的哈密顿 - 雅可比 - 贝尔曼方程, 分别推导出违约前和违约后的均衡策略和相应的值函数.

最后, 第 2 节介绍了模型的构造. 在第 3 节中, 我们通过解扩展的 HJB 方程得到了违约前和违约后的均衡策略和相应的值函数. 第 4 节提供数值研究, 讨论模型参数对均衡策略的影响.

2 模型建立

令 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}, \mathbb{P})$ 是一个完备的过滤概率空间满足通常的条件, 即 $\{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}$ 是右连续的, $\mathbb{P}$ 是完备的, 且 $\mathcal{F}_t$ 表示时间 t 之前可获得的信息. 不考虑再保险投资的情况下我们假设保险公司 $k, k\in\{1,2\}$ 的剩余过程是扩散近似模型,

$$dR_k(t) = \mu_k dt + \sigma_k dB_k(t), \tag{2.1}$$

这里 $\mu_k, \sigma_k > 0$ 分别是保费回报率以及余额过程的波动, $\{B_k(t)\}$ 是两个标准布朗运动, 为了进一步考虑这两家保险公司业务的相关性, 我们用 ρ_0 表示 $\{B_1(t)\}$ 和 $\{B_2(t)\}$ 之间的正的相关系数, 即 $E[B_1(t)B_2(t)] = \rho_0 t, 0 < \rho_0 < 1$.

两个保险公司可以购买比例再保险来管理保险业务风险, 并且用 $a_k(t)$ 表示保险公司 k 在 t 时刻的再保险策略且 $a_k(t) \in R^+$. 当 $a_k(t) > 1$, 保险公司 k 作为其他保险公司的再保险人并获得新业务. 当 $a_k(t) \in [0,1]$, 意味着保险公司 k 将承担索赔的 $100a_k(t)\%$, 再保险公司将承担剩余的 $100(1-a_k(t))\%$ 且收取再保险保费率 $(1-a_k(t))\eta_k$, 这里 $\eta_k \ge \mu_k$ 是再保险公司的保费回报率. 因此, 在比例再保险下保险公司 $k\in\{1,2\}$ 的余额过程变为

$$\begin{aligned} dR_k(t) &= [\mu_k - (1-a_k(t))\eta_k]dt + \sigma_k a_k(t) dB_k(t) \\ &= [\theta_k + \eta_k a_k(t)]dt + \sigma_k a_k(t) dB_k(t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

这里 $\theta_k = \mu_k - \eta_k$ 是保费差.

另外, 保险公司还可以投资于无风险资产, 风险资产和可违约债券. 无风险资产的价格过程 $S_0(t)$ 由以下常微分方程给出

$$\frac{dS_0(t)}{S_0(t)} = r_0 dt, \tag{2.3}$$

这里 $r_0 > 0$ 是固定的无风险利率. 根据 CEV 模型, 风险资产的价格过程 $S(t)$ 表示为

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma S^{\beta}(t) dW(t), \tag{2.4}$$

$\mu, \sigma S^{\beta}(t), \beta$ 分别是股票的预期收益率, 瞬时波动率和弹性参数, β 满足一般条件 $\beta \ge 0$ 且 $\{W(t)\}_{0\le t\le T}$ 也是标准布朗运动独立于 $\{B_1(t)\}$ 和 $\{B_2(t)\}$. 令 τ 是一个非负随机变量, 代表发行债券公司的违约时刻, $T_1 > T$ 代表可违约债券的到期日. 定义违约过程为 $Z(t) := 1_{\{\tau\le t\}}$, 其中 1 表示示性函数如果有跳其值为 1, 否则为零. 因此 $Z(t) = 0$ 和 $Z(t) = 1$ 分别代表违约前和违约后. 按照 Driessen [10], 违约时刻 τ 可以被看成在概率测度 $\mathbb{P}$ 下带有强度 $h^P > 0$ 的泊松过程的第一个到达时间, h^P 衡量了违约的到达率. 令 $\mathbb{G} := \{\mathcal{G}_t\}_{t\in[0,T]}$ 是一个扩大的

过滤, 这里 $\mathcal{G}_t=\mathcal{F}_t\vee\sigma\{Z(s):0\le s\le t\}$, 在这个过滤下 τ 是一个停时. 假设违约发生时, 投资者在违约前收回违约债券市值的一小部分, 违约后债券的价值为零. 因此我们用 $0\le\zeta\le 1$ 表示违约发生时的损失率, $1-\zeta$ 表示回收率. 我们用 $\delta=h^Q\zeta$ 表示风险中性信贷利差, $h^Q=h^P/\Delta$ 是违约泊松过程在风险中性测度 $\mathbb{Q}$ 下的到达强度. 按照 Bielecki and Jang [11], 我们首先定义过程

$$M^P(t):=Z(t)-\int_0^t(1-Z(u-))h^P du$$

是在测度 $\mathbb{P}$ 下的一个 $\mathbb{G}$- 鞅, 这里我们用 $1/\Delta$ 表示违约风险溢价. 根据 Duffie and Singleton [12], 在风险中性测度 $\mathbb{Q}$ 下违约发生的概率比在真实概率测度 $\mathbb{P}$ 下发生的概率大, 因此有 $1/\Delta=h^Q/h^P\ge 1$. 根据 Bielecki and Jang [11], 我们得到违约债券在测度 $\mathbb{P}$ 下的价格动态为

$$\frac{dB(t,T_1)}{B(t-,T_1)}=r_0dt+(1-Z(t-))(1-\Delta)\delta dt-(1-Z(t-))\zeta dM^P(t),\tag{2.5}$$

我们用 $\pi_{k,1}(t),\pi_{k,2}(t)$ 分别表示保险公司 k 投资到风险资产和违约债券上的金额, 其余的投资到无风险资产中, 那么 $\pi_k(t)=(\pi_{k,1}(t),\pi_{k,2}(t),a_k(t))$ 是保险公司 $k,(k\in 1,2)$ 的一个再保险投资策略, 在策略 $\pi_k(t)$ 下, 保险公司 k 的财富过程 $\{X_k^{\pi_k}(t)\}_{t\ge 0}$ 可以表示为

$$\begin{aligned}dX_k^{\pi_k}(t)&=dR_k(t)+\pi_{k,1}(t)\frac{dS(t)}{S(t)}+\pi_{k,2}(t)\frac{dB(t,T_1)}{B(t-,T_1)}+(X_k^{\pi_k}(t)-\pi_{k,1}(t)-\pi_{k,2}(t))\frac{dS_0(t)}{S_0(t)}\\&=[r_0X_k^{\pi_k}(t)+\pi_{k,1}(t)(\mu-r_0)+\theta_k+a_k(t)\eta_k+(1-Z(t-))\delta\pi_{k,2}(t)]dt\\&\quad+\pi_{k,1}(t)\sigma S^\beta(t)dW(t)+a_k(t)\sigma_k dB_k(t)-(1-Z(t-))\zeta\pi_{k,2}(t)dZ(t),\end{aligned}\tag{2.6}$$

$X_k^{\pi_k}(0)=x_k$ 是初始余额.

定义 2.1 (可行策略) 对于保险公司 k 而言, 再保险投资策略 $\pi_k(t):=(\pi_{k,1}(t),\pi_{k,2}(t),a_k(t))$ 是可行的, 如果

(1) $\pi_k(t)$ 关于 $\mathbb{G}$- 可测的, 且 $E[\int_0^T(\pi_{k,1}^2(t)+\pi_{k,2}^2(t)+a_k^2(t))dt]<\infty$;

(2) 对于 $\forall(x_k,s,z)\in R\times R^+\times\{0,1\}$, 随机微分方程 (6) 有唯一的解 $\{X_k^{\pi_k}(t)\}_{t\in[0,T]}$. 用 Π_k 表示保险公司 k 所有可行策略的集合.

在竞争的经济环境下, 每个保险公司为了比竞争对手更有优势, 按照 Espinosa and Touzi [13], 对于每个保险公司我们有下列目标函数

$$\begin{aligned}J_k^{\pi_k,\pi_j}(t,x_k,x_j,s,z):&=E_{t,x_k,x_j,s,z}\left[U_k\left((1-\kappa_k)X_k^{\pi_k}(T)+\kappa_k(X_k^{\pi_k}(T)-X_j^{\pi_j}(T))\right)\right]\\&=E_{t,x_k,x_j,s,z}\left[U_k\left(X_k^{\pi_k}(T)-\kappa_kX_j^{\pi_j}(T)\right)\right],\end{aligned}\tag{2.7}$$

这里 $k,j\in\{1,2\},k\ne j,U_k$ 是严格增的并且严格凹的效用函数, $E_{t,x_k,x_j,s}[\cdot]$ 和 $Var_{t,x_k,x_j,s}[\cdot]$ 是条件期望和方差, 参数 κ_k $(0<\kappa_k<1)$ 衡量了保险公司 k 的相对关注度, κ_k 越大意味着保险公司 k 更关注相对财富, 更具竞争力. 当 $\kappa_k=0$ 时, 目标函数可以简化为无竞争的单一保险公司的传统优化问题. 令 $\tilde{X}_k^{\pi_k,\pi_j}(t):=X_k^{\pi_k}(t)-\kappa_kX_j^{\pi_j}(t)$ 是保险公司 k 的相对财富过程,

$\tilde{X}_k^{\pi_k,\pi_j}(t)$ 的动态被描述为

$$\begin{aligned} d\tilde{X}_k^{\pi_k,\pi_j}(t) =& dX_k^{\pi_k}(t) - \kappa_k dX_j^{\pi_j}(t) \\ =& [r_0 \tilde{X}_k^{\pi_k,\pi_j}(t) + (\pi_{k,1}(t) - \kappa_k \pi_{j,1}(t))(\mu - r_0) + \theta_k - \kappa_k \theta_j \\ & + \eta_k a_k(t) - \kappa_k \eta_j a_j(t) + (1 - Z(t-))\delta(\pi_{k,2}(t) - \kappa_k \pi_{j,2}(t))]dt \\ & + (\pi_{k,1}(t) - \kappa_k \pi_{j,1}(t))\sigma S^\beta(t) dW(t) + \sigma_k a_k(t) dB_k(t) - \kappa_k \sigma_j a_j(t) dB_j(t) \\ & - (1 - Z(t-))\zeta(\pi_{k,2}(t) - \kappa_k \pi_{j,2}(t)) dZ(t). \end{aligned} \tag{2.8}$$

初始条件为 $\tilde{X}_k^{\pi_k,\pi_j}(0) = \tilde{x}_k = x_k - \kappa_k x_j$, 根据 Zhu [9], 我们在一个非零和随机微分博弈框架下建立这个竞争问题. 对于一个可行策略 $\pi_k \in \Pi_k$ 和任一状态 $(t, \tilde{x}_k, s, z) \in [0, T] \times R \times R^+ \times \{0, 1\}$, 保险公司 $k \in \{1, 2\}$ 的目标是最大化

$$\hat{J}_k^{\pi_k,\pi_j^*}(t, \tilde{x}_k, s, z) := E_{t,\tilde{x}_k,s,z}[U_k(\tilde{X}_k^{\pi_k,\pi_j^*}(T))]. \tag{2.9}$$

问题 1 两个竞争的保险公司之间经典的非零和随机微分博弈是去找到一个纳什均衡 $(\pi_1^*, \pi_2^*) \in \Pi_1 \times \Pi_2$ 使得对于任意 $(\pi_1, \pi_2) \in \Pi_1 \times \Pi_2$, 我们有

$$\begin{cases} \hat{J}_1^{\pi_1^*,\pi_2^*}(t, \tilde{x}_1, s, z) \geq \hat{J}_1^{\pi_1,\pi_2^*}(t, \tilde{x}_1, s, z), \\ \hat{J}_2^{\pi_1^*,\pi_2^*}(t, \tilde{x}_2, s, z) \geq \hat{J}_2^{\pi_1^*,\pi_2}(t, \tilde{x}_2, s, z). \end{cases}$$

为了解决问题 1, 我们定义保险公司 $k \in \{1, 2\}$ 的值函数为

$$V^k(t, \tilde{x}_k, s, z) = \hat{J}_k^{(\pi_k^*,\pi_j^*)}(t, \tilde{x}_k, s, z) = \sup_{\pi_k \in \Pi_k} \hat{J}_k^{(\pi_k,\pi_j^*)}(t, \tilde{x}_k, s, z), \tag{2.10}$$

这里 $\hat{J}_k^{(\pi_k,\pi_j^*)}(t, \tilde{x}_k, s, z)$ 由 (2.9) 给出且 π_k^* 是保险公司 $k \in \{1, 2\}$ 的均衡策略. 并且假设两个保险公司都采用指数效用函数被定义为

$$U_k(x) = -\frac{1}{m_k} exp(-m_k x), \quad m_k > 0, \quad k \in \{1, 2\},$$

这里 m_k 代表绝对风险厌恶系数.

根据动态规划原则, HJB 方程为

$$\sup_{\pi_k \in \Pi_k} \left\{ \mathcal{A}^{\pi_k,\pi_j^*} W^k(t, \tilde{x}_k, s, z) \right\} = 0, \tag{2.11}$$

这里变分算子被定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(\pi_k,\pi_j)} W^k =& W_t^k + [r_0 \tilde{x}_k + (\mu - r_0)(\pi_{k,1}(t) - \kappa_k \pi_{j,1}(t)) + (\theta_k - \kappa_k \theta_j) \\ & + \eta_k a_k(t) - \kappa_k \eta_j a_j(t) + (1 - z)\delta(\pi_{k,2}(t) - \kappa_k \pi_{j,2}(t))] W_{\tilde{x}_k}^k \\ & + \mu s W_s^k + \frac{1}{2} \left[\sigma_k^2 a_k^2(t) + \kappa_k^2 \sigma_j^2 a_j^2(t) - 2\rho \kappa_k \sigma_k \sigma_j a_k(t) a_j(t) \right. \\ & \left. + (\pi_{k,1}(t) - \kappa_k \pi_{j,1}(t))^2 \sigma^2 s^{2\beta} \right] W_{\tilde{x}_k \tilde{x}_k}^k + \frac{1}{2} \sigma^2 s^{2(\alpha+1)} W_{ss}^k \\ & + (\pi_{k,1}(t) - \kappa_k \pi_{j,1}(t)) \sigma^2 s^{2\beta+1} W_{\tilde{x}_k s}^k + h^P (1 - z) \\ & \times \left[W^k(t, \tilde{x}_k - \zeta(\pi_{k,2}(t) - \kappa_k \pi_{j,2}(t)), s, z+1) - W^k(t, \tilde{x}_k, s, z) \right]. \end{aligned}$$

3 模型的解

本节我们将给出在违约前和违约后两种情况下的纳什均衡再保险投资策略和相应的值函数.

3.1 违约后的情况

违约后即意味着 $z=1$, HJB 方程 (2.11) 变为

$$\sup_{\pi_k\in\Pi_k}\left\{\mathcal{A}^{\pi_k,\pi_j^*}W^k(t,\tilde{x}_k,s,1)\right\}=0, \tag{3.1}$$

带有边界条件 $W^k(T,\tilde{x}_k,s,1)=-\frac{1}{m_k}exp(-m_k\tilde{x}_k)$. 根据上式的结构以及边界条件我们猜测违约后的值函数有下列形式:

$$W^k(t,\tilde{x}_k,s,1)=-\frac{1}{m_k}exp\left\{-m_k\left[e^{r_0(T-t)}\tilde{x}_k+A_k(t)s^{-2\beta}+B_k(t)\right]\right\}g_{k,1}(t), \tag{3.2}$$

这里 $g_{k,1}(T)=1,\quad A_k(T)=B_k(T)=0$. 直接计算得到

$$\begin{aligned}
&W_t^k=[\frac{g'_{k,1}(t)}{g_{k,1}(t)}+r_0m_k\tilde{x}_ke^{r_0(T-t)}-m_kA'_k(t)s^{-2\beta}-m_kB'_k(t)]W^k,\\
&W_{\tilde{x}_k}^k=-m_ke^{r_0(T-t)}W^k,\quad W_s^k=2\beta m_kA_k(t)s^{-2\beta-1}W^k,\\
&W_{\tilde{x}_k\tilde{x}_k}^k=m_k^2e^{2r_0(T-t)}W^k,\quad W_{\tilde{x}_ks}^k=-2\beta m_k^2A_k(t)s^{-2\beta-1}e^{r_0(T-t)}W^k,\\
&W_{ss}^k=\left[4m_k^2\beta^2A_k^2(t)s^{-4\beta-2}-2\beta(2\beta+1)m_kA_k(t)s^{-2\beta-2}\right]W^k.
\end{aligned}$$

将偏导数带入 (3.1) 式得

$$\begin{aligned}
\inf_{\pi_k\in\Pi_k}\{&\frac{g'_{k,1}(t)}{g_{k,1}(t)}-m_kA'_k(t)s^{-2\beta}-m_kB'_k(t)+[(\mu-r_0)(\pi_{k,1}(t)-\kappa_k\pi_{j,1}^*(t))\\
&+\theta_k-\kappa_k\theta_j+\eta_ka_k(t)-\kappa_k\eta_ja_j^*(t)](-m_ke^{r_0(T-t)})+2\beta\mu sm_kA_k(t)s^{-2\beta-1}\\
&+\frac{1}{2}[\sigma_k^2a_k^2(t)+\kappa_k^2\sigma_j^2a_j^{*2}(t)-2\rho\kappa_k\sigma_k\sigma_ja_k(t)a_j^*(t)+(\pi_{k,1}(t)-\kappa_k\pi_{j,1}^*(t))^2\sigma^2s^{2\beta}]\\
&\times(m_k^2e^{2r_o(T-t)})+2\sigma^2m_k^2\beta^2A_k^2(t)s^{-2\beta}-(2\beta+1)\beta m_kA_k(t)\sigma^2\\
&-2\beta\sigma^2m_k^2A_k(t)e^{r_0(T-t)}(\pi_{k,1}(t)-\kappa_k\pi_{j,1}^*(t))\}=0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

根据一阶条件得到最优策略为

$$\begin{cases}
a_k^*(t)=\frac{\eta_k}{\sigma_k^2m_ke^{r_0(T-t)}}+\frac{\sigma_j}{\sigma_k}\rho\kappa_ka_j^*(t),\\
\pi_{k,1}^*(t)=\frac{2\beta\sigma^2m_kA_k(t)+\mu-r_0}{\sigma^2s^{2\beta}m_ke^{r_0(T-t)}}+\kappa_k\pi_{j,1}^*(t).
\end{cases} \tag{3.4}$$

将 (3.4) 式带入 (3.3) 式中化简得到

$$\begin{aligned}
&\frac{g'_{k,1}(t)}{g_{k,1}(t)}+[\kappa_k\eta_ja_j^*(t)-\frac{\sigma_j}{\sigma_k}\kappa_k\eta_k\rho a_j^*(t)-(\theta_k-\kappa_k\theta_j)]m_ke^{r_0(T-t)}-\frac{\eta_k^2}{2\sigma_k^2}\\
&\qquad+\frac{1}{2}\kappa_k^2\sigma_j^2a_j^{*2}(t)m_k^2e^{2r_0(T-t)}(1-\rho^2)-m_k[B'_k(t)+(2\beta+1)\beta A_k(t)\sigma^2]\\
&\qquad+s^{-2\beta}[-m_kA'_k(t)+2\beta m_kr_0A_k(t)-\frac{(\mu-r_0)^2}{2\sigma^2}]=0,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

分离变量得

$$\begin{aligned}&\frac{g'_{k,1}(t)}{g_{k,1}(t)}+[\kappa_k\eta_j a_j^*(t)-\frac{\sigma_j}{\sigma_k}\kappa_k\eta_k\rho a_j^*(t)-(\theta_k-\kappa_k\theta_j)]m_k e^{r_0(T-t)}\\&\qquad-\frac{\eta_k^2}{2\sigma_k^2}+\frac{1}{2}\kappa_k^2\sigma_j^2a_j^{*2}(t)m_k^2e^{2r_0(T-t)}(1-\rho^2)=0,\\&A'_k(t)-2\beta r_0A_k(t)+\frac{(\mu-r_0)^2}{2m_k\sigma^2}=0,\quad B'_k(t)+(2\beta+1)\beta A_k(t)\sigma^2=0.\end{aligned}$$

根据边界条件并且解相应的微分方程得到

$$A_k(t)=\frac{(\mu-r_0)^2}{4\beta r_0m_k\sigma^2}(1-e^{-2r_0\beta(T-t)}),\tag{3.6}$$

$$B_k(t)=\frac{(2\beta+1)(\mu-r_0)^2}{8r_0^2m_k\beta}(e^{-2r_0\beta(T-t)}-1)+\frac{(2\beta+1)(\mu-r_0)^2}{4r_0m_k}(T-t),\tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}g_{k,1}(t)=exp\Big\{&\frac{m_k}{r_0}(1-e^{r_0(T-t)})[\theta_k-\kappa_k\theta_j-\kappa_k\eta_ja_j^*(t)+\frac{\eta_k\kappa_k\sigma_ja_j^*(t)\rho}{\sigma_k}]\\&-\frac{\eta_k^2}{2\sigma_k^2}(T-t)+\frac{1}{4r_0}\kappa_k^2\sigma_j^2a_j^{*2}(t)m_k^2(\rho^2-1)(1-e^{2r_0(T-t)})\Big\}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

3.2 违约前的情况

违约前即意味着 $z=0$, HJB 方程 (3.1) 变为

$$\sup_{\pi_k\in\Pi_k}\left\{\mathcal{A}^{\pi_k,\pi_j^*}W^k(t,\tilde{x}_k,s,0)\right\}=0,\tag{3.9}$$

带有边界条件 $W^k(T,\tilde{x}_k,s,0)=-\frac{1}{m_k}\exp(-m_k\tilde{x}_k)$. 同样我们猜测违约前的值函数有下列形式:

$$W^k(t,\tilde{x}_k,s,0)=-\frac{1}{m_k}\exp\left\{-m_k\left[e^{r_0(T-t)}\tilde{x}_k+\bar{A}_k(t)s^{-2\beta}+\bar{B}_k(t)\right]\right\}g_{k,0}(t),\tag{3.10}$$

这里 $g_{k,0}(T)=1,\quad \bar{A}_k(T)=\bar{B}_k(T)=0$. 直接计算得到

$$\begin{aligned}&W_t^k=[\frac{g'_{k,0}(t)}{g_{k,0}(t)}+r_0m_k\tilde{x}_ke^{r_0(T-t)}-m_k\bar{A}'_k(t)s^{-2\beta}-m_k\bar{B}'_k(t)]W^k,\\&W^k_{\tilde{x}_k}=-m_ke^{r_0(T-t)}W^k,\quad W^k_s=2\beta m_k\bar{A}_k(t)s^{-2\beta-1}W^k,\\&W^k_{\tilde{x}_k\tilde{x}_k}=m_k^2e^{2r_0(T-t)}W^k,\quad W^k_{\tilde{x}_ks}=-2\beta m_k^2\bar{A}_k(t)s^{-2\beta-1}e^{r_0(T-t)}W^k,\\&W^k_{ss}=\left[4m_k^2\beta^2\bar{A}_k^2(t)s^{-4\beta-2}-2\beta(2\beta+1)m_k\bar{A}_k(t)s^{-2\beta-2}\right]W^k,\\&W^k(t,\tilde{x}_k-\zeta(\pi_{k,2}(t)-\kappa_k\pi^*_{j,2}(t)),s,1)-W^k(t,\tilde{x}_k,s,0)=W^k\\&\times[\exp\{m_k\zeta(\pi_{k,2}(t)-\kappa_k\pi^*_{j,2}(t))e^{r_0(T-t)}+m_ks^{-2\beta}(\bar{A}_k(t)-A_k(t))\\&+m_k(\bar{B}_k(t)-B_k(t))\}\frac{g_{k,1}(t)}{g_{k,0}(t)}-1].\end{aligned}$$

将偏导数带入 (3.9) 式得

$$\begin{aligned}&\inf_{\pi_k\in\Pi_k}\left\{\frac{g'_{k,0}(t)}{g_{k,0}(t)}-m_k\bar{A}'_k(t)s^{-2\beta}-m_k\bar{B}'_k(t)+\big[(\mu-r_0)(\pi_{k,1}(t)-\kappa_k\pi^*_{j,1}(t))+\theta_k\right.\\&\quad-\kappa_k\theta_j+\eta_k a_k(t)-\kappa_k\eta_j a^*_j(t)+\delta(\pi_{k,2}(t)-\kappa_k\pi^*_{j,2}(t))\big]\left(-m_k e^{r_0(T-t)}\right)\\&\quad+2\sigma^2m_k^2\beta^2\bar{A}_k^2(t)s^{-2\beta}-(2\beta+1)\beta m_k\bar{A}_k(t)\sigma^2+2\beta\mu s m_k\bar{A}_k(t)s^{-2\beta-1}\\&\quad+\frac{1}{2}[\sigma_k^2a_k^2(t)+\kappa_k^2\sigma_j^2a_j^{*2}(t)-2\rho\kappa_k\sigma_k\sigma_j a_k(t)a^*_j(t)+(\pi_{k,1}(t)-\kappa_k\pi^*_{j,1}(t))^2\sigma^2s^{2\beta}]\\&\quad\times(m_k^2e^{2r_o(T-t)})-2\beta\sigma^2m_k^2\bar{A}_k(t)e^{r_0(T-t)}(\pi_{k,1}(t)-\kappa_k\pi^*_{j,1}(t))\\&\quad+[\exp\left\{m_k\zeta(\pi_{k,2}(t)-\kappa_k\pi^*_{j,2}(t))e^{r_0(T-t)}+m_ks^{-2\beta}(\bar{A}_k(t)-A_k(t))\right.\\&\quad\left.\left.+m_k(\bar{B}_k(t)-B_k(t))\right\}\frac{g_{k,1}(t)}{g_{k,0}(t)}-1]h^P\right\}=0\end{aligned}\tag{3.11}$$

根据一阶条件得到最优策略为：

$$\left\{\begin{array}{l}a^*_k(t)=\frac{\eta_k}{\sigma_k^2m_ke^{r_0(T-t)}}+\frac{\sigma_j}{\sigma_k}\rho\kappa_k a^*_j(t),\\ \pi^*_{k,1}(t)=\frac{2\beta\sigma^2m_k\bar{A}_k(t)+\mu-r_0}{\sigma^2s^{2\beta}m_ke^{r_0(T-t)}}+\kappa_k\pi^*_{j,1}(t),\\ \pi^*_{k,2}(t)=\frac{G_k(t)}{m_k\zeta e^{r_0(T-t)}}+\kappa_k\pi^*_{j,2}(t).\end{array}\right.\tag{3.12}$$

这里 $G_k(t)=ln[\frac{\delta g_{k,0}(t)}{h^P\zeta g_{k,1}(t)}]-m_ks^{-2\beta}(\bar{A}_k(t)-A_k(t))-m_k(\bar{B}_k(t)-B_k(t))$. 将 $\pi^*_k(t)$ 带入 (3.11) 式中化简得到

$$\begin{aligned}&\frac{g'_{k,0}(t)}{g_{k,0}(t)}-\frac{\delta}{\zeta}lng_{k,0}(t)+[\kappa_k\eta_ja^*_j(t)-\frac{\sigma_j}{\sigma_k}\kappa_k\eta_k\rho a^*_j(t)-(\theta_k-\kappa_k\theta_j)]m_ke^{r_0(T-t)}\\&+\frac{1}{2}\kappa_k^2\sigma_j^2a_j^{*2}(t)m_k^2e^{2r_0(T-t)}(1-\rho^2)+\frac{\delta}{\zeta}[lng_{k,1}(t)-m_kB_k(t)]+\frac{\delta}{\zeta}(1-ln\frac{\delta}{h^P\zeta})\\&+s^{-2\beta}[-m_k\bar{A}'_k(t)+2\beta m_kr_0\bar{A}_k(t)-\frac{(\mu-r_0)^2}{2\sigma^2}+\frac{\delta}{\zeta}m_k(\bar{A}_k(t)-A_k(t))]\\&-h^P-\frac{\eta_k^2}{2\sigma_k^2}-m_k[\bar{B}'_k(t)+(2\beta+1)\beta\bar{A}_k(t)\sigma^2-\frac{\delta}{\zeta}\bar{B}_k(t)]=0,\end{aligned}\tag{3.13}$$

同样分离变量并根据边界条件 $g_{k,0}(T)=1$, $\bar{A}_k(T)=\bar{B}_k(T)=0$, 解相应的微分方程得到 $g_{k,0}(t),\bar{A}_k(t),\bar{B}_k(t)$ 的表达式分别为

$$\begin{aligned}\bar{A}_k(t)&=e^{(2\beta r_0+\frac{\delta}{\zeta})(t-T)}\int_t^T\frac{\delta}{\zeta}A_k(s)e^{(2\beta r_0+\frac{\delta}{\zeta})(T-s)}ds\\&\quad+\frac{\zeta(\mu-r_0)^2}{2\sigma^2m_k(2\beta r_0\zeta+\delta)}(1-e^{(2\beta r_0+\frac{\delta}{\zeta})(t-T)}),\end{aligned}\tag{3.14}$$

$$\bar{B}_k(t)=e^{\frac{\delta}{\zeta}(t-T)}(\int_t^T(2\beta+1)\beta\sigma^2\bar{A}_k(s)e^{\frac{\delta}{\zeta}(T-s)}ds),\tag{3.15}$$

$$g_{k,0}(t)=\exp\{e^{-\frac{\delta}{\zeta}(T-t)}\int_t^Te^{\frac{\delta}{\zeta}(T-s)}[\Phi_{k,0}e^{r_0(T-s)}+\Psi_{k,0}e^{2r_0(T-s)}+\Lambda_{k,0}]ds\},\tag{3.16}$$

这里

$$\Phi_{k,0}=m_k[\kappa_k\eta_j a_j^*(t)-\frac{\sigma_j}{\sigma_k}\kappa_k\eta_k\rho a_j^*(t)-(\theta_k-\kappa_k\theta_j)]+\frac{\delta}{\zeta e^{r_0(T-t)}}[lng_{k,1}(t)-m_kB_k(t)],$$

$$\Psi_{k,0}=\frac{1}{2}\kappa_k^2\sigma_j^2a_j^{*2}(t)m_k^2(1-\rho^2),\qquad \Lambda_{k,0}=-\frac{\eta_k^2}{2\sigma_k^2}+\frac{\delta}{\zeta}(1-ln\frac{\delta}{h^P\zeta})-h^P,$$

$A_k(t),B_k(t),g_{k,1}(t)$ 由 (3.6)–(3.8) 给出.

对于保险公司 k, 结合违约前和违约后的结果, 我们得出 HJB 方程 (2.11) 的解如下

$$\tilde{W}^k(t,\tilde{x}_k,s,z)=(1-z)W^k(t,\tilde{x}_k,s,0)+zW^k(t,\tilde{x}_k,s,1),\quad z=0,1. \tag{3.17}$$

另外, 最优策略 $\pi_k^*=(\pi_{k,1}^*,\pi_{k,2}^*,a_k^*)$ 如下

$$\left\{\begin{array}{lcll}\pi_{k,1}^*(t) & = & \left\{\begin{array}{ll}\frac{2\beta\sigma^2m_k\bar{A}_k(t)+\mu-r_0}{\sigma^2s^{2\beta}m_ke^{r_0(T-t)}}+\kappa_k\pi_{j,1}^*(t), & t\in[0,\tau\wedge T],\\ \frac{2\beta\sigma^2m_kA_k(t)+\mu-r_0}{\sigma^2s^{2\beta}m_ke^{r_0(T-t)}}+\kappa_k\pi_{j,1}^*(t), & t\in[\tau\wedge T,T],\end{array}\right. \\ \pi_{k,2}^*(t) & = & \left\{\begin{array}{ll}\frac{G_k(t)}{m_k\zeta e^{r_0(T-t)}}+\kappa_k\pi_{j,2}^*(t), & t\in[0,\tau\wedge T],\\ 0, & t\in[\tau\wedge T,T],\end{array}\right. \\ a_k^*(t) & = & \frac{\eta_k}{\sigma_k^2m_ke^{r_0(T-t)}}+\frac{\sigma_j}{\sigma_k}\rho\kappa_ka_j^*(t), & t\in[0,T].\end{array}\right. \tag{3.18}$$

定理 3.1 当两个保险公司都采用带有边界条件为 $U_k(\tilde{x}_k)=-\frac{1}{m_k}\exp(-m_k\tilde{x}_k)$ 的指数效用函数时, 纳什均衡投资策略为

$$\left\{\begin{array}{ll}\pi_{1,1}^*(t)=\frac{2\beta m_1m_2\sigma^2(\bar{A}_1(t)+\kappa_1\bar{A}_2(t))+(\mu-r_0)(m_2+\kappa_1m_1)}{m_1m_2\sigma^2s^{2\beta}e^{r_0(T-t)}(1-\kappa_1\kappa_2)}, & t\in[0,\tau\wedge T],\\ \pi_{2,1}^*(t)=\frac{2\beta m_1m_2\sigma^2(\bar{A}_2(t)+\kappa_2\bar{A}_1(t))+(\mu-r_0)(m_1+\kappa_2m_2)}{m_1m_2\sigma^2s^{2\beta}e^{r_0(T-t)}(1-\kappa_1\kappa_2)}, & t\in[0,\tau\wedge T],\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll}\pi_{1,1}^*(t)=\frac{2\beta m_1m_2\sigma^2(A_1(t)+\kappa_1A_2(t))+(\mu-r_0)(m_2+\kappa_1m_1)}{m_1m_2\sigma^2s^{2\beta}e^{r_0(T-t)}(1-\kappa_1\kappa_2)}, & t\in[\tau\wedge T,T],\\ \pi_{2,1}^*(t)=\frac{2\beta m_1m_2\sigma^2(A_2(t)+\kappa_2A_1(t))+(\mu-r_0)(m_1+\kappa_2m_2)}{m_1m_2\sigma^2s^{2\beta}e^{r_0(T-t)}(1-\kappa_1\kappa_2)}, & t\in[\tau\wedge T,T],\end{array}\right.$$

以及

$$\left\{\begin{array}{lcll}\pi_{1,2}^*(t) & = & \frac{m_2G_1(t)+\kappa_1m_1G_2(t)}{m_1m_2\zeta e^{r_0(T-t)}(1-\kappa_1\kappa_2)}, & t\in[0,\tau\wedge T],\\ \pi_{2,2}^*(t) & = & \frac{m_1G_2(t)+\kappa_2m_2G_1(t)}{m_1m_2\zeta e^{r_0(T-t)}(1-\kappa_1\kappa_2)}, & t\in[0,\tau\wedge T],\\ \pi_{1,2}^*(t) & = & \pi_{2,2}^*(t)=0, & t\in[\tau\wedge T,T].\end{array}\right.$$

纳什均衡再保险策略为

$$\left\{\begin{array}{ll}a_1^*(t)=\frac{\sigma_2m_2\eta_1+\sigma_1m_1\eta_2\kappa_1\rho}{\sigma_1^2\sigma_2m_1m_2e^{r_0(T-t)}(1-\kappa_1\kappa_2\rho^2)}, & t\in[0,T],\\ a_2^*(t)=\frac{\sigma_1m_1\eta_2+\sigma_2m_2\eta_1\kappa_2\rho}{\sigma_2^2\sigma_1m_1m_2e^{r_0(T-t)}(1-\kappa_1\kappa_2\rho^2)}, & t\in[0,T],\end{array}\right.$$

两个保险公司的最优值函数由 (3.17) 式给出, $k\in\{1,2\}$.

4 数值分析

在本节中, 我们对均衡再保险和投资策略关于模型参数的影响进行了一些数值研究, 表 1 给出了模型参数.

表 1

t	T	r_0	μ	σ	s	β	δ	ρ	ζ	h^P
0	5	0.03	0.13	0.2	5	1	0.2	0.5	0.5	0.005
保险公司 1										
m_1	η_1	μ_1	σ_1	κ_1						
0.3	0.3	0.2	1	0.7						
保险公司 2										
m_2	η_2	μ_2	σ_2	κ_2						
0.1	0.4	0.2	1	0.5						

图 1 显示了在 κ_j 取不同值时参数 κ_k 对均衡再保险策略 $a_k^*(t)$ 的影响. 这里我们考虑当前时间下的模型参数, 即 $t=0$. 注意到 $a_k^*(0)$ 是参数 κ_k 的递增函数, 因为 κ_k 反应保险公司 k 对竞争对手绩效的敏感性, 即更加关注相对财富的增加. 另外, 虽然购买再保险可以降低风险, 但是保险公司需要支付再保险保费, 这将不利于增加相对财富. 因此保险公司倾向于增加索赔的自留额 $a_k^*(0)$. 对于一个固定的 κ_k, 竞争对手的相对关注度 κ_j 越大也会导致保险公司 k 承担更多的风险, 即增加索赔的自留额 $a_k^*(0)$.

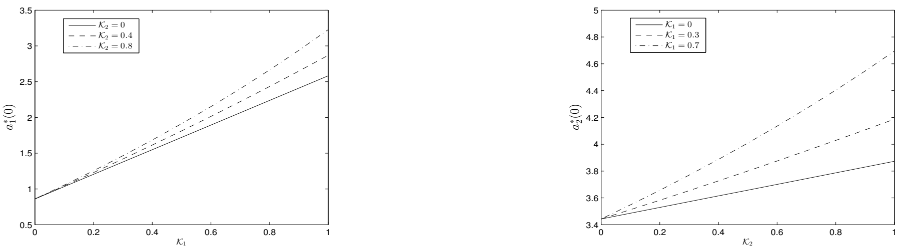

图 1 κ_k 对 $a_k^*(0)$ 的影响, $k=1,2$

图 2 显示了参数 κ_k 对违约前均衡投资策略 $\pi_{k,1}^*(0)$ 的影响. 我们发现 $\pi_{k,1}^*(0)$ 是 κ_k 的一个递增函数. 即越关注相对财富的增加, 投资到风险资产中的金额就越大, 这样会有更大的几率在终端时刻比竞争对手积累更多的财富. 因此竞争使得每个保险公司更加追求风险. 另外对于违约后的情况同样如此.

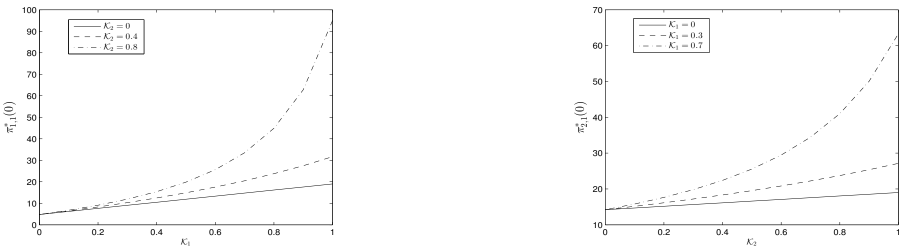

图 2 违约前 κ_k 对 $\pi_{k,1}^*(0)$ 的影响, $k=1,2$

图 3 描述了均衡债券投资策略 $\pi^*_{k,2}(0)$ 随竞争参数 κ_k 的变化情况, 我们发现 $\pi^*_{k,2}(0)$ 是 κ_k 的一个递增函数. 也就是说, 如果保险公司更加关注竞争对手的终端财富, 那么他将选择更冒险的投资策略, 即投资更多金额在公司债券上. 对于一个固定的 κ_k, κ_j 越大即竞争对手越激进, 也会导致保险公司 k 投资更多的余额到公司债券上.

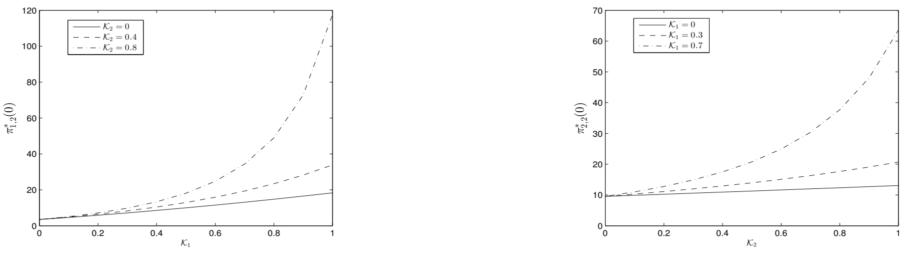

图 3 κ_k 对 $\pi^*_{k,2}(0)$ 的影响, $k=1,2$

从图 4 中可以看到在违约风险溢价 $1/\Delta$ 取不同值时违约前的均衡债券投资策略 $\pi^*_{k,2}(0)$ 和损失率 ζ 之间的关系. 我们发现均衡债券投资策略与损失率之间存在负相关, 因为更高的损失率导致更低的回报, 即存在更高的潜在的损失. 此外, 对于固定的损失率 ζ , 违约风险溢价 $1/\Delta$ 越高, 导致投资在违约债券上的金额更高. 很显然, 更高的违约风险溢价导致更高的回报.

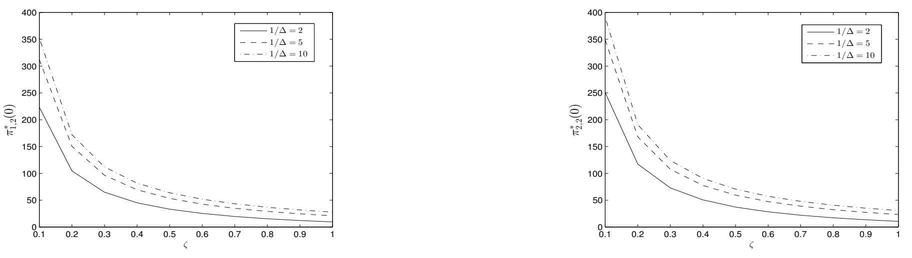

图 4 ζ 对 $\pi^*_{k,2}(0)$ 的影响, $k=1,2$

参 考 文 献

[1] Lin Xiang, Li Yanfang. Optimal reinsurance and investment for a jump diffusion risk process under the CEV model[J]. North American Actuarial Journal, 2011, 15(3): 417–431.

[2] Cao Yusong, Wan Nianqing. Optimal proportional reinsurance and investment based on Hamilton-Jacobi-Bellman equation[J]. Insurance: Math Econ, 2009, 45(2): 157–162.

[3] Zeng Yan, Li Zhongfei. Optimal time-consistent investment and reinsurance policies for mean-variance insurers[J]. Insurance: Math Econ, 2011, 49(1): 145–154.

[4] Zeng Yan, Li Danping, Gu Ailing. Robust equilibrium reinsurance-investment strategy for a mean-variance insurer in a model with jumps[J]. Insurance: Math Econ, 2016, 66: 138–152.

[5] Zhao Hui, Shen Yang, Zeng Yan. Time-consistent investment-reinsurance strategy for mean-variance insurers with a defaultable security[J]. J. Math. Anal. Appl, 2016, 437(2): 1036–1057.

[6] Zhu Huiming, Deng Chao, Yue Shengjie, et al. Optimal reinsurance and investment problem for an insurer with counterparty risk[J]. Insurance: Math Econ, 2015, 61: 242–254.

[7] Sun Zhongyang, Zheng Xiaoxiao, Zhang Xin. Robust optimal investment and reinsurance of an insurer under variance premium principle and default risk[J]. J. Math. Anal. Appl, 2017, 446(2): 1666–1686.

[8] Bensoussan A, Siu C C, Yam S C P, et al. A class of non-zero-sum stochastic differential investment and reinsurance games[J]. Automatica, 2014, 50(8): 2025–2037.

[9] Zhu Huainian, Cao Ming, Zhang Chengke. Time-consistent investment and reinsurance strategies for mean-variance insurers with relative performance concerns under the Heston model[J]. Finance Research Letters, 2019, 30: 280–291.

[10] Driessen J. Is Default Event Risk Priced in Corporate Bonds[J]. Review of Financial Studies, 2005, 18(1): 165–195.

[11] Bielecki T R, Jang I. Portfolio optimization with a defaultable security[J]. Asia-Pacific Financial Markets, 2006, 13(2): 113–127.

[12] Duffie D, Singleton K J. Credit risk: pricing, measurement, and management[J]. Economica, 2010, 72(285): 181–182.

[13] Espinosa G E, Touzi N. Optimal investment under relative performance concerns. Mathematical Finance[J], 2015, 25(2): 221–257.

TIME-CONSISTENT REINSURANCE AND INVESTMENT GAME WITH DEFAULT RISK UNDER CEV MODEL

LI Guo-zhu, MA Shi-xia

(*School of Sciences, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China*)

Abstract: This paper studies the non-zero-sum stochastic differential game between two competing insurance companies. Applying game theory and stochastic dynamic programming techniques, we derive the Nash equilibrium strategies and the corresponding value functions for the post-default case and the pre-default case. Finally, we conduct some numerical examples to draw some economic interpretations from these results.

Keywords: Non-zero-sum stochastic differential game; relative performance; CEV model; default risk

2010 MR Subject Classification: 62P05; 91B30; 91B70