

调和映射的可积拟共形延拓

唐树安¹, 冯小高²

(1. 贵州师范大学数学科学学院, 贵州 贵阳 550001)

(2. 西华师范大学数学与信息学院, 四川 南充 637002)

摘要: 本文研究了平面调和映射的可积拟共形延拓问题. 利用经典的共形映射的拟共形延拓方法和调和映射的性质, 获得了一些条件使得调和映射可以拟共形延拓至整个平面且其复伸缩商关于双曲度量是 p 次可积的, 推广了解析单叶函数的相关结果.

关键词: 调和映射; 拟共形延拓; Pre-Schwarzian 导数; Schwarzian 导数

MR(2010) 主题分类号: 30C62; 30F45; 30C55

中图分类号: O175

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2020)05-0593-07

1 引言

用 $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ 表示全平面 $\mathbb{C}$ 上的单位圆盘, 用 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 表示单位圆周. 如果单位圆 Δ 内一个复值函数 f 满足

$$4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} f = 0,$$

称它是调和的, 这里偏导数 $\frac{\partial}{\partial z}$ 与 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 定义为

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

单位圆 Δ 内的调和映射 f 具有标准的分解 $f = h + \bar{g}$, 其中 h 和 g 在 Δ 内解析且 $g(0) = 0$. 通过 Lewy 定理 (见文献 [1,2]), 知道 f 是局部单叶的当且仅当 f 的雅可比行列式 $J_f = |h'|^2 - |g'|^2$ 在单位圆 Δ 内不为零. 因此, 如果 f 在单位圆内是局部单叶的, 则或者 $J_f > 0$, 或者 $J_f < 0$. 如果雅可比行列式 $J_f > 0$, 称 f 是保向的; 如果 $J_f < 0$, 则称其是反向的. 对于一个保向的局部单叶调和映射 f , $\omega_f = \frac{g'}{h'}$ 是单位圆内的一个解析函数且 $|\omega_f| < 1$, 称之为 f 的第二复伸缩商.

设 f 是区域 Ω 上一个保向同胚, k 是一个实数且 $0 \leq k < 1$, 如果 f 在 Ω 内的水平和垂直线上是绝对连续的, 且满足下列方程

$$f_{\bar{z}}(z) = \mu(z)f_z(z),$$

*收稿日期: 2019-12-08

接收日期: 2020-03-25

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11701459, 11601100); 西华师范大学博士启动基金 (17E088); 贵州省科技厅基金资助 ([2017]7337, [2017]5726); 四川省教育厅基金 (17ZB0431).

作者简介: 唐树安 (1982-), 男, 贵州贵阳, 副教授, 主要研究方向: 复分析.

通讯作者: 冯小高

则称 f 是 Ω 内的一个 k -拟共形映射, 其中 $\mu(z)$ 被称为 f 复伸缩商且 $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. 0-拟共形映射是共形映射. f 的第二复伸缩商定义为 $\omega_f = \overline{f_z}/f_z$. 注意到 $|\omega_f| = |\mu_f|$, 所以 f 是拟共形映射当且仅当 $|\omega_f| \leq k < 1$ (见文献 [3,4]).

设 φ 是 Δ 内的局部单叶解析函数, 它的 pre-Schwarzian 导数 P_φ 和 Schwarzian 导数 S_φ 定义为

$$S_\varphi = P'_\varphi - \frac{1}{2}P_\varphi^2, \quad P_\varphi = \frac{\varphi''}{\varphi'}. \quad (1.1)$$

Nehari 在文献 [5] 中证明如果 Δ 内的局部单叶解析函数 φ 满足

$$|S_\varphi(z)|(1 - |z|^2)^2 \leq 2, \quad (1.2)$$

则 φ 在 Δ 内单叶. 后来, Ahlfors 和 Weil 在文献 [6] 中将这一结果推广, 他们证明如果局部单叶解析函数 φ 满足

$$|S_\varphi(z)|(1 - |z|^2)^2 \leq 2t, \quad (1.3)$$

这里 $0 \leq t < 1$, 则 φ 在 Δ 内单叶且可以 t -拟共形延拓至全平面 $\mathbb{C}$.

利用 pre-Schwarzian 导数, Becker 在文献 [7] 中证明如果单位圆内的局部单叶解析函数 φ 满足

$$|P_\varphi(z)|(1 - |z|^2) \leq k < 1, \quad (1.4)$$

那么 φ 在 Δ 内单叶且可以拟共形延拓至整个复平面 $\mathbb{C}$. Ahlfors 在文献 [8] 中具体构造这样一个拟共形映射.

Hernández 和 Martin 在文献 [9] 和 [10] 中将这些结果推广至调和映射. 为了陈述他们的结果, 首先叙述一些定义和记号.

设 f 是单位圆 Δ 内一个局部单叶调和映射, 具有标准分解 $f = h + \bar{g}$, 它的 pre-Schwarzian 导数 P_f^H 定义为

$$P_f^H = (\log(J_f))_z = \frac{h''}{h'} - \frac{\bar{\omega}\omega'}{1 - |\omega|^2}, \quad (1.5)$$

这里 ω 是 f 的第二复伸缩商. 它的 Schwarzian 导数 S_f^H 定义为

$$S_f^H = S_h + \frac{\bar{\omega}}{1 - |\omega|^2} \left(\frac{h''}{h'}\omega' - \omega'' \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{\bar{\omega}\omega'}{1 - |\omega|^2} \right)^2. \quad (1.6)$$

见文献 [11]. 容易看出, 如果 f 是解析函数, 则 $\omega = 0$, 所以 P_f^H 和 S_f^H 的定义与 (1.1) 的定义是一致的 (见文献 [11]).

Hernández 和 Martin 在文献 [9] 中证明下列结果

定理 HM1 (见文献 [9]) 设 $f = h + \bar{g}$ 是单位圆内的一个保向局部单叶调和映射且 $\|\omega\|_\infty < 1$. 如果对所有的 $z \in \Delta$,

$$|P_f^H(z)|(1 - |z|^2) + \frac{|\omega'(z)(1 - |z|^2)|}{1 - |\omega(z)|^2} \leq k < 1, \quad (1.7)$$

其中 k 满足

$$k < \frac{1 - \|\omega\|_\infty}{1 + \|\omega\|_\infty}, \quad (1.8)$$

则 f 在 Δ 内单叶且可以拟共形延拓至整个复平面 $\mathbb{C}$.

借助于 f 的 Schwarzian 导数, 他们在文献 [10] 中也得到如下结果.

定理 HM2 (见文献 [10]) 设 $f = h + \bar{g}$ 是单位圆内的一个保向局部单叶调和映射且 $\|\omega\|_\infty < 1$. 则存在常数 $\delta_0 > 0$, 使得若对所有的 $z \in \Delta$,

$$|S_f^H(z)|(1 - |z|^2)^2 \leq \delta_0 t, \quad (1.9)$$

则 f 是单叶的并且可以拟共形延拓至整个复平面 $\mathbb{C}$, 这里 $0 \leq t < 1$.

称一个单连通区域 Ω 是一个拟圆, 如果存在全平面 $\mathbb{C}$ 到自身的拟共形映射, 使得 Ω 是单位圆在这个映射下的像. 郭辉引入可积 Teichmüller 空间并且证明了下列结果

定理 G (见文献 [12]) 设 $2 \leq p$, φ 是单位圆 Δ 到拟圆 Ω 的共形映射. 则下列陈述等价

A1 $\iint_{\Delta} |P_\varphi(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-2} dx dy < \infty;$

A2 $\iint_{\Delta} |S_\varphi(z)|^p (1 - |z|^2)^{2p-2} dx dy < \infty;$

A3 共形映射 φ 可以拟共形延拓至整个复平面 $\mathbb{C}$ 使得它的复伸缩商 μ 满足

$$\iint_{\Delta^*} \frac{|\mu(z)|^p}{(|z|^2 - 1)^2} dx dy < \infty.$$

这里指出, 当 $p = 2$ 时, 所对应的 Teichmüller 空间由崔贵珍在文献 [13] 中引进, 这一空间被称为 Weil-Petersson Teichmüller 空间, 它在数学和物理中都有重要应用. 关于可积 Teichmüller 空间的更多结果, 请参见文献 [14–17].

自然的问题是, 对于调和映射, 是否也有对应于定理 G 的结果? 在文献 [18] 中, 作者证明了以下定理.

定理 TF 设 $f = h + \bar{g}$ 是单位圆内的一个保向局部单叶调和映射, 满足 (1.7) 式, 其中 k 满足 (1.8) 式, 且

$$\iint_{\Delta} \frac{|\omega(z)|^2}{(1 - |z|^2)^2} dx dy < \infty, \quad \|\omega\|_\infty < 1. \quad (1.10)$$

如果

$$\iint_{\Delta} |P_h(z)|^2 dx dy < \infty,$$

则调和映射 f 在单位圆内单叶且可以拟共形延拓至整个复平面 $\mathbb{C}$ 使得它的复伸缩商 μ 满足

$$\iint_{\Delta \cup \Delta^*} \frac{|\mu(z)|^2}{(|z|^2 - 1)^2} dx dy < \infty. \quad (1.11)$$

本文进一步研究这一问题, 主要结果如下

定理 1 设 $2 \leq p$, $f = h + \bar{g}$ 是单位圆内的一个保向局部单叶调和映射, 满足 (1.7) 式, 其中 k 满足 (1.8) 式, 且

$$\iint_{\Delta} \frac{|\omega(z)|^p}{(1 - |z|^2)^2} dx dy < \infty, \quad \|\omega\|_\infty < 1. \quad (1.12)$$

则下列陈述等价

$$\mathbf{B1} \quad \iint_{\Delta} |P_f^H(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-2} dx dy < \infty;$$

$$\mathbf{B2} \quad \iint_{\Delta} |S_f^H(z)|^p (1 - |z|^2)^{2p-2} dx dy < \infty.$$

此外, 如果条件 **B1** 或者 **B2** 满足, 则调和映射 f 在单位圆内单叶且可以拟共形延拓至整个复平面 $\mathbb{C}$ 使得它的复伸缩商 μ 满足

$$\iint_{\Delta \cup \Delta^*} \frac{|\mu(z)|^p}{(|z|^2 - 1)^2} dx dy < \infty. \quad (1.13)$$

不知道定理 1 的第二个论断的反向是否成立. 由定理 G 知道, 当 f 是共形映射时, 反向是成立的.

2 定理 1 的证明

本节将证明定理 1.

首先证明 **B1** $\Leftrightarrow$ **B2**. 因为 $f = h + \bar{g}$ 是单位圆内的一个保向局部单叶调和映射, 满足 (1.7) 式, 其中 k 满足 (1.8) 式, 由文献 [9] 中的定理 2 可知 f 可以单叶的延拓至 $\bar{\Delta} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, 记其为 f^* , 并且函数 h 是共形映射. 所以由共形映射理论, 有

$$\sup_{z \in \Delta} \left| \frac{h''(z)}{h'(z)} \right| (1 - |z|^2) \leq 6 \quad (2.1)$$

(见文献 [2,19]). 根据调和映射的 Schwarzian 导数的定义, 有

$$|S_h(z)|^p \leq 4^p \left(|S_f^H(z)|^p + \left| \frac{\bar{\omega}\omega'}{1 - |\omega|^2} \right|^p \left| \frac{h''(z)}{h'(z)} \right|^p + \left| \frac{\bar{\omega}\omega''}{1 - |\omega|^2} \right|^p + \frac{3^p}{2^p} \left| \frac{\bar{\omega}\omega'}{1 - |\omega|^2} \right|^{2p} \right). \quad (2.2)$$

因为 f 满足 (1.7) 式, 所以

$$\sup_{z \in \Delta} \frac{|\omega'(z)|(1 - |z|^2)}{1 - |\omega(z)|^2} \leq k, \quad (2.3)$$

其中 k 满足 (1.8) 式. 于是由 (2.2) 式和 (2.3) 式, 推出

$$\iint_{\Delta} \left| \frac{\bar{\omega}\omega'}{1 - |\omega|^2} \right|^p \left| \frac{h''(z)}{h'(z)} \right|^p (1 - |z|^2)^{2p-2} dx dy \leq 6^p k^p \iint_{\Delta} \frac{|\omega(z)|^p}{(1 - |z|^2)^2} dx dy. \quad (2.4)$$

注意到 ω 是单位圆 Δ 到自身的解析映射, 由文献 [20] 中的结果可知存在常数 $C > 0$, 使得

$$\sup_{z \in \Delta} \frac{|\omega''(z)|(1 - |z|^2)^2}{1 - |\omega(z)|^2} \leq C \sup_{z \in \Delta} \frac{|\omega'(z)|(1 - |z|^2)}{1 - |\omega(z)|^2}. \quad (2.5)$$

由此可以推出

$$\iint_{\Delta} \left| \frac{\bar{\omega}\omega''}{1 - |\omega|^2} \right|^p (1 - |z|^2)^{2p-2} dx dy \leq C^p k^p \iint_{\Delta} \frac{|\omega(z)|^p}{(1 - |z|^2)^2} dx dy. \quad (2.6)$$

注意到 $\|\omega\|_{\infty} < 1$, 由 (2.3) 式也可以推出

$$\iint_{\Delta} \left| \frac{\bar{\omega}\omega'}{1 - |\omega|^2} \right|^{2p} (1 - |z|^2)^{2p-2} dx dy \leq k^{2p} \iint_{\Delta} \frac{|\omega(z)|^p}{(1 - |z|^2)^2} dx dy. \quad (2.7)$$

所以如果 **S2** 成立, 则由 (1.12), (2.2), (2.4), (2.6) 以及 (2.7) 式, 可以推出

$$\iint_{\Delta} |S_h(z)|^p (1 - |z|^2)^{2p-2} dx dy < \infty. \quad (2.8)$$

又因为 h 是共形映射, 由定理 G, 知道 (2.8) 式等价于

$$\iint_{\Delta} |P_h(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-2} dx dy < \infty. \quad (2.9)$$

根据 pre-Schwarzian 导数的定义可知

$$|P_f^H(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-2} \leq 2^p |P_h(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-2} + 2^p k^p \frac{|\omega(z)|^p}{(1 - |z|^2)^2}. \quad (2.10)$$

由 (2.9) 和 (1.12) 式, 推出

$$\iint_{\Delta} |P_f^H(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-2} dx dy < \infty.$$

反之, 假定 **S1** 成立. 由定义得到

$$|P_h(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-2} \leq 2^p |P_f^H(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-2} + 2^p \frac{|\omega(z)|^p}{(1 - |z|^2)^2} \frac{|\omega'|^p (1 - |z|^2)^p}{(1 - |\omega|^2)^p}. \quad (2.11)$$

由 (1.12), (2.11) 和 (2.3) 式, 推出 (2.9) 式成立. 又根据定理 G, 有 (2.8) 式成立. 所以再次由 f 的 Schwarzian 导数的定义, 得到

$$|S_f^H(z)|^p \leq 4^p \left(|S_h(z)|^p + \left| \frac{\bar{\omega}\omega'}{1 - |\omega|^2} \right|^p \left| \frac{h''(z)}{h'(z)} \right|^p + \left| \frac{\bar{\omega}\omega''}{1 - |\omega|^2} \right|^p + \frac{3^p}{2^p} \left| \frac{\bar{\omega}\omega'}{1 - |\omega|^2} \right|^{2p} \right). \quad (2.12)$$

于是由 (2.4), (2.6), (2.7) 和 (2.8) 式, 得到

$$\iint_{\Delta} |S_f^H(z)|^p (1 - |z|^2)^{2p-2} dx dy < \infty.$$

因此完成了 **S1** $\Leftrightarrow$ **S2** 的证明.

接下来证明定理 1 的第二部分. 不妨假定 **S1** 成立. 则由文献 [9] 的定理 2, 知道 f 在 Δ 内单叶且可以由下列公式拟共形延拓至整个复平面

$$F(z) = \begin{cases} f^*(z), & |z| \leq 1, \\ f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) + U\left(\frac{1}{\bar{z}}\right), & |z| > 1, \end{cases}$$

其中

$$U(z) = \frac{h'(z)(1 - |z|^2)}{\bar{z}} + \frac{\overline{g'(z)}(1 - |z|^2)}{z}, \quad z \in \Delta \setminus \{0\}.$$

现在证明拟共形映射 F 的复伸缩商 μ_F 满足要求. 事实上, 如果 $|w| < 1$, 则有 $|\mu_F(w)| = |\omega(w)|$. 所以由条件 (1.12), 得到

$$\iint_{\Delta} \frac{|\mu(w)|^p}{(1 - |w|^2)^2} du dv < \infty. \quad (2.13)$$

现在假定 $|w| > 1$, 令 $z = \frac{1}{w}$. 通过直接的计算, 得到

$$F_{\bar{w}} = f_z(\frac{1}{w})\frac{\partial z}{\partial \bar{w}} + U_z(\frac{1}{w})\frac{\partial z}{\partial \bar{w}} \quad \text{和} \quad F_w = f_{\bar{z}}(\frac{1}{w})\frac{\partial \bar{z}}{\partial w} + U_z(\frac{1}{w})\frac{\partial \bar{z}}{\partial w}.$$

所以有

$$\begin{aligned} |\mu_F(w)| &= \left| \frac{f_z(z)\frac{\partial z}{\partial \bar{w}} + U_z(z)\frac{\partial z}{\partial \bar{w}}}{f_{\bar{z}}(z)\frac{\partial \bar{z}}{\partial w} + U_z(z)\frac{\partial \bar{z}}{\partial w}} \right| = \left| \frac{z^2 \frac{h''(z)}{h'(z)} (1 - |z|^2) - \overline{z\omega(z)} \frac{\overline{h'(z)}}{h'(z)}}{z^2 \frac{g''(z)}{h'(z)} (1 - |z|^2) - \bar{z} \frac{\overline{h'(z)}}{h'(z)}} \right| \\ &\leq \frac{\left| \frac{h''(z)}{h'(z)} \right| (1 - |z|^2) + |\omega(z)|}{1 - \left| \frac{g''(z)}{h'(z)} \right| (1 - |z|^2)}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

通过直接的计算, 也得到

$$\frac{g''(z)}{h'(z)} (1 - |z|^2) = \omega(z)P_f(z) (1 - |z|^2) + \frac{\omega'(z) (1 - |z|^2)}{1 - |\omega(z)|^2}.$$

注意到 $\|\omega\|_\infty < 1$, 推出

$$1 - \left| \frac{g''(z)}{h'(z)} \right| (1 - |z|^2) \geq 1 - k. \quad (2.15)$$

所以由 (2.14) 和 (2.15) 式, 通过变量替换 $z = \frac{1}{w}$, 得到

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta^*} \frac{|\mu_F(w)|^p}{(|w|^2 - 1)^2} dudv &\leq \frac{2^p}{(1 - k)^p} \iint_{\Delta^*} \frac{\left| \frac{h''(\frac{1}{w})}{h'(\frac{1}{w})} \right|^p (1 - |\frac{1}{w}|^2)^p + |\omega(\frac{1}{w})|^p}{(|w|^2 - 1)^2} dudv \\ &\leq \frac{2^p}{(1 - k)^p} \iint_{\Delta} \left| \frac{h''(z)}{h'(z)} \right|^p (1 - |z|^2)^{p-2} dxdy \\ &\quad + \frac{2^p}{(1 - k)^p} \iint_{\Delta} \frac{|\omega(z)|^p}{(1 - |z|^2)^2} dxdy \\ &< \infty. \end{aligned} \quad (2.16)$$

定理 1 证毕.

参 考 文 献

- [1] Duren P. Harmonic mappings in the plane[M]. New York: Cambridge University Press, 2004.
- [2] Lewy H. On the non-vanishing of Jacobian in certain one-to-one mappings[J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1936, 42: 689–692.
- [3] Ahlfors L. Lectures on quasiconformal mappings[M]. VPrinceton, NJ: An Nostrand, 1966.
- [4] Lehto O. Univalent functions and Teichmüller spaces[M]. New York: Springer-Verlag, 1987.
- [5] Nehari Z. The Schwarzian derivative and schlicht functions[J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55: 545–551.
- [6] Ahlfors L, Weill G. A uniqueness theorem for Beltrami equations[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1962, 13: 975–978.

- [7] Becker J. Löwnersche differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte funktionen[J]. J. Reine. Angew. Math. (German), 1972, 255: 23–43.
- [8] Ahlfors L. Sufficient conditions for quasiconformal extension[J]. Ann. Math. Stud., 1974, 79: 23–29.
- [9] Hernández R, Martin J. Quasiconformal extension of harmonic mappings in the plane[J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 2013, 38(2): 617–630.
- [10] Hernández R, Martin J. Criteria for univalence and quasiconformal extension of harmonic mappings in terms of the Schwarzian derivative[J]. Arch. Math., 2015, 104(1): 53–59.
- [11] Hernández R, Martin J. Pre-Schwarzian and Schwarzian derivatives of harmonic mappings[J]. J. Geom. Anal., 2015, 25(1): 64–91.
- [12] Guo H. Integrable Teichmüller spaces[J]. Sci. China Ser A, 2000, 43(1): 47–58.
- [13] Cui G. Integrably asymptotic affine homeomorphisms of the circle and Teichmüller spaces[J]. Sci. China Ser A, 2000, 43(3): 267–279.
- [14] Tang S. Some characterizations of the integrable Teichmüller space[J]. Sci. China Math., 2013, 56(3): 541–551.
- [15] Tang S, Shen Y. Integrable Teichmüller space[J]. J. Math. Anal. Appl., 2018, 465(1): 658–672.
- [16] Yanagishita M. Introduction of a complex structure on the p -integrable Teichmüller space[J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 2014, 39(2): 947–971.
- [17] Yanagishita M. Kählerity and Negativity of Weil-Petersson Metric on Square Integrable Teichmüller Space[J]. J. Geom. Anal., 2017, 27(3): 1995–2017.
- [18] Tang S, Feng X. Univalence criterions and quasiconformal extension for harmonic mappings[J]. preprint.
- [19] Pommerenke Ch. Boundary behaviour of conformal maps[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
- [20] Ghatage P, Zheng D. Hyperbolic derivatives and generalized Schwarz-Pick estimates[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2004, 132: 3309–3318.

INTEGRABLE QUASICONFORMAL EXTENSION OF HARMONIC MAPPINGS

TANG Shu-an¹, FENG Xiao-gao²

(1. School of Mathematic Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China)

(2. College of Mathematics and Information, China West Normal University,
Nanchong 637002, China)

Abstract: In this paper, we study the integrable quasiconformal extension of harmonic mappings in the plane. By using the classical method of quasiconformal extension of conformal mapping and some properties of harmonic mappings, we obtain some conditions to ensure the harmonic mapping can be quasiconformally extended to the whole complex plane so that its complex dilatation is p integrable with respect to the hyperbolic metric. These results generalize the related results of univalent analytic functions.

Keywords: harmonic mappings; quasiconformal extension; Pre-Schwarzian derivative; Schwarzian derivative

2010 MR Subject Classification: 30C62; 30F45; 30C55