Vol. 40 (2020)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

带固定效应空间误差面板数据模型的经验似然推断

周 婷, 秦永松
(广西师范大学数学与统计学院, 广西 桂林 541006)

摘 要: 本文研究了带有固定效应的空间误差面板数据模型的经验似然推断问题. 利用经验似然方法, 通过鞅差序列将空间误差面板数据模型估计方程中的二次型转化为线性形式, 构造了空间误差面板数据模型参数的经验似然比统计量, 得到了统计量的极限分布.

关键词: 固定效应; 空间误差面板数据模型; 鞅差序列; 经验似然; 渐进分布
MR(2010) **主题分类号**: 62E20; 62G20 **中图分类号**: O212.7
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2020)05-0551-14

1 引言

空间计量经济学是在区域经济模型中处理由于空间因素导致的特殊性质的一系列方法[1]. 空间计量经济学可应用于区域科学、地理经济学、城市经济学等领域, 具体来说, 如研究区域经济、房屋价值、人均收入等问题. 空间面板数据模型是空间计量经济学中经典模型之一, 它同时考虑了空间相关性和时间依赖性, 将传统的时间序列方法、横截面数据方法以及普通面板数据模型进行综合, 学者们对此模型也进行了诸多研究. 如 Elhorst[2] 研究了空间面板数据模型的分类和估计问题; Kapoor 等 [3] 研究了误差项是空间自相关的面板数据模型的参数估计; Yu 等 [4] 研究了带固定效应空间动态面板数据模型的拟极大似然估计 (QMLE); Lee 和 Yu[5] 进一步研究了带固定效应的空间自回归面板数据模型的 QMLE, 并提出正交转换的间接估计方法; 文利霞 [6] 研究了空间误差面板数据模型的拟极大似然估计及其渐近性质; 戴晓文等 [7] 基于工具变量法研究了含有个体固定效应的空间误差面板数据模型参数的分位回归估计, 并与均值回归方法做比较, 结果表明在处理空间面板数据时工具变量回归估计方法优于均值回归方法; Qin[8] 研究了空间误差模型的经验似然估计. 由于人为或者客观原因, 我们得到的数据不一定是完整的; Wang 和 Lee[9] 研究了数据随机缺失情形下空间面板数据模型的广义矩估计、非线性最小二乘估计和两阶段最小二乘估计估计, 并对这三种估计方法得到的结果进行了比较; 于力超和金勇进 [10] 研究了数据缺失机制为非随机缺失情形的面板数据参数估计方法.

对空间计量模型进行估计, 使用比较多的估计方法是 (拟) 极大似然估计法 (如文献 [4,5,11])、广义矩估计法 (如文献 [9,13])、两阶段最小二乘法 (如文献 [9,13]) 等. 空间计量模型的理论和应用研究均比较深入且成熟. 经验似然是 Owen[14] 于 1988 年在完全样本下提出的一种非参数统计推断方法, 其是在一定约束条件下将参数似然比极大化, 有类似于 Bootstrap 的抽样特性. 经验似然方法应用广泛, 可应用于各种统计模型, 学者们对经验似然

*收稿日期: 2019-12-10 接收日期: 2020-02-21
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11671102).
作者简介: 周婷 (1994–), 女, 广西贺州, 硕士, 主要研究方向: 概率论与数理统计.

也进行了诸多研究. Owen[15,16] 将经验似然应用到线性回归模型的统计推断; 石坚 [17] 运用经验似然方法修正了线性相关模型中误差方差的传统最小二乘估计, 修正后的估计的渐近方差比传统估计的更小; Cui 和 Chen[18] 将经验似然应用到线性变量含误差模型; Kostov[19] 研究了空间分位数回归模型的经验似然推断; 陈燕红 [20] 研究了时间序列模型的经验似然推断. 据我们所知, 目前尚没有研究面板数据空间计量经济模型的文献报导. 于是, 本文探讨空间面板数据模型的经验似然推断, 在正则条件下构造了空间面板数据模型的经验似然统计量, 证明了该统计量的极限分布为卡方分布.

2 空间面板数据模型

一般的空间面板数据模型 [5]

$$\begin{cases} Y_{nt} = \rho M_n Y_{nt} + X_{nt}\beta + U_{nt} + V_{nt}, \\ V_{nt} = \lambda W_n V_{nt} + \varepsilon_{nt},\ t = 1, \cdots, T, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $Y_{nt} = (y_{1t}, \cdots, y_{nt})'$ 为 $n \times 1$ 维被解释变量; X_{nt} 为 $n \times k$ 维非随机解释变量向量; β 为 $k \times 1$ 维系数向量. M_n 和 W_n 均为 $n \times n$ 维空间权重矩阵, 其中 m_{ij} 为矩阵 M_n 的 (i, j) 元素, $m_{ii} = 0$; w_{ij} 为矩阵 W_n 的 (i, j) 元素, $w_{ii} = 0$. U_{nt} 为 $n \times 1$ 维固定效应向量. V_{nt} 为自相关误差项. $\varepsilon_{nt} = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \cdots, \varepsilon_{nt})'$ 为 $n \times 1$ 维随机扰动项, 其分量的均值为 0, 协方差为 σ^2, 且独立同分布. ρ 和 λ 为空间相关系数. 在本文中, "$'$" 表示矩阵转置.

由于 $t = 1, \cdots, T$, 模型 (2.1) 可改写为 [1]

$$\begin{cases} Y = \rho(I_T \otimes M_n)y + X\beta + U + V, \\ V = \lambda(I_T \otimes W_n)V + \varepsilon, \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $Y = (Y'_{n1}, \cdots, Y'_{nT})'$ 为 $nT \times 1$ 维因变量向量, $Y_{nt} = (y_{1t}, \cdots, y_{nt})'$ 为 $n \times 1$ 维向量. $X = (X'_{n1}, \cdots, X'_{nT})'$ 为 $nT \times k$ 维解释变量向量, $X_{nt} = (X^*_{1t}, X^*_{2t}, \cdots, X^*_{nt})'$ 为 $n \times k$ 维向量. β 为 $k \times 1$ 维系数向量. U 为 $nT \times 1$ 维固定效应向量. I_T 表示 $T \times T$ 维单位矩阵. M_n 和 W_n 均表示 $n \times n$ 维空间权重矩阵, 其中 m_{ij} 和 w_{ij} 分别表示 M_n 和 W_n 的 (i, j) 元素. V 为自相关误差项. $\varepsilon = (\varepsilon'_{n1}, \cdots, \varepsilon'_{nT})'$ 为 $nT \times 1$ 维随机扰动项, 其均值为 0, 协方差阵为 $\sigma^2 I_{nT}$, $\varepsilon_{nt} = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \cdots, \varepsilon_{nt})'$ 为 $n \times 1$ 维向量. ρ 和 λ 为空间相关系数. $\otimes$ 表示矩阵的 Kronecker 积. 空间面板数据模型 (2.2) 分为空间滞后面板数据模型和空间误差面板数据模型两个大类.

(1) 当 $\lambda = 0$ 时, 模型 (2.2) 即为空间滞后面板数据模型

$$Y = \rho(I_T \otimes M_n)Y + X\beta + U + \varepsilon. \tag{2.3}$$

(2) 当 $\rho = 0$ 时, 模型 (2.2) 即为空间误差面板数据模型

$$\begin{cases} Y = X\beta + U + V, \\ V = \lambda(I_T \otimes W_n)V + \varepsilon. \end{cases} \tag{2.4}$$

3 空间误差面板数据模型的经验似然估计

为了完整性, 我们重述空间误差面板数据模型

$$\begin{cases} Y = X\beta + U + V, \\ V = \lambda(I_T \otimes W_n)V + \varepsilon, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $Y = (Y'_{n1}, \cdots, Y'_{nT})'$ 为 $nT \times 1$ 维因变量向量, $Y_{nt} = (y_{1t}, \cdots, y_{nt})'$ 为 $n \times 1$ 维向量. $X = (X'_{n1}, \cdots, X'_{nT})'$ 为 $nT \times k$ 维解释变量向量, $X_{nt} = (X^*_{1t}, X^*_{2t}, \cdots, X^*_{nt})'$ 为 $n \times k$ 维向量. β 为 $k \times 1$ 维系数向量. U 为 $nT \times 1$ 维固定效应向量. I_T 表示 $T \times T$ 维单位矩阵. W_n 表示 $n \times n$ 维空间权重矩阵, w_{ij} 表示矩阵 W_n 的 (i,j) 元素. V 为自相关误差项. $\varepsilon = (\varepsilon'_{n1}, \cdots, \varepsilon'_{nT})'$ 为 $nT \times 1$ 维随机扰动项, 其均值为 0, 协方差阵为 $\sigma^2 I_{nT}$, $\varepsilon_{nt} = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \cdots, \varepsilon_{nt})'$ 为 $n \times 1$ 维向量. λ 为空间相关系数. $\otimes$ 表示矩阵的 Kronecker 积.

为了描述方便, 我们重新记 $nT \times k$ 维解释变量向量

$$X = (X'_{n1}, \cdots, X'_{nT})' = (X^*_{11}, \cdots, X^*_{n1}, \cdots, X^*_{1T}, \cdots, X^*_{nT})' \mathrel{\hat=} (\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2, \cdots, \widetilde{X}_{nT})',$$

其中 $\widetilde{X}'_i = (\widetilde{x}_{i1}, \cdots, \widetilde{x}_{ik})$ 为 $1 \times k$ 维行向量. $nT \times 1$ 维随机扰动项

$$\varepsilon = (\varepsilon'_{n1}, \cdots, \varepsilon'_{nT})' = (\varepsilon_{11}, \cdots, \varepsilon_{n1}, \cdots, \varepsilon_{1T}, \cdots, \varepsilon_{nT})' \mathrel{\hat=} (\widetilde{\varepsilon}_1, \widetilde{\varepsilon}_2, \cdots, \widetilde{\varepsilon}_{nT})'.$$

记 $R_{nT}(\lambda) = I_{nT} - \lambda(I_T \otimes W_n)$, 且 $R_{nT}(\lambda) = (\widetilde{R}_1, \widetilde{R}_2, \cdots, \widetilde{R}_{nT})'$ 为 $nT \times nT$ 维向量, $\widetilde{R}'_i = (R_{i1}, \cdots, R_{i,nT})$ 为 $1 \times nT$ 维向量. 假设 $R_{nT}(\lambda)$ 可逆, 则模型 (3.1) 可改写为

$$Y = X\beta + U + R^{-1}_{nT}(\lambda)\varepsilon, \tag{3.2}$$

其中 $\varepsilon = R(\lambda)(Y - X\beta - U)$. 被解释变量 Y 的拟对数似然函数

$$L = -\frac{nT}{2}\ln(2\pi) - \frac{nT}{2}\ln(\sigma^2) + \ln|R_{nT}(\lambda)| - \frac{1}{2\sigma^2}\varepsilon'\varepsilon, \tag{3.3}$$

其中 $\varepsilon = R_{nT}(\lambda)(Y - X\beta - U)$.

令 $G_{nT} = (I_T \otimes W_n)R^{-1}(\lambda)$ 且 $\widetilde{G}_{nT} = \frac{1}{2}(G_{nT} + G'_{nT})$. G_{nT} 和 $\widetilde{G}_{nT}$ 均为 $nT \times nT$ 维矩阵, 且 $\widetilde{G}_{nT}$ 是对称矩阵. 由文献 [1] 可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \beta} &= \frac{1}{\sigma^2}\varepsilon' R(\lambda)X, \qquad \frac{\partial L}{\partial U} = \frac{1}{\sigma^2}\varepsilon' R(\lambda), \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -\mathrm{tr}((I_T \otimes W_n)R^{-1}_{nT}(\lambda)) + \frac{1}{\sigma^2}\varepsilon' R^{-1}_{nT}(\lambda)\varepsilon = \frac{1}{\sigma^2}(\varepsilon' G_{nT}\varepsilon - \sigma^2\mathrm{tr}(G_{nT})) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}(\varepsilon'\widetilde{G}_{nT}\varepsilon - \sigma^2\mathrm{tr}(\widetilde{G}_{nT})), \\
\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} &= -\frac{nT}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\varepsilon'\varepsilon = \frac{1}{2\sigma^4}(\varepsilon'\varepsilon - nT\sigma^2).
\end{aligned}$$

令以上偏导数等于 0, 我们有以下式子

$$\begin{aligned}
&X'R'(\lambda)\varepsilon = 0, \qquad R'(\lambda)\varepsilon = 0, \\
&\varepsilon'\widetilde{G}_{nT}\varepsilon - \sigma^2\mathrm{tr}(\widetilde{G}_{nT}) = 0, \qquad \varepsilon'\varepsilon - nT\sigma^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

分别用 g_{ij} 和 $\widetilde{g}_{ij}$ 表示矩阵 G_{nT} 和 $\widetilde{G}_{nT}$ 的 (i,j) 元素, 用 b_i 表示矩阵 $X'R'(\lambda)$ 的第 i 列, 用 r_i 表示矩阵 $R'_{nT}(\lambda)$ 的第 i 列. 由于 $X'R'(\lambda)=(R(\lambda)X)'$, 根据 X 及 $R(\lambda)$ 的表达式可知, b_i 和 r_i 分别为

$$b_i=(\sum_{j=1}^{nT}R_{ij}\widetilde{x}_{j1},\cdots,\sum_{j=1}^{nT}R_{ij}\widetilde{x}_{jk})',\ r_i=(R_{i1},R_{i2},\cdots,R_{i,nT})', \tag{3.5}$$

其中 $i=1,2,\cdots,nT$.

我们规定, 当求和符号的上标等于 0 时我们令该和为 0. 为将 (3.4) 式的二次型转化为线性形式, 引入一个鞅差序列 [21]. 定义 σ- 域: $\mathscr{F}=\{\emptyset,\Omega\}$, $\mathscr{F}_i=\sigma(\widetilde{\varepsilon}_1,\widetilde{\varepsilon}_2,\cdots,\widetilde{\varepsilon}_i)$, $1\le i\le nT$. 令

$$\widetilde{Y}_{i,nT}=\widetilde{g}_{ii}(\widetilde{\varepsilon}_i^2-\sigma^2)+2\widetilde{\varepsilon}_i\sum_{j=1}^{i-1}\widetilde{g}_{ij}\widetilde{\varepsilon}_j, \tag{3.6}$$

则 $\mathscr{F}_{i-1}\subseteq\mathscr{F}_i$, $\widetilde{Y}_{i,nT}$ 是 $\mathscr{F}_i$- 可测的, 并且 $E(\widetilde{Y}_{i,nT}\mid\mathscr{F}_{i-1})=0$. 因此 $\{\widetilde{Y}_{i,nT},\mathscr{F}_i,1\le i\le nT\}$ 构成一个鞅差序列, 且

$$\varepsilon'\widetilde{G}_{nT}\varepsilon-\sigma^2\mathrm{tr}(\widetilde{G}_{nT})=\sum_{i=1}^{nT}\widetilde{Y}_{i,nT}. \tag{3.7}$$

我们提出 $\theta=(\beta',U',\lambda,\sigma^2)'\in R^{k+nT+2}$ 的经验似然比统计量 $L_{nT}(\theta)=\sup\limits_{p_i,1\le i\le nT}\prod_{i=1}^{nT}(nTp_i)$, 其中 p_i 满足

$$\begin{aligned}&p_i\ge0,1\le i\le nT,\sum_{i=1}^{nT}p_i=1,\qquad\sum_{i=1}^{nT}p_ib_i\widetilde{\varepsilon}_i=0,\qquad\sum_{i=1}^{nT}p_ir_i\widetilde{\varepsilon}_i=0,\\&\sum_{i=1}^{nT}p_i(\widetilde{g}_{ii}(\widetilde{\varepsilon}_i^2-\sigma^2)+2\widetilde{\varepsilon}_i\sum_{j=1}^{i-1}\widetilde{g}_{ij}\widetilde{\varepsilon}_j)=0,\qquad\sum_{i=1}^{nT}p_i(\widetilde{\varepsilon}_i^2-\sigma^2)=0.\end{aligned}$$

令

$$\omega_i(\theta)=\begin{pmatrix}b_i\widetilde{\varepsilon}_i\\r_i\widetilde{\varepsilon}_i\\\widetilde{g}_{ii}(\widetilde{\varepsilon}_i^2-\sigma^2)+2\widetilde{\varepsilon}_i\sum_{j=1}^{i-1}\widetilde{g}_{ij}\widetilde{\varepsilon}_j\\\widetilde{\varepsilon}_i^2-\sigma^2\end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

其中 $\omega_i(\theta)$ 为 $(k+nT+2)\times1$ 维, $\widetilde{\varepsilon}_i$ 为 $\varepsilon=R_{nT}(\lambda)(Y-X\beta-U)$ 的第 i 部分. 由 Owen[15], 有

$$l_{nT}(\theta)=-2L_{nT}(\theta)=2\sum_{i=1}^{nT}\log\{1+\gamma'(\theta)\omega_i(\theta)\}, \tag{3.9}$$

其中 $\gamma(\theta)\in R^{k+nT+2}$ 是下面等式的解

$$\frac{1}{nT}\sum_{i=1}^{nT}\frac{\omega_i(\theta)}{1+\gamma'(\theta)\omega_i(\theta)}=0. \tag{3.10}$$

在本文中, 记 $\mu_j = E\widetilde{\varepsilon}_1^j, j=3,4$. 用 Vec(diag$A$) 表示由矩阵 A 的主对角线上的元素构成的列向量. $\|a\|$ 表示向量 a 的 L_2 范数. 用 1_{nT} 表示元素均为 1 的 nT 维列向量. 给出以下假设条件

(A1) n 为无限大常数, T 为有限常数 [6].

(A2) $\{\widetilde{\varepsilon}_i,\ i=1,2,\cdots,nT\}$ 为均值为 0, 方差 σ^2 有限的独立同分布随机变量序列, 且存在 $\delta>0$, 使 $E|\varepsilon|^{4+\delta}<\infty$.

(A3) $R_{nT}(\lambda)$ 为非奇异矩阵.

(A4) 矩阵 W_n , $R_{nT}(\lambda)$ 元素的绝对值的行和与列和均一致有界.

(A5) $\{\widetilde{X}_i,\ 1\le i\le nT\}$ 一致有界.

(A6) 存在常数 C_1, C_2, 使 $0<C_1\le\lambda_{\min}(\frac{1}{nT}\Sigma_{k+nT+2})\le\lambda_{\max}(\frac{1}{nT}\Sigma_{k+nT+2})\le C_2<\infty$, 其中 $\lambda_{\min}(A)$, $\lambda_{\max}(A)$ 分别表示矩阵 A 的最小和最大特征值. Σ_{k+nT+2} 表示如下

$$\Sigma_{k+nT+2}=\Sigma'_{k+nT+2}=Cov\{\sum_{i=1}^{nT}\omega_i(\theta)\}=\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} & \Sigma_{14}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} & \Sigma_{23}\\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} & \Sigma_{34}\\ \Sigma_{41} & \Sigma_{42} & \Sigma_{43} & \Sigma_{44}\end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

其中 $\Sigma_{11}=\sigma^2X'R'_{nT}(\lambda)X$, $\Sigma_{12}=2\sigma^2X'R'_{nT}(\lambda)R_{nT}(\lambda)$, $\Sigma_{13}=2\mu_3X'R'_{nT}(\lambda)\mathrm{Vec}(\mathrm{diag}\widetilde{G}_{nT})$, $\Sigma_{14}=2\mu_3X'R'_{nT}(\lambda)1_{nT}$, $\Sigma_{22}=\sigma^2R'_{nT}(\lambda)R_{nT}(\lambda)$, $\Sigma_{23}=2\mu_3R'_{nT}(\lambda)\mathrm{Vec}(\mathrm{diag}\widetilde{G}_{nT})$, $\Sigma_{24}=2\mu_3R'_{nT}(\lambda)1_{nT}$, $\Sigma_{33}=2\sigma^4\mathrm{tr}(\widetilde{G}_{nT}^2)+(\mu_3-3\sigma^4)\|\mathrm{Vec}(\mathrm{diag}\widetilde{G}_{nT})\|^2$, $\Sigma_{34}=2(\mu_4-\sigma^4)\mathrm{tr}(\widetilde{G}_{nT})$, $\Sigma_{44}=nT(\mu_4-\sigma^4)$.

注 (A1) 源于文献 [6], 本文考虑 n 无限而 T 有限的情形. (A2) 和 (A3) 是空间面板数据模型的常见假设, 如 Lee 和 Yu[5], Yu 等 [4,22]. (A3) 保证 (3.2) 的表示方法是有效的. (A4) 源于 Kelejian 和 Prucha[21,23], 在 Lee[13] 中也有用到. (A5) 和 (A6) 保证了本文的 Q_{nT} 满足假设条件 C2.

引理 1 [15] 令 $\xi_1,\cdots,\xi_{nT}$ 是一个平稳随机变量序列, 且对常数 $s>0$ 有 $E|\xi_1|^s<\infty$, 那么 $\max\limits_{1\le i\le nT}|\xi_i|=o((nT)^{1/s})$. a.s.

证 见文献 [15] 中引理 3 的证明.

引理 2 的准备 需要用到文献 [21] 中的定理 1, 我们对此定理做以下描述. 考虑线性二次型

$$\widetilde{Q}_n=\epsilon'_nA_n\epsilon_n+b'_n\epsilon_n=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{nij}\epsilon_{ni}\epsilon_{nj}+\sum_{i=1}^n b_{ni}\epsilon_{ni},$$

其中 ϵ_{ni} 是 (实值) 随机变量, a_{nij} 和 b_{ni} 分别代表二次型和线性形式的 (实值) 系数. 需要以下假设.

(C1) 实值随机变量序列 $\{\epsilon_{ni},1\le i\le n,n\ge1\}$ 满足 $E(\epsilon_{ni})=0$, 且对每一个 $n\ge1$ 随机变量 $\epsilon_{n1},\cdots,\ \epsilon_{nn}$ 完全独立. 且存在 $\delta_1>0$ 使 $\sup\limits_{1\le i\le n,n\ge1}E|\epsilon_{ni}|^{4+\delta_1}<\infty$.

(C2) 对所有 $1\le i,j\le n,n\ge1$ 有 $a_{nij}=a_{nji}$, $\sup\limits_{1\le j\le n,n\ge1}\sum\limits_{i=1}^n|a_{nij}|<\infty$, 存在 $\delta_2>0$, 有 $\sup\limits_n\sum\limits_{i=1}^n|b_{ni}|^{2+\delta_2}<\infty$.

在这些假设下, $\widetilde{Q}_n$ 的均值 $\mu_{\widetilde{Q}_n}$ 和方差 $\sigma^2_{\widetilde{Q}_n}$ 分别为

$$\begin{aligned}\mu_{\widetilde{Q}_n} &= \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\sigma_{ni}^2,\\ \sigma^2_{\widetilde{Q}_n} &= 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{nij}^2\sigma_{ni}^2\sigma_{nj}^2 + \sum_{i=1}^{n} b_{ni}^2\sigma_{ni}^2 + \sum_{i=1}^{n}\{a_{nii}^2(\mu_{ni}^4 - 3\sigma_{ni}^4) + 2b_{ni}a_{nii}\mu_{ni}^{(3)}\},\end{aligned}$$

其中 $\sigma_{ni}^2 = E(\epsilon_{ni}^2)$, $\mu_{ni}^{(s)} = E(\epsilon_{ni}^s)$, $s = 3, 4$.

引理 2 若假设条件 (C1) 和 (C2) 成立, 且存在常数 $C > 0$ 满足 $n^{-1}\sigma^2_{\widetilde{Q}_n} \geq C$, 则

$$\frac{\widetilde{Q}_n - \mu_{\widetilde{Q}_n}}{\sigma_{\widetilde{Q}_n}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

证 见文献 [21] 中的定理 1.

引理 3 若假设条件 (A1)–(A6) 满足, 那么当 $n \to \infty$ 时,

$$Z_{nT} = \max_{1 \leq i \leq nT} \|\omega_i(\theta)\| = o_p((nT)^{1/2}), \tag{3.12}$$

$$\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2} \sum_{i=1}^{nT} \omega_i(\theta) \xrightarrow{d} N(0, I_{k+nT+2}), \tag{3.13}$$

$$(nT)^{-1} \sum_{i=1}^{nT} \omega_i(\theta)\omega_i'(\theta) = (nT)^{-1}\Sigma_{k+nT+2} + o_p(1), \tag{3.14}$$

$$\sum_{i=1}^{nT} \|\omega_i(\theta)\|^3 = O_p(nT). \tag{3.15}$$

证 见第四章.

定理 1 在 (A1)–(A6) 假设条件下, 当 $n \to \infty$ 时, 有

$$l_{nT}(\theta) \xrightarrow{d} \chi^2_{(k+nT+2)}, \tag{3.16}$$

其中 $\chi^2_{(k+nT+2)}$ 表示自由度为 $k + nT + 2$ 的卡方分布.

证 令 $\gamma(\theta) = \gamma$, $\rho_0 = \|\gamma\|$, $\gamma = \rho_0\eta_0$. 下面证明 $\|\gamma\| = O_p((nT)^{-1/2})$. 由 (3.10) 式, 有

$$\frac{1}{nT}\sum_{j=1}^{nT} \frac{\eta_0'\omega_j(\theta)(1 + \gamma'\omega_j(\theta)) - \eta_0'\omega_j\gamma'\omega_j(\theta)}{1 + \gamma'\omega_j(\theta)} = 0,$$

即

$$\frac{\eta_0'}{nT}\sum_{j=1}^{nT}\omega_j(\theta) - \frac{\rho_0}{nT}\sum_{j=1}^{nT}\frac{(\eta_0'\omega_j(\theta))^2}{1 + \gamma'\omega_j(\theta)} = 0,$$

则有

$$\left|\eta_0'\frac{1}{nT}\sum_{j=1}^{nT}\omega_j(\theta)\right| = \left|\frac{\rho_0}{nT}\sum_{j=1}^{nT}\frac{(\eta_0'\omega_j(\theta))^2}{1 + \gamma'\omega_j(\theta)}\right|. \tag{3.17}$$

根据 (3.12) 式有

$$|1+\gamma'\omega_j(\theta)| \le 1+\|\gamma\|\,\|\omega_j(\theta)\| \le 1+\rho_0 \max_{1\le j\le nT}\|\omega_j(\theta)\| = 1+\rho_0 Z_{nT}. \tag{3.18}$$

记 $\bar\omega = \frac{1}{nT}\sum\limits_{j=1}^{nT}\omega_j(\theta)$, $S_0 = \frac{1}{nT}\sum\limits_{j=1}^{nT}\omega_j(\theta)\omega_j'(\theta)$, 由 (3.17), (3.18) 式及二次型的极值理论 [24], 有

$$\begin{aligned}|\eta_0'\bar\omega| &\ge \frac{\rho_0}{nT}\sum_{j=1}^{nT}\frac{(\eta_0'\omega_j(\theta))^2}{1+\rho_0 Z_{nT}} = \frac{\rho_0}{1+\rho_0 Z_{nT}}\eta_0'\frac{1}{nT}\{\sum_{j=1}^{nT}\omega_j(\theta)\omega_j'(\theta)\}\eta_0\\ &= \frac{\rho_0}{1+\rho_0 Z_{nT}}\eta_0' S_0\eta_0 \ge \frac{\rho_0}{1+\rho_0 Z_{nT}}\lambda_{\min}(S_0)\eta_0'\eta_0 = \frac{\rho_0}{1+\rho_0 Z_{nT}}\lambda_{\min}(S_0),\end{aligned}$$

即 $|\eta_0'\bar\omega| \ge \frac{\rho_0}{1+\rho_0 Z_n}\lambda_{\min}(S_0)$, 即

$$|\eta_0'\Sigma_{k+nT+2}^{1/2}\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2}\bar\omega| \ge \frac{\rho_0}{1+\rho_0 Z_{nT}}\lambda_{\min}(S_0). \tag{3.19}$$

而

$$\begin{aligned}|\eta_0'\Sigma_{k+nT+2}^{1/2}\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2}\bar\omega| &= |(\Sigma_{k+nT+2}^{1/2}\eta_0)'\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2}\bar\omega| \le \left\|\Sigma_{k+nT+2}^{1/2}\eta_0\right\|\left\|\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2}\bar\omega\right\|\\ &= \sqrt{\eta_0'\Sigma_{k+nT+2}\eta_0}\left\|\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2}\bar\omega\right\| \le \sqrt{\lambda_{\max}(\Sigma_{k+nT+2})\eta_0'\eta_0}\left\|\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2}\bar\omega\right\|\\ &= \lambda_{\max}(\Sigma_{k+nT+2}^{1/2})\left\|\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2}\bar\omega\right\|,\end{aligned} \tag{3.20}$$

由 (3.19) 和 (3.20) 二式有

$$\lambda_{\max}(\Sigma_{k+nT+2}^{1/2})\left\|\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2}\bar\omega\right\| \ge \frac{\rho_0}{1+\rho_0 Z_{nT}}\lambda_{\min}(S_0),$$

进而

$$\frac{\rho_0}{1+\rho_0 Z_{nT}} \le \frac{1}{\lambda_{\min}(S_0)}\lambda_{\max}(\Sigma_{k+nT+2}^{1/2})\left\|\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2}\bar\omega\right\|. \tag{3.21}$$

由条件 (A6) 及引理 3, $S_0 \xrightarrow{P} (nT)^{-1}\Sigma_{k+nT+2}$, 所以

$$\lambda_{\min}(S_0) \xrightarrow{P} \lambda_{\min}((nT)^{-1}\Sigma_{k+nT+2}),\ \frac{1}{\lambda_{\min}(S_0)} \xrightarrow{P} \frac{1}{\lambda_{\min}((nT)^{-1}\Sigma_{k+nT+2})},$$

故

$$\frac{1}{\lambda_{\min}(S_0)} = O_p(1). \tag{3.22}$$

另外

$$(nT)^{-1/2}\lambda_{\max}(\Sigma_{k+nT+2}^{1/2}) = (nT)^{\frac12}(\lambda_{\max}(\Sigma_{k+nT+2}))^{\frac12} = \lambda_{\max}(\frac{1}{nT}\Sigma_{k+nT+2})^{\frac12} \le C^{\frac12}, \tag{3.23}$$

$$\|\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2}\bar\omega\| = \|\frac{1}{nT}\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2}\sum_{j=1}^{nT}\omega_i(\theta)\| = \frac{1}{nT}\|\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2}\sum_{j=1}^{nT}\omega_i(\theta)\| = \frac{1}{nT}O_p(1), \tag{3.24}$$

综合 (3.21)–(3.24) 几个式子, 得

$$\frac{\rho_0}{1+\rho_0 Z_{nT}} = O_p((nT)^{-1/2}),$$

由 (3.12) 得

$$\rho_0 = O_p((nT)^{-1/2}). \tag{3.25}$$

令 $\xi_i = \gamma'\omega_i(\theta)$, 由 (3.25) 式及 (3.12) 式得到

$$\max_{1\le i\le nT}|\xi_i| = O_p((nT)^{1/2})O_p((nT)^{-1/2}) = o_p(1). \tag{3.26}$$

由 (3.10) 式, 也有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{nT}\sum_{j=1}^{nT}\frac{\omega_j(\theta)}{1+\gamma'\omega_j(\theta)} &= \frac{1}{nT}\sum_{j=1}^{nT}\frac{\omega_j(\theta)(1+\gamma'\omega_j(\theta))-\omega_j(\theta)\gamma'\omega_j(\theta)}{1+\gamma'\omega_j(\theta)}\\
&= \frac{1}{nT}\sum_{j=1}^{nT}\omega_j(\theta) - \frac{1}{nT}\sum_{j=1}^{nT}\frac{\omega_j(\theta)\gamma'\omega_j(\theta)}{1+\gamma'\omega_j(\theta)}\\
&= \frac{1}{nT}\sum_{j=1}^{nT}\omega_j(\theta) - \frac{1}{nT}\sum_{j=1}^{nT}\frac{\omega_j(\theta)\gamma'\omega_j(\theta)(1+\gamma'\omega_j(\theta))-\omega_j(\theta)(\gamma'\omega_j(\theta))^2}{1+\gamma'\omega_j(\theta)}\\
&= \frac{1}{nT}\sum_{j=1}^{nT}\omega_j(\theta) - \frac{1}{nT}\sum_{j=1}^{nT}\omega_j(\theta)\gamma'\omega_j(\theta) + \frac{1}{nT}\sum_{j=1}^{nT}\frac{\omega_j(\theta)(\gamma'\omega_j(\theta))^2}{1+\gamma'\omega_j(\theta)}\\
&= \frac{1}{nT}\sum_{j=1}^{nT}\omega_j(\theta) - (\frac{1}{nT}\sum_{j=1}^{nT}\omega_j\omega_j')\gamma + \frac{1}{nT}\sum_{j=1}^{nT}\frac{\omega_j(\theta)(\gamma'\omega_j(\theta))^2}{1+\gamma'\omega_j(\theta)}\\
&= \bar{\omega} - S_0\gamma + \frac{1}{nT}\sum_{j=1}^{nT}\frac{\omega_j(\theta)\xi_j^2}{1+\xi_j} = 0,
\end{aligned}$$

所以

$$\gamma = S_0^{-1}\bar{\omega} + S_0^{-1}\frac{1}{nT}\sum_{j=1}^{nT}\frac{\omega_j(\theta)\xi_j^2}{1+\xi_j} \hat{=} S_0^{-1}\bar{\omega} + \zeta. \tag{3.27}$$

由于 $(nT)^{-1}\sum\limits_{j=1}^{nT}\|\omega_j(\theta)\|^3\|\xi\|^2 = (nT)^{-1}O_p(nT)O_p((nT)^{-1}) = O_p((nT)^{-1})$, 所以 ζ 是有界的. 利用泰勒展开式, 有

$$\log(1+\gamma'(\theta)\omega_i(\theta)) = \log(1+\xi_i) = \xi_i - \frac{1}{2}\xi_i^2 + d_i, \tag{3.28}$$

其中 $d_i = \frac{1}{3(1+h)^3}\xi_i^3 \hat{=} B\xi_i^3$, h 介于 0 与 ξ_i 之间, $0 < B < \infty$. 由 (3.25) 式及引理 3, 当 $n\to\infty$ 时,

$$\|\sum_{i=1}^{nT}d_i\| \le B\sum_{i=1}^{nT}|\xi_i|^3 \le B\rho_0^3\sum_{i=1}^{nT}\|\omega_i(\theta)\|^3 = O_p((nT)^{-1/2}) = o_p(1). \tag{3.29}$$

另外, 由引理 3 得 $\lambda_{\max}(S_0)\xrightarrow{p}\lambda_{\max}((nT)^{-1}\Sigma_{k+nT+2})\le C_2$, 即 $\lambda_{\max}(S_0)=O_p(1)$, 所以

$$nT\zeta' S_0^{-1}\zeta\le nT\cdot\lambda_{\max}(S_0)\zeta'\zeta=nT\cdot\lambda_{\max}(S_0)\left\|\zeta\right\|^2=O_p((nT)^{-1})=o_p(1). \tag{3.30}$$

根据 (3.27) 及 (3.28) 二式,

$$\begin{aligned}
l_n(\theta)=&2\sum_{i=1}^{nT}\log(1+\gamma'(\theta)\omega_i(\theta))=2\sum_{i=1}^{nT}(\xi_i-\frac{1}{2}\xi_i^2+d_i)=2\sum_{i=1}^{nT}\xi_i-\sum_{i=1}^{nT}\xi_i^2+2\sum_{i=1}^{nT}d_i\\
=&2\gamma'\sum_{i=1}^{nT}\omega_i(\theta)-\gamma'\{\sum_{i=1}^{nT}\omega_i'(\theta)\omega_i(\theta)\}\gamma+2\sum_{i=1}^{nT}d_i=2nT\gamma'\bar\omega-nT\gamma' S_0\gamma+2\sum_{i=1}^{nT}d_i\\
=&2nT(S_0^{-1}\bar\omega+\zeta)'\bar\omega-nT(S_0^{-1}\bar\omega+\zeta)'S_0(S_0^{-1}\bar\omega+\zeta)+2\sum_{i=1}^{nT}d_i\\
=&2nT(S_0^{-1}\bar\omega)'\bar\omega+2nT\zeta'\bar\omega-(nT\bar\omega' S_0^{-1}\bar\omega+2nT\bar\omega'\zeta+nT\zeta' S_0^{-1}\zeta)+2\sum_{i=1}^{nT}d_i\\
=&nT\cdot\bar\omega' S_0^{-1}\bar\omega-nT\cdot\zeta' S_0^{-1}\zeta+o_p(1)\\
=&nT\cdot\bar\omega'\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2}(\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2})^{-1}S_0^{-1}(\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2})^{-1}\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2}\bar\omega-nT\cdot\zeta' S_0^{-1}\zeta+2\sum_{i=1}^{nT}d_i\\
=&(nT\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2}\bar\omega)'(nT\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2}S_0\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2})^{-1}(nT\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2}\bar\omega)-nT\cdot\zeta' S_0^{-1}\zeta+2\sum_{i=1}^{nT}d_i.
\end{aligned}$$

由假设条件 A(6) 及引理 3, 得

$$(nT\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2}\bar\omega)'(nT\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2}S_0\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2})^{-1}(nT\Sigma_{k+nT+2}^{-1/2}\bar\omega)\xrightarrow{d}\chi^2_{k+nT+2}. \tag{3.31}$$

由 (3.29)–(3.31) 三个式子就完成了定理 1 的证明.

4 引理 3 的证明

(3.12) 式的证明

$$\begin{aligned}
Z_{nT}\le&\max_{1\le i\le nT}\|b_i\widetilde\varepsilon_i\|+\max_{1\le i\le nT}\|r_i\widetilde\varepsilon_i\|+\max_{1\le i\le nT}|\widetilde g_{ii}(\widetilde\varepsilon_i^2-\sigma^2)+2\widetilde\varepsilon_i\sum_{j=1}^{i-1}\widetilde g_{ij}\widetilde\varepsilon_j|+\max_{1\le i\le nT}\|\widetilde\varepsilon_i^2-\sigma^2\|\\
\le&\max_{1\le i\le nT}\|b_i\widetilde\varepsilon_i\|+\max_{1\le i\le nT}\|r_i\widetilde\varepsilon_i\|+\max_{1\le i\le nT}|\widetilde g_{ii}(\widetilde\varepsilon_i^2-\sigma^2)|+\max_{1\le i\le nT}|2\widetilde\varepsilon_i\sum_{j=1}^{i-1}\widetilde g_{ij}\widetilde\varepsilon_j|+\max_{1\le i\le nT}\left\|\widetilde\varepsilon_i^2-\sigma^2\right\|,
\end{aligned}$$

由条件 (A1)–(A5) 及引理 1, 有

$$\max_{1\le i\le nT}\|b_i\widetilde\varepsilon_i\|=\max_{1\le i\le nT}\|b_i\|\,o_p((nT)^{1/4})=o_p((nT)^{1/4}), \tag{4.1}$$

$$\max_{1\le i\le nT}\|r_i\widetilde\varepsilon_i\|=\max_{1\le i\le nT}\|r_i\|\,o_p((nT)^{1/4})=o_p((nT)^{1/4}), \tag{4.2}$$

$$\max_{1\le i\le nT}\left|\widetilde g_{ii}(\widetilde\varepsilon_i^2-\sigma^2)\right|=\max_{1\le i\le nT}|\widetilde g_{ii}|\,o_p((nT)^{1/2})=o_p((nT)^{1/2}), \tag{4.3}$$

$$\max_{1\le i\le nT}|\widetilde\varepsilon_i\sum_{j=1}^{i-1}\widetilde g_{ij}\widetilde\varepsilon_j|=(\max_{1\le i\le nT}|\widetilde\varepsilon_i|)^2+\max_{1\le i\le nT}|\sum_{j=1}^{i-1}\widetilde g_{ij}|)=o_p((nT)^{1/2}), \tag{4.4}$$

$$\max_{1\le i\le nT}\left\|\widetilde{\varepsilon}_i^2-\sigma^2\right\|=o_p((nT)^{1/4}),\tag{4.5}$$

由 (4.1)–(4.5) 式可知 $Z_{nT}=o_p((nT)^{1/2})$, (3.12) 式得证.

(3.13) 式的证明 对任意给定的 $l=(l_1',\ l_2',\ l_3,\ l_4)'\in R^{k+nT+2}$, $\|l\|=1$, 其中 $l_1=(l_{11},\cdots,l_{1k})'\in R^k$, $l_2=(l_{21},\cdots,l_{2,nT})'\in R^{nT}, l_3\in R^1, l_4\in R^1$. 则

$$\begin{aligned} l'\omega_i(\theta) &= l_1'b_i\widetilde{\varepsilon}_i+l_2'r_i\widetilde{\varepsilon}_i+l_3\{\widetilde{g}_{ii}(\widetilde{\varepsilon}_i^2-\sigma^2)+2\widetilde{\varepsilon}_i\sum_{j=1}^{i-1}\widetilde{g}_{ij}\widetilde{\varepsilon}_j\}+l_4(\widetilde{\varepsilon}_i^2-\sigma^2)\\ &= (l_3\widetilde{g}_{ii}+l_4)(\widetilde{\varepsilon}_i^2-\sigma^2)+2\widetilde{\varepsilon}_i\sum_{j=1}^{i-1}l_3\widetilde{g}_{ij}\widetilde{\varepsilon}_j+l_1'b_i\widetilde{\varepsilon}_i+l_2'r_i\widetilde{\varepsilon}_i\\ &= (l_3\widetilde{g}_{ii}+l_4)(\widetilde{\varepsilon}_i^2-\sigma^2)+2\widetilde{\varepsilon}_i\sum_{j=1}^{i-1}l_3\widetilde{g}_{ij}\widetilde{\varepsilon}_j+(l_1'b_i+l_2'r_i)\widetilde{\varepsilon}_i, \end{aligned}$$

其中 $\widetilde{g}_{ij}, b_i$, r_i 如第 3 节所述, 所以

$$\sum_{i=1}^{nT}l'\omega_i(\theta)=\sum_{i=1}^{nT}(l_3\widetilde{g}_{ii}+l_4)(\widetilde{\varepsilon}_i^2-\sigma^2)+2\sum_{i=1}^{nT}\sum_{j=1}^{i-1}l_3\widetilde{g}_{ij}\widetilde{\varepsilon}_i\widetilde{\varepsilon}_j+\sum_{i=1}^{nT}(l_1'b_i+l_2'r_i)\widetilde{\varepsilon}_i.$$

令 $Q_{nT}=\sum\limits_{i=1}^{nT}\sum\limits_{j=1}^{nT}u_{ij}\widetilde{\varepsilon}_i\widetilde{\varepsilon}_j+\sum\limits_{i=1}^{nT}v_i\widetilde{\varepsilon}_i$, 其中 $u_{ii}=l_3\widetilde{g}_{ii}+l_4$, $u_{ij}=l_3\widetilde{g}_{ij}(i\neq j)$, $v_i=l_1'b_i+l_2'r_i$, 则

$$Q_{nT}=\sum_{i=1}^{nT}l'w_i(\theta)=\sum_{i=1}^{nT}\{u_{ii}(\widetilde{\varepsilon}_i^2-\sigma^2)+2\sum_{j=1}^{i-1}u_{ij}\widetilde{\varepsilon}_i\widetilde{\epsilon}_j+v_i\widetilde{\varepsilon}_i\}.$$

接下来检验 Q_{nT} 是否满足条件 (C2). 由假设条件 (A4), 有

$$\sum_{i=1}^{nT}|u_{ij}|\le|l_3|\sum_{i=1}^{nT}|\widetilde{g}_{ij}|+|l_4|\,.\tag{4.6}$$

接下来证 $(nT)^{-1}\sum_{i=1}^{nT}|v_i|^3\le C$. 由 $|v_i|^3=|l_1'b_i+l_2'r_i|^3\le C(|l_1'b_i|^3+|l_2'r_i|^3)$, 有

$$(nT)^{-1}\sum_{i=1}^{nT}|v_i|^3\le(nT)^{-1}\sum_{i=1}^{nT}C(|l_1'b_i|^3+|l_2'r_i|^3)\le(nT)^{-1}\sum_{i=1}^{nT}C\,|l_1'b_i|^3+(nT)^{-1}\sum_{i=1}^{nT}C\,|l_2'r_i|^3\,.$$

根据假设条件 (A4) 和 b_i 的表达式, 得

$$\begin{aligned} |l_1'b_i| &=|l_{11}\sum_{j=1}^{nT}R_{ij}\widetilde{x}_{j1}+\cdots+l_{1k}\sum_{j=1}^{nT}R_{ij}\widetilde{x}_{jk}|\le C|R_{i1}|\left\|\widetilde{X}_1\right\|+C|R_{i2}|\|\widetilde{X}_2\|+\cdots+C|R_{i,nT}|\|\widetilde{X}_{nT}\|\\ &\le C\max_{1\le i\le nT}\|\widetilde{X}_i\|(\sum_{j=1}^{nT}|R_{ij}|)\le C\max_{1\le i\le nT}\|\widetilde{X}_i\|, \end{aligned}$$

即 $|l_1'b_i|\le C\max\limits_{1\le i\le nT}\|\widetilde{X}_i\|$. 同理

$$|l_2'r_i|=|l_{21}R_{i1}+l_{22}R_{i2}+\cdots+l_{2,nT}R_{i,nT}|\ \le C\sum_{j=1}^{nT}|R_{ij}|\le C,$$

再由假设条件 (A5), 有

$$(nT)^{-1}\sum_{i=1}^{nT}C|l_1'b_i|^3\le C(nT)^{-1}\sum_{i=1}^{nT}\{C\max_{1\le i\le nT}\|\widetilde{X}_i\|\}^3\le C\max_{1\le i\le nT}\|\widetilde{X}_i\|^3\le C, \tag{4.7}$$

因此 $(nT)^{-1}\sum\limits_{i=1}^{nT}|v_i|^3\le C$. 故 Q_{nT} 满足条件 (C2).

令 e_i 为坐标轴 i 方向上的单位向量, 下面求 Q_{nT} 的方差. 由 u_{ij} 和 v_i 的表达式, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{nT}\sum_{j=1}^{nT}u_{ij}^2=&\sum_{i=1}^{nT}\{(l_3\widetilde{g}_{ii}+l_4)^2+\sum_{i\ne j}(l_3\widetilde{g}_{ij})^2\}=\sum_{i=1}^{nT}\{(l_3\widetilde{g}_{ii})^2+2l_3l_4\widetilde{g}_{ii}+l_4^2+\sum_{i\ne j}(l_3\widetilde{g}_{ij})^2\}\\
=&2l_3l_4\sum_{i=1}^{nT}\widetilde{g}_{ii}+nT\cdot l_4^2+\sum_{i=1}^{nT}\sum_{j=1}^{nT}(l_3\widetilde{g}_{ij})^2=2l_3l_4\mathrm{tr}(\widetilde{G}_{nT})+nT\cdot l_4^2+l_3^2\mathrm{tr}(\widetilde{G}_{nT}^2),\\
\sum_{i=1}^{nT}u_{ii}^2=&\sum_{i=1}^{nT}\{l_3\widetilde{g}_{ii}+l_4\}^2=\sum_{i=1}^{nT}\{(l_3\widetilde{g}_{ii})^2+2l_3l_4\widetilde{g}_{ii}+l_4^2\}\\
=&l_3^2\sum_{i=1}^{nT}\widetilde{g}_{ii}^2+2l_3l_4\mathrm{tr}(\widetilde{G}_{nT})+nT\cdot l_4^2\\
=&l_3^2\|\mathrm{Vec}\ (\ \mathrm{diag}\widetilde{G}_{nT})\|^2+2l_3l_4\mathrm{tr}(\widetilde{G}_{nT})+nT\cdot l_4^2,\\
\sum_{i=1}^{nT}v_i^2=&\sum_{i=1}^{nT}(l_1'b_i+l_2'r_i)^2=\sum_{i=1}^{nT}(l_1'b_ib_i'l_1+l_2'r_ir_i'l_2+l_1'b_ir_i'l_2+l_2'r_ib_i'l_1)\\
=&l_1'\{\sum_{i=1}^{nT}b_ib_i'\}l_1+l_2'\{\sum_{i=1}^{nT}r_ir_i'\}l_2+2l_1'\{\sum_{i=1}^{nT}b_ir_i'\}l_2\\
=&l_1'\{\sum_{i=1}^{nT}X'R_{nT}'(\lambda)e_ie_i'R_{nT}(\lambda)X\}l_1+l_2'\{\sum_{i=1}^{nT}R_{nT}'(\lambda)e_ie_i'R_{nT}(\lambda)\}l_2\\
&+2l_1'\{\sum_{i=1}^{nT}X'R_{nT}'(\lambda)e_ie_i'R_{nT}(\lambda)\}l_2\\
=&l_1'X'R_{nT}'(\lambda)R_{nT}(\lambda)Xl_1+l_2'R_{nT}'(\lambda)R_{nT}(\lambda)l_2+2l_1'X'R_{nT}'(\lambda)R_{nT}(\lambda)l_2,\\
\sum_{i=1}^{nT}u_{ii}v_i=&\sum_{i=1}^{nT}(l_3\widetilde{g}_{ii}+l_4)(l_1'b_i+l_2'r_i)=\sum_{i=1}^{nT}(l_3\widetilde{g}_{ii}l_1'b_i)+\sum_{i=1}^{nT}(l_3\widetilde{g}_{ii}l_2'r_i)+\sum_{i=1}^{nT}(l_4l_1'b_i)+\sum_{i=1}^{nT}(l_4l_2'r_i)\\
=&l_1'\{\sum_{i=1}^{nT}\widetilde{g}_{ii}b_i\}l_3+l_2'\{\sum_{i=1}^{nT}\widetilde{g}_{ii}r_i\}l_3+l_1'\{\sum_{i=1}^{nT}b_i\}l_4+l_2'\{\sum_{i=1}^{nT}r_i\}l_4\\
=&l_1'\{\sum_{i=1}^{nT}\widetilde{g}_{ii}X'R_{nT}'(\lambda)e_i\}l_3+l_2'\{\sum_{i=1}^{nT}\widetilde{g}_{ii}R_{nT}'(\lambda)e_i\}l_3+l_1'\{\sum_{i=1}^{nT}X'R_{nT}'(\lambda)e_i\}l_4+l_2'\{\sum_{i=1}^{nT}R_{nT}'(\lambda)e_i\}l_4\\
=&l_1'X'R_{nT}'(\lambda)(\sum_{i=1}^{nT}\widetilde{g}_{ii}e_i)l_3+l_2'R_{nT}'(\lambda)(\sum_{i=1}^{nT}\widetilde{g}_{ii}e_i)l_3+l_1'X'R_{nT}'(\lambda)(\sum_{i=1}^{nT}e_i)l_4+l_2'R_{nT}'(\lambda)(\sum_{i=1}^{nT}e_i)l_4\\
=&l_1'X'R_{nT}'(\lambda)\mathrm{Vec}(\mathrm{diag}\widetilde{G}_{nT})l_3+l_2'R_{nT}'(\lambda)\mathrm{Vec}(\mathrm{diag}\widetilde{G}_{nT})l_3+l_1'X'R_{nT}'(\lambda)1_{nT}l_4+l_2'R_{nT}'(\lambda)1_{nT}l_4,
\end{aligned}$$

其中 1_{nT} 为元素均为 1 的 nT 维列向量. 则 Q_{nT} 的方差为

$$\begin{aligned}\sigma^2_{Q_{nT}} =& 2\sum_{i=1}^{nT}\sum_{j=1}^{nT}u_{ij}^2\sigma^4+\sum_{i=1}^{nT}v_i^2\sigma^2+\sum_{i=1}^{nT}\{u_{ii}^2(\mu_4-3\sigma^4)+2u_{ii}v_i\mu_3\}\\ =& 2\sigma^4\{2l_3l_4\mathrm{tr}(\widetilde{G}_{nT})+nTl_4^2+l_3^2\mathrm{tr}(\widetilde{G}^2_{nT})\}\\ &+\sigma^2\{l_1'X'R_{nT}'(\lambda)R_{nT}(\lambda)Xl_1+l_2'R_{nT}'(\lambda)R_{nT}(\lambda)l_2+2l_1'X'R_{nT}'(\lambda)R_{nT}(\lambda)l_2\}\\ &+(\mu_4-3\sigma^4)\{l_3^2\|\mathrm{Vec}\ (\mathrm{diag}\widetilde{G}_{nT})\|^2+2l_3l_4\mathrm{tr}(\widetilde{G}_{nT})+nT\cdot l_4^2\}\\ &+2\mu_3\{l_1'X'R_{nT}'(\lambda)\mathrm{Vec}(\mathrm{diag}\widetilde{G}_{nT})l_3+l_2'R_{nT}'(\lambda)\mathrm{Vec}(\mathrm{diag}\widetilde{G}_{nT})l_3+l_1'X'R_{nT}'(\lambda)1_{nT}l_4\\ &+l_2'R_{nT}'(\lambda)1_{nT}l_4\}\\ =& l'\Sigma_{k+nT+2}l,\end{aligned}$$

根据假设条件 (A6),

$$\begin{aligned}(nT)^{-1}\sigma^2_{Q_{nT}}&=(nT)^{-1}l'\cdot\Sigma_{k+nT+2}\cdot l\geq\lambda_{\min}((nT)^{-1}\Sigma_{k+nT+2})\cdot l'l\\ &=\lambda_{\min}((nT)^{-1}\Sigma_{k+nT+2})\geq C_1>0,\end{aligned}$$

根据引理 2, 有

$$\frac{Q_{nT}-E(Q_{nT})}{\sigma_{Q_{nT}}}\xrightarrow{d}N(0,1).$$

令 $E(Q_{nT})=0$, 得到 (3.13) 式.

(3.14) 式的证明 类似文献 [8] 中引理 3 中 (13) 式的证明. 略.

(3.15) 式的证明 由 $\omega_i(\theta)$ 的表达式 (3.8), 有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{nT}E\left\|\omega_i(\theta)\right\|^3\leq&\sum_{i=1}^{nT}E\left\|b_i\varepsilon_i\right\|^3+\sum_{i=1}^{nT}E\left\|r_i\varepsilon_i\right\|^3+\sum_{i=1}^{nT}E|\widetilde{g}_{ii}(\varepsilon_i^2-\sigma^2)\\ &+2\varepsilon_i\sum_{j=1}^{i-1}\widetilde{g}_{ij}\varepsilon_j|^3+\sum_{i=1}^{nT}E|\varepsilon_i^2-\sigma^2|^3.\end{aligned}$$

根据假设条件 (A1)–(A5), b_i 的表达式及独立随机变量和的矩不等式, 有

$$\begin{aligned}\|b_i\widetilde{\varepsilon}_i\|&=\sqrt{\|b_i\widetilde{\varepsilon}_i\|^2}=\{(\sum_{j=1}^{nT}R_{ij}\widetilde{x}_{j1})^2+\cdots+(\sum_{j=1}^{nT}R_{ij}\widetilde{x}_{jk})^2\}^{1/2}\cdot|\widetilde{\varepsilon}_i|\\ &\leq|\sum_{j=1}^{nT}R_{ij}\widetilde{x}_{j1}+\cdots+\sum_{j=1}^{nT}R_{ij}\widetilde{x}_{jk}|\cdot|\widetilde{\varepsilon}_i|\leq\{\|\widetilde{X}_1\||R_{i1}|+\cdots+\|\widetilde{X}_{nT}\||R_{i,nT}|\}\cdot|\varepsilon_i|\\ &\leq\max_{1\leq i\leq nT}\|\widetilde{X}_i\|\{\sum_{j=1}^{nT}|R_{ij}|\}\cdot|\widetilde{\varepsilon}_i|\leq C\max_{1\leq i\leq nT}\|\widetilde{X}_i\|\cdot|\widetilde{\varepsilon}_i|,\end{aligned}$$

进而有

$$\sum_{j=1}^{nT}E\left\|b_i\widetilde{\varepsilon}_i\right\|^3\leq CnT\max_{1\leq i\leq nT}\left\|\widetilde{X}_i\right\|^3E|\widetilde{\varepsilon}_1|^3=O(nT). \tag{4.8}$$

同理

$$\sum_{i=1}^{nT} E\|r_i\widetilde{\varepsilon}_i\|^3 \le \sum_{j=1}^{nT} E\left\{\|r_i\|^3 |\widetilde{\varepsilon}_i|^3\right\} \le nT \max_{1\le i\le nT} \|r_i\|^3 E|\widetilde{\varepsilon}_1|^3 = O(nT), \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{nT} E|\widetilde{g}_{ii}(\widetilde{\varepsilon}_i^2-\sigma^2)+2\widetilde{\varepsilon}_i\sum_{j=1}^{i-1}\widetilde{g}_{ij}\widetilde{\varepsilon}_j|^3 \le C\sum_{i=1}^{nT} E|\widetilde{g}_{ii}(\widetilde{\varepsilon}_i^2-\sigma^2)|^3 + C\sum_{i=1}^{nT} E|2\widetilde{\varepsilon}_i\sum_{j=1}^{i-1}\widetilde{g}_{ij}\widetilde{\varepsilon}_j|^3\\
\le& C\sum_{i=1}^{nT} E|\widetilde{g}_{ii}(\widetilde{\varepsilon}_i^2-\sigma^2)|^3 + C\sum_{i=1}^{nT} E|\widetilde{\varepsilon}_i|^3\sum_{j=1}^{i-1}|\widetilde{g}_{ij}\widetilde{\varepsilon}_j|^3 + C\sum_{i=1}^{nT} E|\widetilde{\varepsilon}_i|^3\sum_{j=1}^{i-1}|\widetilde{g}_{ij}\varepsilon_j|^3 \qquad (4.10)\\
\le& C\sum_{i=1}^{nT} E|\widetilde{g}_{ii}(\widetilde{\varepsilon}_i^2-\sigma^2)|^3 + C\sum_{i=1}^{nT} E|\widetilde{\varepsilon}_i|^3\sum_{j=1}^{i-1}|\widetilde{g}_{ij}\widetilde{\varepsilon}_j|^3 + C\sum_{i=1}^{nT} E|\widetilde{\varepsilon}_i|^3\{\sum_{j=1}^{i-1}E(\widetilde{g}_{ij}\widetilde{\varepsilon}_j)^2\}^{3/2} = O(nT),
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{nT} E|\widetilde{\varepsilon}_i^2-\sigma^2|^3 \le \sum_{j=1}^{nT} C(E|\widetilde{\varepsilon}_i)^2|^3+\sigma^6) \le nTC, \tag{4.11}$$

由 (4.8)–(4.11), 得 $\sum\limits_{i=1}^{nT} E|\varepsilon_i^2-\sigma^2|^3 = O(nT)$. 于是 $\sum\limits_{i=1}^{nT} E\|\omega_i(\theta)\|^3 = O(nT)$. 再由 Markov 不等式, 有

$$P\left\{\frac{1}{nT}\sum_{i=1}^{nT} E\|\omega_i(\theta)\|^3 > a\right\} \le \frac{1}{a}E\left\{\frac{1}{nT}\sum_{i=1}^{nT}\|\omega_i(\theta)\|^3\right\} \le \frac{C}{a},$$

其中 $a>0$, 故 $\sum\limits_{i=1}^{nT}\|\omega_i(\theta)\|^3 = O(nT)$, (3.15) 式得证. 由此完成了引理 3 的证明.

参 考 文 献

[1] Anselin L. Spatial econometrics: methods and models (1st ed.)[M]. Dordrecht: Kluwer Academic, 1988.

[2] Elhorst J P. Specification and estimation of spatial panel data models [J]. International Regional Science Review, 2003, 26(3): 244–268.

[3] Kapoor M, Kelejian H H, Prucha I R. Panel data models with spatially correlated error components [J]. Journal of Econometrics, 2007, 140(1): 97–130.

[4] Yu J H, Jong R D, Lee L F. Quasi-maximum likelihood estimation for spatial dynastic panel data with fixed effects when both n and T are large [J]. Journal of Econometrics, 2008, 146(1): 118–134.

[5] Lee L F, Yu J H. Estimation of spatial autoregressive panel data models with fixed effects [J]. Journal of Econometrics, 2010, 154(2): 165–185.

[6] 文丽霞. 空间面板数据模型的研究及其应用 [D]. 广西: 广西大学, 2014.

[7] 戴晓文, 晏振, 田茂再. 带固定效应面板数据空间误差模型的分位回归估计 [J]. 应用数学学报 (中文版), 2016, 39(6): 847–858.

[8] Qin Y S. Empirical likelihood for linear models with spatial errors [J]. arXiv:1808.08793, 2018.

[9] Wang W, Lee L F. Estimation of spatial panel data models with randomly missing data in the dependent variable [J]. Regional Science and Urban Economics, 2013, 43(3): 521–538.

[10] 于力超, 金勇进. 含非随机缺失数据的面板数据参数估计方法 [J]. 统计研究, 2016, 33(1): 95–102.

[11] Qu X, Lee L F, Yu J H. QML estimation of spatial dynamic panel data models with endogenous time varying spatial weights matrices [J]. Journal of Econometrics, 2017, 197(2): 173–201.

[12] Lin X, Lee L F. GMM estimation of spatial autoregressive models with unknown heteroskedasticity [J]. Journal of Econometrics, 2010, 157(1): 34–52.

[13] Lee L F. GMM and 2SLS estimation of mixed regressive, spatial autoregressive models [J]. Journal of Econometrics, 2007, 137(2): 489–5l4.

[14] Owen A B. Empirical likelihood ratio confidence intervals for a single function [J]. Biometrika, 1988, 75(2): 237–249.

[15] Owen A B. Empirical likelihood ratio confidence regions [J]. Annals of Statistics, 1990, 18(1): 90–120.

[16] Owen A B. Empirical likelihood for linear models [J]. Annals of Statistics, 1991, 19(4): 1725–1747.

[17] 石坚. 线性相关模型中误差方差的经验似然估计及其 Bootstrap [J]. 数学物理学报 (中文版), 1997, 17(1): 38–46.

[18] Cui H J, Chen S X. Empirical likelihood confidence region for parameter in the errors-in-variables models [J]. Journal of Multivariate Analysis, 2003, 84(1): 101–115.

[19] Kostov P. Empirical likelihood estimation of the spatial quantile regression [J]. Journal of Geographical Systems, 2013, 15(1): 51–69.

[20] 陈燕红. 时间序列模型的经验似然推断 [D]. 大连: 大连理工大学, 2013.

[21] Kelejian H H, Prucha I R. On the asymptotic distribution of the Moran I test statistic with applications [J]. Journal of Econometrics, 2001, 104(2), 219–257.

[22] Yu J H, Jong R D, Lee L F. Estimation for spatial dynamic panel data with fixed effects: The case of spatial cointegration [J]. Journal of Econometrics, 2012, 167(1), 16–37.

[23] Kelejian H H, Prucha I R. A generalized spatial two-stage least squares procedure for estimating a spatial autoregressive model with autoregressive disturbance [J]. Journal of Real Estate Finance and Economics, 1988, 17(1): 99–121.

[24] 张尧庭, 方开泰. 多元统计分析引论 (第一版)[M]. 北京: 科学出版社, 1982.

EMPIRICAL LIKELIHOOD INFERENCE FOR PANEL DATA MODELS WITH SPATIAL ERRORS AND FIXED EFFECTS

ZHOU Ting, QIN Yong-song

(*College of Mathematic and Statistics, Guangxi Normal University, Guilin 531006, China*)

Abstract: This article investigates the empirical likelihood inference for panel data models with spatial errors and fixed effects. Via empirical likelihood methods and by means of a martingale difference array, we transform linear-quadratic forms of the estimating equation of panel data models with spatial errors into linear forms, construct the empirical likelihood ratio statistics for the models, and obtain the limiting distributions of the statistics.

Keywords: fixed effects; spatial panel data models with spatial errors; martingale difference array; empirical likelihood; asymptotic distribution

2010 MR Subject Classification: 62E20; 62G20