Vol. 40 (2020)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

几类区域上不等维的边界唯一性定理

刘红炎
(武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

摘 要: 本文研究边界唯一性问题. 利用构造函数与最大模原理的方法, 得到了一些不等维的边界唯一性结果, 将 Burns-Krantz 等人的等维边界唯一性结果推广到了不等维情形.

关 键 词: Schwarz 引理; 边界唯一性定理; Fock-Bargmann-Hartogs 域
MR(2010) **主题分类号:** 32C80; 32A10; 32A40 **中 图 分 类 号:** O174.56
文 献 标 识 码: A **文 章 编 号:** 0255-7797(2020)05-0544-07

1 引言

边界唯一性定理是将 Schwarz 引理应用到边界上时产生的. 1994 年, Burns-Krantz [1] 研究边界上的 Schwarz 引理, 得到了全纯映射的一些刚性结果, 也就是边界唯一性的结果, 主要分别得到了在单位圆盘, 单位球和强拟凸域上的一些结论. 在单位球上的结论如下.

定理 1.1 [1] (Burns-Krantz) 设 $f: B^n \to B^n$ 是单位球到自身的全纯映射, 满足当 $z \to \mathbf{1}$ 时 (这里 $\mathbf{1} = (1, 0, \cdots, 0)$) $f(z) = z + O(|z - \mathbf{1}|^4)$, 则 $f(z) \equiv z$ 于单位球内.

自从 Burns-Krantz 的工作之后, 边界 Schwarz 引理开始被越来越多的学者研究. 例如 2015 年 Liu-Wang-Tang 做出了单位球中的一类边界 Schwarz 引理 [2] , 2018 年 Tu-Zhang 得到了对称双圆盘上的边界 Schwarz 引理 [3] . 在 1995 年 X. Huang 将其做到有界弱拟凸域上和强凸域上 [4] , 其在强凸域中设定一个不动点, 然后把上述定理中的 4 次降到了 3 次. 其在单位球上的相关结论如下.

定理 1.2 [4] (Xiaojun Huang) 设 $f: B^n \to B^n$ 是单位球到自身的全纯映射, 满足当 $z \to \mathbf{1}$ 时 $f(z) = z + O(|z - \mathbf{1}|^3)$ 且 $f(z_0) = z_0$, 其中 $z_0 \in B^n$, 则 $f(z) \equiv z$.

以上两个定理是在单位球上的经典结果, 接下来看一下在 Fock-Bargmann-Hartogs 域上已有的结果. 首先引入这类区域的定义, Fock-Bargmann-Hartogs 域 $D_{n,m}$ 定义如下

$$D_{n,m} := \{(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m : \|z\|^2 < e^{-\mu\|w\|^2}, \mu > 0\}.$$

Fock-Bargmann-Hartogs 域是一类无界强拟凸域, 2013 年 Yamamori 给出了这类域的 Bergman 核函数 [5]; 2016 年 Bi-Feng-Tu 给出了这个域上的平衡度量 [6]. 可以从上述两个文献中更好地了解 Fock-Bargmann-Hartogs 域.

2006 年, Baracco-Zaitsev-Zampieri 将之前 Burns-Krantz 的边界唯一性结果推广到了强拟凸流形上 [7] , 我们提取其在 Fock-Bargmann-Hartogs 域上的结论如下.

*收稿日期: 2019-05-19 接收日期: 2019-10-31
作者简介: 刘红炎 (1994–), 男, 湖北襄阳, 博士, 主要研究方向: 多复变函数论.

定理 1.3 [7] (Baracco-Zaitsev-Zampieri) 设 $f: D_{n,m} \to D_{n,m}$ 是从 Fock-Bargmann-Hartogs 域到自身的全纯映射, 满足当 (z,w) 非切向逼近 $(\mathbf{1},\mathbf{0})$ 时 (这里 $\mathbf{0}=(0,\cdots,0)$)

$$F(z,w)=(z,w)+O(|(z,w)-(\mathbf{1},\mathbf{0})|^4),$$

则 $F(z,w)\equiv(z,w)$.

2018 年, Liu-Chen-Pan 得到了一种单位球上不等维的边界唯一性定理 [8], 他们将 f 第一个分量函数设定为仅关于 z 第一个分量的恒等函数, 并在边界点 $\mathbf{1}$ 增加了 C^2 的条件之后也得到了可以把指数估计降低一阶的结果, 而且直接做出不等维情形的结果. 如下定理是他们的主要结论.

定理 1.4 [8] (Liu-Chen-Pan) 设 $f: B^n \to B^N, N\geq n\geq 1$ 是从单位球 B^n 到 B^N 的全纯映射, 满足当 $z\to\mathbf{1}$ 时

$$f(z)=(z,\mathbf{0})+O(|z-\mathbf{1}|^3).$$

若 f 在点 $\mathbf{1}$ 处是 C^2 的, 并且 $f_1(z)=z_1$, 这里 f_1 是 f 的第一个分量函数, z_1 是 z 的第一个坐标分量, 则 $f(z)\equiv(z,\mathbf{0})$.

受到他们的启发, 本文得到了一些不等维的边界唯一性定理的结果, 也就是对 Burns-Krantz 型定理从等维情形推广到不等维情形.

2 主要定理

这一节介绍本文的主要结果及其证明, 本节前三个定理是对上一节中叙述到的边界唯一性定理的推广, 后两个定理是受前述结果启发做出的边界唯一性定理的结果. 首先将 Burns-Krantz 单位球上的定理 1.1 推广为不等维单位球之间的定理.

定理 2.1 设 $f: B^n\to B^m, n\leq m$ 是一个全纯映射, 满足当 $z\to\mathbf{1}$ 时有

$$f(z)=(z,\mathbf{0})+O(|z-\mathbf{1}|^4),$$

则 $f(z)\equiv(z,\mathbf{0})$.

证 $n\leq m$, $f=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$, 令 $g=(f_1,\cdots,f_n)$. 由于

$$\begin{aligned}|g|^2&=|f_1|^2+|f_2|^2+\cdots+|f_n|^2\leq|f_1|^2+|f_2|^2+\cdots+|f_n|^2+\cdots+|f_m|^2\\&=|f|^2<1,\end{aligned}$$

则 g 是一个从单位球 B^n 到自身的全纯映照. 注意到定理中的条件 $f(z)=(z,\mathbf{0})+O(|z-\mathbf{1}|^4)$, $(z\to\mathbf{1})$ 再结合如下不等式 $|g(z)-z|\leq|f(z)-(z,\mathbf{0})|$, 得到

$$g(z)=z+O(|z-\mathbf{1}|^4),\ (z\to\mathbf{1}).$$

此时 $g(z)$ 满足定理 1.1 中的条件, 则 $g(z)\equiv z$.

设 $f=(g,h)$, 当 $z\to\partial B^n, z\in B^n$ 时, 有 $|g|\to1$, 而 $|g|^2+|h|^2=1$, 则 $|h|\to0$. 由全纯函数的最大模原理可以得到: $h=\mathbf{0}$. 故 $f(z)\equiv(z,\mathbf{0})$. 定理 2.1 证毕.

注 2.1 以上定理中有 $n\leq m$ 的条件, 是由于当 $n>m$ 时, 并不能有类似推广. 也就是说如果 $f: B^n\to B^m, n>m$ 是全纯映照, 满足当 $z\to\mathbf{1}$ 时有

$$f(z)=(z_1,z_2,\cdots,z_m)+O(|z-\mathbf{1}|^4). \tag{2.1}$$

此时不能得到 $f(z) \equiv (z_1, z_2, \cdots, z_m)$.

在此举一个反例. 令 $f(z) = (z_1 + \frac{1}{10} z_{m+1}^4, z_2, \cdots, z_m)$, 注意到如下不等式成立

$$\begin{aligned}|f(z)|^2 &= |z_1 + \frac{1}{10} z_{m+1}^4|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_m|^2 \\ &\le |z_1|^2 + \frac{1}{100}|z_{m+1}|^8 + 2|z_1|\frac{1}{10}|z_{m+1}|^4 + |z_2|^2 + \cdots + |z_m|^2 \\ &\le |z_1|^2 + |z_{m+1}|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_m|^2 \\ &< 1,\end{aligned}$$

则 f 是从 B^n 到 B^m 的全纯映照, 并且满足式 (2.1) 的条件, 但 $f(z) \neq (z_1, z_2, \cdots, z_m)$. 注 2.1 完毕.

然后注意到类似上述定理 2.1 的方法还可以用来将 1995 年 Huang 的结果 (定理 1.2) 推广到不等维的单位球之间, 如下定理结论.

定理 2.2 设 $f: B^n \to B^m, n \le m$ 是一个全纯映射, 满足当 $z \to \mathbf{1}$ 时有

$$f(z) = (z, \mathbf{0}) + O(|z - \mathbf{1}|^3),$$

且存在 $z_0 \in B^n$ 使 $f(z_0) = (z_0, \mathbf{0})$, 则 $f(z) \equiv (z, \mathbf{0})$.

证 $n \le m$, $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$. 令 $g = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$, 由于

$$\begin{aligned}|g|^2 &= |f_1|^2 + |f_2|^2 + \cdots + |f_n|^2 \le |f_1|^2 + |f_2|^2 + \cdots + |f_n|^2 + \cdots + |f_m|^2 \\ &= |f|^2 < 1,\end{aligned}$$

则 g 是一个从单位球 B^n 到自身的全纯映照. 注意到定理中的条件 $f(z) = (z, \mathbf{0}) + O(|z - \mathbf{1}|^3)$, $(z \to \mathbf{1})$ 再结合如下不等式 $|g(z) - z| \le |f(z) - (z, \mathbf{0})|$, 得到

$$g(z) = z + O(|z - \mathbf{1}|^3)\ (z \to \mathbf{1}).$$

由于 $f(z_0) = (z_0, \mathbf{0})$, 故 $g(z_0) = z_0$. 于是 $g(z)$ 满足定理 1.2 中的条件, 则 $g(z) \equiv z$.

令 $f = (g, h)$, 当 $z \to \partial B^n, z \in B^n$ 时, 有 $|g| \to 1$, 又 $|g|^2 + |h|^2 = 1$, 则 $|h| \to 0$. 由全纯函数的最大模原理可以得到: $h = \mathbf{0}$. 故 $f(z) \equiv (z, \mathbf{0})$. 定理 2.2 证毕.

对于定理 2.2 也有类似定理 2.1 的注记, 即在 $n > m$ 时没有类似推广, 可以列举出相应反例.

以上两个定理就是本文在单位球上的主要结论. 接下来将着眼于本文探讨的第二类区域, Fock-Bargmann-Hartogs 域, 下述定理是本文在此区域上的第一个主要定理, 是将 2006 年 Baracco-Zaitsev-Zampieri 的定理 1.3 推广到不等维.

定理 2.3 设 $F: D_{n,m} \to D_{N,M}, n \le N, m \le M$ 是一个全纯映射, 满足当 (z, w) 非切向逼近 $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$ 时有

$$F(z, w) = (z, \mathbf{0}, w, \mathbf{0}) + O(|(z, w) - (\mathbf{1}, \mathbf{0})|^4),$$

则 $F(z, w) \equiv (z, \mathbf{0}, w, \mathbf{0})$.

证 $F = (f, g) = (f_1, f_2, \cdots, f_N, g_1, g_2, \cdots, g_M)$. 令 $G = (f_1, \cdots, f_n, g_1, \cdots, g_m)$, 注意到如下不等式

$$|f_1|^2 + \cdots + |f_n|^2 \le |f_1|^2 + \cdots + |f_N|^2 < e^{-\mu(|g_1|^2 + \cdots + |g_M|^2)} \le e^{-\mu(|g_1|^2 + \cdots + |g_m|^2)}.$$

则 G 是一个从 Fock-Bargmann-Hartogs 域 $D_{n,m}$ 到自身的一个全纯映照. 注意到定理中的条件当 (z,w) 非切向逼近 $(\mathbf{1},\mathbf{0})$ 时

$$F(z,w)=(z,\mathbf{0},w,\mathbf{0})+O(|(z,w)-(\mathbf{1},\mathbf{0})|^4),$$

再结合如下不等式

$$\begin{aligned}|G(z,w)-(z,w)|&=|(f_1-z_1,\cdots,f_n-z_n,g_1-w_1,\cdots,g_m-w_m)|\\&\leq|(f_1-z_1,\cdots,f_n-z_n,f_{n+1},\cdots,f_N,g_1-w_1,\cdots,g_m-w_m,g_{m+1},\cdots,g_M)|\\&=|F(z,w)-(z,\mathbf{0},w,\mathbf{0})|\end{aligned}$$

得到当 (z,w) 非切向逼近 $(\mathbf{1},\mathbf{0})$ 时

$$G(z,w)=(z,w)+O(|(z-\mathbf{1},w)|^4).$$

此时 $G(z,w)$ 满足定理 1.3 中的条件, 则 $G(z,w)\equiv(z,w)$, 即

$$F(z,w)=(z,f_{n+1},\cdots,f_N,w,g_{m+1},\cdots,g_M).$$

注意如下不等式

$$|z|^2\leq|z|^2+|f_{n+1}|^2+\cdots+|f_N|^2<e^{-\mu(|w|^2+|g_{m+1}|^2+\cdots+|g_M|^2)}\leq e^{-\mu|w|^2}.$$

当 $(z,w)\to\partial D_{n,m},(z,w)\in D_{n,m}$ 时, 有 $|z|^2\to e^{-\mu|w|^2}$. 则由上述不等式可知

$$|f_{n+1}|^2+\cdots+|f_N|^2\to 0,\ |g_{m+1}|^2+\cdots+|g_M|^2\to 0.$$

由全纯函数的最大模原理可以得到 $f_{n+1}=\cdots=f_N=g_{m+1}=\cdots=g_N=0,\ (z,w)\in D_{n,m}$. 故 $F(z,w)\equiv(z,\mathbf{0},w,\mathbf{0})$. 定理 2.3 证毕.

受 Liu-Chen-Pan 固定一个分量函数为对应坐标恒等函数的启发, 本文得到一个 Fock-Bargmann-Hartogs 域上的固定坐标分量函数的不等维边界唯一性定理结论, 这里的估计次数是 3 次, 对坐标分量及边界点处的条件要求比较高, 定理结论及证明如下.

定理 2.4 设 $F:D_{n,m}\to D_{N,M},n\leq N,m\leq M$ 是一个全纯映照, $(e^{-\frac{1}{2}\mu|w|^2},0,\cdots,0,w)$ 是 $D_{n,m}$ 的边界点. 当 $(z,w)\to(e^{-\frac{1}{2}\mu|w|^2},0,\cdots,0,w)$ 时, 有

$$F(z,w)=(z,\mathbf{0},w,\mathbf{0})+O(|(z,w)-(e^{-\frac{1}{2}\mu|w|^2},0,\cdots,0,w)|^3).$$

设 $F=(f,g)=(f_1,\cdots,f_N,g_1,\cdots,g_M)$, F 在点 $(e^{-\frac{1}{2}\mu|w|^2},0,\cdots,0,w)$ 处是 C^2 的, $f_1(z,w)=z_1,\ g_i(z,w)=w_i,\ 1\leq i\leq m$, 则 $F(z,w)\equiv(z,\mathbf{0},w,\mathbf{0})$.

证 固定 w_0, 将 $F(z,w_0)$ 看做关于 z 的全纯映射. 当 $(z,w_0)\to(e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2},0,\cdots,0,w_0)$ 时有

$$F(z,w_0)=(z,\mathbf{0},w_0,\mathbf{0})+O(|(z,w_0)-(e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2},0,\cdots,0,w_0)|^3).$$

注意到

$$|f(z,w_0)-(z,\mathbf{0})|\leq|F(z,w_0)-(z,\mathbf{0},w_0,\mathbf{0})|,$$

则当 $z \to (e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2}, 0, \cdots, 0)$ 时有

$$f(z, w_0) = (z, \mathbf{0}) + O(|z - (e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2}, 0, \cdots, 0)|^3).$$

对 $f(z, w_0)$ 的范围作如下估计

$$\begin{aligned}|f(z, w_0)|^2 &= |f_1(z, w_0)|^2 + \cdots + |f_N(z, w_0)|^2 \\ &< e^{-\mu(|g_1(z,w_0)|^2 + \cdots + |g_M(z,w_0)|^2)} \\ &\le e^{-\mu(|g_1(z,w_0)|^2 + \cdots + |g_m(z,w_0)|^2)} \\ &= e^{-\mu|w_0|^2}.\end{aligned}$$

则 $f(z, w_0)$ 是如下关于 z 的全纯映照

$$f(z, w_0) : \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2}\} \to \{z \in \mathbb{C}^N : |z| < e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2}\}.$$

由题设条件知, $f(z, w_0)$ 在点 $(e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2}, 0, \cdots, 0, w_0)$ 处是 C^2 的. 接下来考虑 $f(e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2} z, w_0)$, 则其是定义在单位球 B^n 上的全纯映射, 且有当 $e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2} z \to (e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2}, 0, \cdots, 0)$ 时, 成立

$$f(e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2} z, w_0) = (e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2} z, \mathbf{0}) + O(|e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2} z - (e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2}, 0, \cdots, 0)|^3),$$

这也就是当 $z \to (1, 0, \cdots, 0)$ 时成立

$$f(e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2} z, w_0) = e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2}(z, \mathbf{0}) + O(|z - (1, 0, \cdots, 0)|^3). \tag{2.2}$$

构造函数

$$h(z) = e^{\frac{1}{2}\mu|w_0|^2} f(e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2} z, w_0),$$

则 $h : B^n \to B^N$ 是从单位球 B^n 到 B^N 的全纯映照, h 在点 $(1, 0, \cdots, 0)$ 处是 C^2 的. 由于 $f_1(z, w_0) = z_1$, 由 h 的表示式可以看出 $h_1(z) = z_1$. 并且由 (2.2) 式知当 $z \to (1, 0, \cdots, 0)$ 时有

$$h(z) = (z, \mathbf{0}) + O(|z - (1, 0, \cdots, 0)|^3),$$

则由定理 1.4 得 $h(z) \equiv (z, \mathbf{0}), z \in B^n$. 进而得到 $f(z, w_0) = (z, \mathbf{0})$. 由 w_0 的任意性, $f(z, w) = (z, \mathbf{0})$. 故 $F(z, w) = (z, \mathbf{0}, w, g_{m+1}, \cdots, g_M)$. 注意如下不等式

$$|z|^2 < e^{-\mu(|w|^2 + |g_{m+1}|^2 + \cdots + |g_M|^2)} \le e^{-\mu|w|^2}.$$

此时令 $(z, w) \to \partial D_{n,m}$, $(z, w) \in D_{n,m}$, 则 $|z|^2 \to e^{-\mu|w|^2}$. 则由上述不等式知 $|g_{m+1}|^2 + \cdots + |g_M|^2 \to 0$, 因此由全纯函数的最大模原理得 $g_{m+1} = \cdots = g_M = 0$. 故 $F(z, w) \equiv (z, \mathbf{0}, w, \mathbf{0})$. 定理 2.4 证毕.

然后继续顺着上述定理 2.4 的思路, 得到一个类似 Burns-Krantz 定理 (定理 1.1) 推论的一个在 Fock-Bargmann-Hartogs 域上的结果, 其与定理 2.4 条件相比较减少了一个边界点处正则性的条件, 少固定了一个分量, 但其估计次数是 4 次. 此定理结果表述如下.

定理 2.5 设 $F : D_{n,m} \to D_{N,M}, n \le N, m \le M$ 是一个全纯映照, $(e^{-\frac{1}{2}\mu|w|^2}, 0, \cdots, 0, w)$ 是 $D_{n,m}$ 的边界点. 当 $(z, w) \to (e^{-\frac{1}{2}\mu|w|^2}, 0, \cdots, 0, w)$ 时, 有

$$F(z, w) = (z, \mathbf{0}, w, \mathbf{0}) + O(|(z, w) - (e^{-\frac{1}{2}\mu|w|^2}, 0, \cdots, 0, w)|^4),$$

设 $F=(f,g)=(f_1,\cdots,f_N,g_1,\cdots,g_M)$, 其中 $g_i(z,w)=w_i, 1\le i\le m$, 则 $F(z,w)\equiv(z,\mathbf{0},w,\mathbf{0})$.

证 用类似定理 2.4 中证明的方法, 将 w_0 固定, 则可以把 $F(z,w_0)$ 看作是关于 z 的全纯映射. 由于当 $(z,w_0)\to(e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2},0,\cdots,0,w_0)$ 时有

$$F(z,w_0)=(z,\mathbf{0},w_0,\mathbf{0})+O(|(z,w_0)-(e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2},0,\cdots,0,w_0)|^4).$$

注意到

$$|f(z,w_0)-(z,\mathbf{0})|\le|F(z,w_0)-(z,\mathbf{0},w_0,\mathbf{0})|,$$

则当 $z\to(e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2},0,\cdots,0)$ 时有

$$f(z,w_0)=(z,\mathbf{0})+O(|z-(e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2},0,\cdots,0)|^4).$$

对 $f(z,w_0)$ 的范围作如下估计

$$\begin{aligned}|f(z,w_0)|^2&=|f_1(z,w_0)|^2+\cdots+|f_N(z,w_0)|^2\\&<e^{-\mu(|g_1(z,w_0)|^2+\cdots+|g_M(z,w_0)|^2)}\\&\le e^{-\mu(|g_1(z,w_0)|^2+\cdots+|g_m(z,w_0)|^2)}\\&=e^{-\mu|w_0|^2}.\end{aligned}$$

则 $f(z,w_0)$ 是如下关于 z 的全纯映照

$$f(z,w_0):\{z\in\mathbb{C}^n:|z|<e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2}\}\to\{z\in\mathbb{C}^N:|z|<e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2}\}.$$

接下来考虑 $f(e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2}z,w_0)$, 则其是定义在单位球 B^n 上的全纯映射. 并且有当 $e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2}z\to(e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2},0,\cdots,0)$ 时, 成立

$$f(e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2}z,w_0)=(e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2}z,\mathbf{0})+O(|e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2}z-(e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2},0,\cdots,0)|^4),$$

这也就是当 $z\to(1,0,\cdots,0)$ 时成立

$$f(e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2}z,w_0)=e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2}(z,\mathbf{0})+O(|z-(1,0,\cdots,0)|^4).\tag{2.3}$$

构造函数

$$h(z)=e^{\frac{1}{2}\mu|w_0|^2}f(e^{-\frac{1}{2}\mu|w_0|^2}z,w_0).$$

则 $h:B^n\to B^N$ 是从单位球 B^n 到 B^N 的全纯映照, 由 (2.3) 式知当 $z\to(1,0,\cdots,0)$ 时有

$$h(z)=(z,\mathbf{0})+O(|z-(1,0,\cdots,0)|^4),$$

则由定理 2.1 得 $h(z)\equiv(z,\mathbf{0}),z\in B^n$. 进而得到 $f(z,w_0)=(z,\mathbf{0})$. 由 w_0 的任意性, $f(z,w)=(z,\mathbf{0})$. 故 $F(z,w)=(z,\mathbf{0},w,g_{m+1},\cdots,g_M)$. 注意如下不等式

$$|z|^2<e^{-\mu(|w|^2+|g_{m+1}|^2+\cdots+|g_M|^2)}\le e^{-\mu|w|^2}.$$

再令 $(z,w)\to\partial D_{n,m}$, $(z,w)\in D_{n,m}$, 则 $|z|^2\to e^{-\mu|w|^2}$. 则由上述不等式知 $|g_{m+1}|^2+\cdots+|g_M|^2\to0$. 由最大模原理得 $g_{m+1}=\cdots=g_M=0$. 故 $F(z,w)\equiv(z,\mathbf{0},w,\mathbf{0})$. 定理 2.5 证毕.

参 考 文 献

[1] Burns D M, Krantz S G. Rigidity of holomorphic mappings and a new Schwarz lemma at the boundary[J]. J. Amer. Math. Soc., 1994, 7(3): 661–676.

[2] Liu T S, Wang J F, Tang X M. Schwarz lemma at the boundary of the unit ball in $\mathbb{C}^n$ and its applications[J]. J. Geom. Anal., 2015, 25(3): 1890–1914.

[3] Tu Z H, Zhang S. Schwarz lemma at the boundary of the polydisk in $\mathbb{C}^n$[J]. J. Math. Anal. Appl., 2018, 459(1): 182–202.

[4] Huang X J. A boundary rigidity problem for holomorphic mappings on some weakly pseudoconvex domains[J]. Canad. J. Math., 1995, 47(2): 405–420.

[5] Yamamori A. The Bergman kernel of the Fock-Bargmann-Hartogs domain and the polylogarithm function[J]. Complex Var. Elliptic Equ., 2013, 58(6): 783–793.

[6] Bi E C, Feng Z M, Tu Z H. Balanced metrics on the Fock-Bargmann-Hartogs domains[J]. Ann. Global Anal. Geom., 2016, 49(4): 349–359.

[7] Baracco L, Zaitsev D, Zampieri G. A Burns-Krantz type theorem for domains with corners[J]. Math. Ann., 2006, 336(3): 491–504.

[8] Liu Y, Chen Z H, Pan Y F. Boundary Schwarz lemma for nonequidimensional holomorphic mappings and its applications[J]. Pacific J. Math., 2018, 295(2): 463–476.

NONEQUIDIMENSIONAL BOUNDARY UNIQUENESS THEOREMS ON SEVERAL TYPES OF DOMAINS

LIU Hong-yan

(*School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China*)

Abstract: In this paper, we study the problem of boundary uniqueness theorem. With the methods of constructing function and using maximum modules principle, we obtain several results of nonequidimensional boundary uniqueness theorems, which generalize the theorem of Burns-Krantz and some similar boundary uniqueness results by other men of mathematics.

Keywords: Schwarz lemma; boundary uniqueness theorem; Fock-Bargmann-Hartogs domain

2010 MR Subject Classification: 32C80; 32A10; 32A40