Vol. 40 (2020)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

$\mathbb{R}^3$ 上一类特殊 Besicovitch 集的维数估计

陈泽斌
(汕头大学数学系, 广东 汕头 515063)

摘 要: 本文研究了 $\mathbb{R}^3$ 上一类圆盘型 Besicovitch 集的 Hausdorff 维数问题. 将 Kakeya 问题二维情形的其中一种证明方法推广到 $\mathbb{R}^3$ 空间, 获得了该类圆盘型 Besicovitch 集的 Hausdorff 维数为 3 .

关键词: Besicovitch 集; Kakeya 问题; Hausdorff 维数
MR(2010) **主题分类号**: 42B99 **中图分类号**: O174.1
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2020)04-0493-05

1 引言

Kakeya 在 1917 年提出了寻找单位直线段可以在其内部调转方向并且具有最小面积的平面集的问题, 也就是连续地移动此单位直线段而不离开此集使它旋转 180° 并回到原来位置, 这个问题基本上可归结为寻找包含每个方向单位直线段的最小区域的问题. 1928 年, Besicovitch 发现了一个平面上的单位直线段可以在其内部转到相反方向, 但其面积却可以任意小的令人惊奇的集的构造. 即有如下定理.

定理 1.1 有一个面积为零的平面集, 它在所有方向上都包含一单位直线段.

上述定理的证明参考文献 [1]. $\mathbb{R}^n$ 中在每个方向包含有一个直线段的集合称为 Besicovitch 集, 定理 1.1 证明了 $\mathbb{R}^2$ 中存在 Besicovitch 集; 取这种集与 $\mathbb{R}^{n-2}$ 的乘积集, 就得到了 $\mathbb{R}^n$ 上的 Besicovitch 集. 随着这个问题的解决, 一个很自然的问题摆在眼前, 就是如下著名的 Kakeya 猜想.

猜想 $\mathbb{R}^n$ 空间中的任意 Besicovitch 集的 Hausdorff 维数等于 n.

关于 Kakeya 猜想, 国际上已经有很多数学家 (如 Wolff, Bourgain, Tao 等) 做了大量的工作, 其中 $n = 2$ 的情形已完全解决, 并存在好几种证明方法 (见文献 [1–3]). 而对于高维 $(n \geq 3)$ 的情形, 虽然目前还没得到彻底解决, 但是有许多著名的数学家做出了本质的推进. 1985 年, Christ-Duoandikoetxea-Rubio de Francia[4] 首先证明了下界为 $\frac{n+1}{2}$. 1991 年, 著名数学家 Bourgain[3] 利用一个称为“bush”的构造将其改进为 $\frac{n+1}{2} + \varepsilon_n$, 这里 ε_n 是一个固定的数, 只与 n 有关. 而这项工作最突出的结果来自于 Wolff[5] , 1995 年 Wolff 利用另一个称为“hairbrush”的更有效的构造再次将这个下界提高至 $\frac{n+2}{2}$, 其中对于 $3 \leq n \leq 8$. 这仍然是目前最好的结果. 而对于 $n \geq 9$, 之后 Katz–Tao[6] 于 2000 年将其提高至 $\frac{4n+3}{7}$.

由上述可知在高维空间 Kakeya 猜想虽然已得到丰富的结果, 但是可以看到, 即使是 $n = 3$ 的情形, 最好的结果也仅是 2.5, 距离最终结果 3 还差了很多. 针对 $n = 3$, 利用已有的构造和方法要想进一步提高这个下界是相当困难的. 那么一个比较自然的想法是, 若仅对一类特殊的 Besicovitch 集进行维数估计, 能否推出这类 Besicovitch 集的 Hausdorff 维数等于 3

*收稿日期: 2018-11-02 接收日期:2019-08-03
作者简介: 陈泽斌 (1993–), 男, 广东揭阳, 硕士, 主要研究方向: 调和分析.

呢? 本文以此作为出发点. 将 Kakeya 问题二维情形的一种证明方法 (参考文献 [2]) 推广到 R^3 空间, 接下来将定义一类圆盘型 Besicovitch 集, 具体如下.

定义 1.1 令 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的圆盘型 Besicovitch 集, E 包含以所有 $\xi \in S^{n-2}$ $(n \geq 3)$ 为法向量, 点 a 为圆心的各个方向的单位圆盘, 即 $E = \{x \in R^n : |(x-a)| \leq 1, (x-a)\cdot\xi = 0\}$. 为方便起见, 将这类型的 Besicovitch 集简记为 E 集. 下面是与之相关的 δ - 圆盘概念:

定义 1.2 令 $0 < \delta \ll 1$, 对 E 中任一方向的圆盘, 给其增加 δ 厚度, 使其成为一个 δ - 圆盘, 记为 $D_\xi^\delta(a)$, 即 $D_\xi^\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |(x-a)\cdot\xi| \leq \delta, |(x-a)^\perp| \leq 1\}$, 这里 $x^\perp = x - (x\cdot\xi)\cdot\xi$.

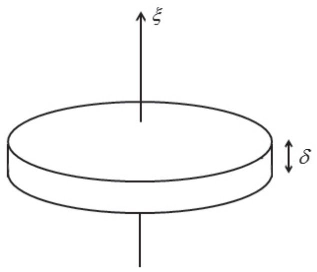

图 1: δ - 圆盘

2 主要结论

回顾了 Kakeya 猜想的研究背景和研究现状, 针对上面定义的圆盘型 Besicovitch 集, 本文的主要结论如下.

定理 2.1 $\mathbb{R}^3$ 上的 E 集的 Hausdorff 维数为 3.

3 预备知识

在这一节, 将介绍 Hausdorff 维数和 δ - 分隔子集的概念, 并做一些符号的约定.

定义 3.1 令 $E \in \mathbb{R}^n, \alpha > 0$, 对 $0 < \delta \leq 1$, 定义 $H_\alpha^\delta(E) = \inf\limits_{\kappa_\delta}(\sum\limits_{i=1}^{\infty} r_i^\alpha)$, 这里 κ_δ 是 E 的可数覆盖, 由半径 $r_i < \delta$ 的小球 $B(x_i, r_i)$ 构成的集合, 即

$$\kappa_\delta = \{K \supset E \mid K = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i), r_i < \delta\}.$$

令 $\delta \to 0$, 得到 E 的 α-Hausdorff 测度 $H_\alpha(E) = \lim\limits_{\delta\to 0} H_\alpha^\delta(E)$.

对任意 $E \in \mathbb{R}^n$, $H_\alpha^\delta(E)$ 为 α 的非增函数. 一步, 若 $\alpha < \beta$, 则 $H_\alpha^\delta(E) \geq \delta^{-(\beta-\alpha)} H_\beta^\delta(E)$, 从而若 $H_\beta(E) > 0$, 则 $H_\alpha(E) > 0$ 为无穷. 因而存在唯一的数, 记为 $\dim_H E$, 称为 E 的 Hausdorff 维数, 满足若 $0 \leq \alpha < \dim_H E$, 则 $H_\alpha(E) = \infty$; 若 $\dim_H E \leq \alpha < \infty$, 则 $H_\alpha(E) = 0$.

定义 3.2 令 $E \in \mathbb{R}^n, S \subset E$, 若任意不同的两点 $x, y \in S$ 满足 $|x-y| \geq \delta$, 那么称 S 为 E 的 δ - 分隔子集.

为了方便叙述, 做如下约定

(1) $\sharp A$ 表示集合 A 中元素的个数;

(2) 对于 f 和 g 两个函数, $f \lesssim g$ 表示存在常数 C, 独立于 f 和 g, 使得 $f \leq Cg$.

4 定理 2.1 的证明

在这一节, 将 Córdoba[2] 的方法推广到 $\mathbb{R}^3$ 上, 给出定理 2.1 的证明. 下面将通过如下的两个定理给出证明.

定理 4.1 令 $\Omega \subseteq S^1, \xi \in \Omega$, D_ξ^δ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的 δ - 圆盘, 并且法向量 ξ 是 δ - 分隔的, 假设

$$\|\sum_{\xi\in\Omega}\chi_{D_\xi^\delta}\|_2 \lesssim \delta^{-\varepsilon}(\sum_{\xi\in\Omega}|D_\xi^\delta|)^{\frac{1}{2}}$$

成立, 那么 $\mathbb{R}^3$ 上的 E 集的 Hausdorff 维数为 3.

证 需要证 $\forall\varepsilon_0 > 0$, $H_{3-\varepsilon_0}(E) = +\infty$.

下面将用反证法证明. 假设 $\exists\varepsilon_0 > 0$, 使得 $H_{3-\varepsilon_0}(E) < +\infty$.

$\Leftrightarrow \exists\varepsilon_0 > 0$, 使得 $H_{3-\varepsilon_0}(E) \leq M$.

$\Leftrightarrow \exists\varepsilon_0 > 0$, 使得 $\forall N > 0$, 当 $j \geq N$ 时, $\Lambda = \{B\}$, 有 $\sum\limits_{B\in\Lambda} r(B)^{3-\varepsilon_0} \leq M+1$, 其中 $\{B\}$ 是 E 的一个球覆盖且 $r(B) \leq 2^{-j}$.

设 F 为 $\mathbb{R}^3$ 中的任意可测集, d_ξ 为方向向量 ξ 所对应的 E 中的单位圆盘. 令 $H^{'}(d_\xi)(F) = \mathrm{length}(d_\xi \bigcap F)$, 定义

$$\mu(F) = \int_{S^1} H^{'}(d_\xi)(F)d\sigma(\xi).$$

由上述定义可得 $\mu(E) \geq 1$, 固定 $M, N, j (j\geq 2), \varepsilon_0$, 则有

$$\sum_{B\in\Lambda}\mu(B) \geq \mu(\bigcup_{B\in\Lambda} B) \geq \mu(E) \geq 1.$$

故 $\exists k \geq j$, 使得 $\sum\limits_{B\in\Lambda:r(B)=2^{-k}} \mu(B) \geq \frac{1}{k^2}$. 因为 $\sum\limits_{k>j} k^{-2} < 1$.

令 $\delta = 2^{-k}$, $\Lambda_k = \{B|B\in\Lambda : r(B) = 2^{-k}\}$, $\forall\xi\in S^1$, $B\in\Lambda_k$, 注意到

$$H^{'}(d_\xi)(B) \lesssim \delta^{-1}\int_B \chi_{D_\xi^\delta}(x)dx,$$

则有

$$\mu(B) = \int_{S^1} H^{'}(d_\xi)(B)d\sigma(\xi) \lesssim \delta^{-1}\int_{S^1}\int_B \chi_{D_\xi^\delta}(x)dxd\sigma(\xi),$$

故有

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^2} \leq \sum_{B\in\Lambda_k}\mu(B) &\lesssim \delta^{-1}\int_{S^1}\int_B \chi_{D_\xi^\delta}(x)dxd\sigma(\xi) = \delta^{-1}\sum_{B\in\Lambda_k}\int_{\bigcup_{B\in\Lambda_k}B}\int_{S^1}\chi_{D_\xi^\delta}(x)d\sigma(\xi)dx\\ &\lesssim \delta^{-1}\int_{\bigcup_{B\in\Lambda_k}B}\int_{S^1}\chi_{D_\xi^\delta}(x)d\sigma(\xi)dx = \delta^{-1}\int_{S^1}\int_{\bigcup_{B\in\Lambda_k}B}\chi_{D_\xi^\delta}(x)dxd\sigma(\xi).\end{aligned}$$

可以找到互不相交的集合 $S_1,S_2,\cdots,S_L\in S^1$, 且 $L\lesssim\delta^{-1}$, 使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{L}S_i=S^1$, 则有

$$\frac{1}{k^2}\lesssim\delta^{-1}\sum_{i=1}^{L}\int_{S_i}\int_{\bigcup_{B\in\Lambda_k}B}\chi_{D_\xi^\delta}(x)dxd\sigma(\xi).$$

又 $\exists\xi_1\in S_1,\xi_2\in S_2,\cdots,\xi_L\in S_L$, 使得

$$\int_{\bigcup_{B\in\Lambda_k}B}\chi_{D_\xi^\delta}(x)dx\geq\frac{1}{|S_i|}\int_{S_i}\int_{\bigcup_{B\in\Lambda_k}B}\chi_{D_\xi^\delta}(x)dxd\sigma(\xi).$$

记 $\Omega=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_L\}$, 则 Ω 是 δ - 分隔的, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^2}&\lesssim\delta^{-1}\sum_{i=1}^{L}|S_i|\cdot\int_{\bigcup_{B\in\Lambda_k}B}\chi_{D_\xi^\delta}(x)dx\lesssim\int_{\bigcup_{B\in\Lambda_k}B}\sum_{\xi\in\Omega}\chi_{D_\xi^\delta}(x)dx\\&\lesssim\|\sum_{\xi\in\Omega}\chi_{D_\xi^\delta}(x)\|_2\cdot(\int_{\bigcup_{B\in\Lambda_k}B}1dx)^{\frac{1}{2}}\lesssim\delta^{-\varepsilon}(\sum_{\xi\in\Omega}|D_\xi^\delta|)^{\frac{1}{2}}\cdot|\bigcup_{B\in\Lambda_k}B|^{\frac{1}{2}}\\&\lesssim\delta^{-\varepsilon}|\bigcup_{B\in\Lambda_k}B|^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

故 $|\bigcup\limits_{B\in\Lambda_k}B|\gtrsim\frac{1}{k^4}\cdot\delta^{2\varepsilon}$, $\sharp\Lambda_k\geq\frac{|\bigcup_{B\in\Lambda_k}B|}{|B|}\gtrsim2^{k\cdot3}\cdot\frac{1}{k^4}\cdot\delta^{2\varepsilon}$. 因此

$$\sum_{B\in\Lambda_k}r(B)^{3-\varepsilon_0}\geq2^{-k(3-\varepsilon_0)}\cdot\sharp\Lambda_k\geq2^{-k(3-\varepsilon_0)}\cdot2^{k\cdot3}\cdot\frac{1}{k^4}\cdot\delta^{2\varepsilon}=\frac{2^{k[\varepsilon_0-2\varepsilon]}}{k^4}.$$

令 $k\to\infty$, 则不等式右边趋于 ∞, 与前面假设矛盾, 证毕.

定理 4.2 令 $\Omega\subseteq S^1$, $\xi\in\Omega$, D_ξ^δ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的 δ - 圆盘, 并且法向量 ξ 是 δ - 分隔的, 有不等式

$$\|\sum_{\xi\in\Omega}\chi_{D_\xi^\delta}\|_2\lesssim(\log\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{2}}(\sum_{\xi\in\Omega}|D_\xi^\delta|)^{\frac{1}{2}}.$$

证 对上式左边进行平方, 得

$$\|\sum_{\xi\in\Omega}\chi_{D_\xi^\delta}\|_2^2=\int|\sum_{\xi\in\Omega}\chi_{D_\xi^\delta}(x)|^2dx=\int\sum_{\xi\in\Omega}\sum_{\xi'\in\Omega}\chi_{D_\xi^\delta}(x)\chi_{D_{\xi'}^\delta}(x)dx=\sum_{\xi\in\Omega}\sum_{\xi'\in\Omega}|D_\xi^\delta\bigcap D_{\xi'}^\delta|.$$

固定 $\xi\in\Omega$, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{\xi'\in\Omega}|D_\xi^\delta\bigcap D_{\xi'}^\delta|&=|D_\xi^\delta|+\sum_{k=0}^{\log\frac{1}{\delta}}\sum_{\xi'\in\Omega,\angle(\xi,\xi')\sim2^{-k}}|D_\xi^\delta\bigcap D_{\xi'}^\delta|\\&\lesssim|D_\xi^\delta|+\sum_{0\leq k\leq log\frac{1}{\delta}}\sum_{\xi'\in\Omega,\angle(\xi,\xi')\sim2^{-k}}2^k\delta|D_\xi^\delta|\\&\lesssim|D_\xi^\delta|+\sum_{0\leq k\leq log\frac{1}{\delta}}\frac{2^{-k}}{\delta}\cdot2^k\delta\cdot|D_\xi^\delta|\\&\lesssim(\log\frac{1}{\delta})|D_\xi^\delta|.\end{aligned}$$

所以
$$\|\sum_{\xi\in\Omega}\chi_{D_\xi^\delta}\|_2^2 \lesssim \sum_{\xi\in\Omega}\log\frac{1}{\delta}|D_\xi^\delta|,$$
故
$$\|\sum_{\xi\in\Omega}\chi_{D_\xi^\delta}\|_2 \lesssim (\log\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{2}}(\sum_{\xi\in\Omega}|D_\xi^\delta|)^{\frac{1}{2}}.$$
结合定理 4.1 和定理 4.2, 即得定理 2.1.

5 结论

本文在 $\mathbb{R}^3$ 空间定义了一类圆盘型 Besicovitch 集并对其进行维数估计, 证明了该圆盘型 Besicovitc 集的 Hausdorff 维数为 3. 因为 Kakeya 二维情形已有的证明方法无法推广到高维空间上, 所以接下来将会致力于寻找高维情形新的证明方法.

参 考 文 献

[1] Falconer K J. Fractal Geometry-mathematical foundations and applications (2rd ed.)[M]. New Jersey: John Wiley and Sons Inc., 1990.

[2] Córdoba A. The Kakeya maximal function and the spherical summation multipliers [J]. American Journal of Mathematics, 1977, 99(1): 1–22.

[3] Bourgain J. Besicovitch type maximal operators and applications to Fourier analysis [J]. Geometric and Functional Analysis , 1991, 1(2): 147–187.

[4] Christ M, Duoandikoetxea J, Rubio de Francia J L. Maximal operators associated to the Radon transform and the Calderon-Zygmund method of rotations[J]. Duke Math. J., 1986, 53(1): 189–209.

[5] Wolff T. An improved bound for Kakeya type maximal functions[J]. Revista Mat. Iberoamericana, 1995, 11(3): 651–674.

[6] Katz N H, Tao T. New bounds for Kakeya problems[J]. J. Anal. Math., 2002, 87(1): 231–263.

ESTIMATES OF DIMENSION FOR A TYPE OF SPECIAL BESICOVITCH SETS IN $\mathbb{R}^3$

CHEN Ze-bin

(*School of Mathematics, Shantou University, Shantou 515063, China*)

Abstract: This dissertation is devoted to the Hausdorff dimension for a type of disc Besicovitch sets. It is well know that the situation of $\mathbb{R}^2$ about Kakeya problem has been solved by now, and there exist several methods which can prove it, which aim to generalize one of those methods to $\mathbb{R}^3$ space. Then we prove that there are a type of disc Besicovitch sets in $\mathbb{R}^3$ whose Hausdorff dimension is 3.

Keywords: Besicovitch sets; Kakeya problem; Hausdorff dimension

2010 MR Subject Classification: 42B99