Vol. 40 (2020)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

完整 Coriolis 力与弱地形作用下的非齐次 mKdV-Burgers 方程

周兰锁 [1], 栾金凤 [2], 尹晓军 [1], 那仁满都拉 [1]
(1. 内蒙古农业大学理学院, 内蒙古 呼和浩特 010018)
(2. 内蒙古体育职业学院, 内蒙古 呼和浩特 010051)

摘 要: 本文研究了中高纬度含有完整 Coriolis 力的准地转位涡方程问题. 利用时空伸缩变换方法, 获得了描述 Rossby 波的振幅形态满足非齐次 mKdV-Burgers 方程的结论. 方程的近似解表明, 弱地形效应对 Rossby 波的振幅产生强迫作用, 并推广了文献 [12] 中的结果.

关键词: Rossby 波; 准地转位涡方程; 非齐次 mKdV-Burgers 方程
MR(2010) **主题分类号**: 76B65; 86A10 **中图分类号**: O351; P433
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2020)04-0473-08

1 引言

地球旋转对地球流体中波的产生有及其重要的作用, 其中在大气海洋领域中它的作用也是显而易见. Rossby 波同样与地球旋转是密不可分. 国内外学者从不同角度出发对 Rossby 波的特性进行研究 [1−5]. 大气千变万化, 大气运动可以被一系列基本原始方程所描述, 如有连续方程、运动方程、能量方程. 自从 Long 开创性用 KdV 方程来描述较为理想状态正压流体中的 Rossby 波的振幅演变规律后 [6]. 许多学者分析诱导与加强大气运动中 Rossby 波会受到 beta 效应、地形强迫、耗散和外源、基本流的切变效应、地形缓变效应以及行星波与天气波的相互作用等因素的影响 [7−9]. 其中在分析 Rossby 波振幅特性的过程中, 通常从准地砖位涡方程出发来进行研究. Dellar 等 [10] 利用变分原理推导含有完整 Coriolis 力作用的准地转位涡方程. 在 2010 年, 他们 [11] 扩展了这项工作, 并导出了具有完整 Coriolis 力的方程来描述无粘、不可压缩流体的多层流体背景下的 Roosby 波的流动. 尹晓军从含有完整 Coriolis 力的准地转位涡方程出发 [12], 推导出了 mKdV-Burgers 方程, 进一步阐述了 Rossby 波的振幅演变规律会受到地球旋转水平分量、beta 效应以及强耗散三个因素的影响. 杨红卫从基本方程出发, 推到出分数阶 BDO 方程去描述 Rossby 波的振幅演变规律 [13]. 关于完整 Coriolis 力相关报道, 见文献 [14 – 16]. 但是我们发现上述文献都没有讨论中高纬度 Rossby 波的波动形态, 实际上极端的天气现象 (气旋、反气旋、寒潮等) 主要发生在中高纬度地区, 极大的影响了人们的生活. 另一方面, 由于描述波的波动形态是一系列微分方程, 因此寻找微分方程的解析解或者孤立波解近年来得到了迅速发展. 如吕兴等应用双线性变换求解了 (3+1) 维非线

*收稿日期: 2019-12-31 接收日期: 2020-04-28
基金项目: 国家自然科学基金 (11762011); 内蒙古自治区高等学校科学研究项目 (NJZY19045); 内蒙古自治区自然科学基金项目 (2018MS01006); 内蒙古农业大学基础学科科研启动基金 (JC2016001, JC2018003); 内蒙古农业大学教学教改研究项目 (JGYB201956).
作者简介: 周兰锁 (1977–), 男, 内蒙古呼和浩特, 讲师, 研究方向: 常微分方程及动力系统.

性演变方程以及 Boussinesq 方程的各种精确解以及多孤立子解 [17−18]. 再比如 Jacobi 椭圆函数展开法 [19], 同伦摄动法 [20], Bäcklund 变换法 [21] 等.

本文主要对受到完整科里奥利力、地形效应、耗散和外源强迫共同作用的准地转位涡方程进行研究. 首先对准地转位涡方程所表示的大尺度问题作了无量纲变换; 然后把流函数分为基本流函数和扰动流函数两部分, 在色散和非线性之间平衡的条件下, 通过作时空伸缩变换和摄动展开法推导出弱地形作用下的非齐次 mKdV-Burgers 方程, 阐述科里奥利力对方程齐次项系数产生影响, 所得的弱地形效应影响到方程中强迫项; 最后对得到的非齐次 mKdV-Burgers 方程应用简化的微分变化法和 Maple 数学软件进行了近似求解, 并且对一种特定 Rossby 波的振幅进行图形模拟后发现, Rossby 波的振幅随时间在逐渐增大, Rossby 波的波峰与波谷出现的经度位置随时间没有明显改变.

2 非齐次 mKdV-Burgers 方程的推导过程

考虑含有完整科氏力以及带有耗散和外源的准地转位涡方程:

$$(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y})[\nabla^2\phi+\beta(y)y+\frac{f_0}{H}B(x,y)-f_H\frac{\partial B}{\partial y}]=-\mu_0\nabla^2\phi+Q, \tag{2.1}$$

其中 $\phi(x,y,t)$ 表示总的流函数, x、y、t 分别表示经度和纬度变量以及时间变量, $\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$, $f=f_0+\beta(y)y$ 和 f_H 分别表示科里奥利力的垂直分量和水平分量, 且 f_0 和 f_H 为常数, H 表示垂直尺度, $B(x,y)$ 表示底地形函数, $\mu_0\nabla^2\phi$ 表示耗散, μ_0 表示耗散强度, Q 表示外源. 侧边界条件满足的刚壁条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=0, y=y_1, y=y_2. \tag{2.2}$$

方程 (2.2) 中 $y=y_1$, $y=y_2$ 分别表示地球南北方向的边界.

首先通过无量纲化方程 (2.1) 和 (2.2) 变为

$$(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y})[\nabla^2\phi+\beta(y)y+B(x,y)-\lambda\delta\frac{\partial B}{\partial y}]=-\mu\nabla^2\phi+Q, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=0, y=0, y=1. \tag{2.4}$$

引入两个无量纲参数 $\delta=\frac{H}{L_0}$, δ 表示形态比. $\lambda=\frac{f_H}{f_0}$. 其中 L_0 表示水平尺度. 假设总的流函数 $\phi(x,y,t)$ 是由基本流函数和扰动流函数两部分构成, 即

$$\phi(x,y,t)=-\int_0^y[u(s)-c_0]ds+\varepsilon\phi'(x,y,t), \tag{2.5}$$

把 (2.5) 式代入到方程 (2.3) 中得

$$\begin{aligned}&\varepsilon[\frac{\partial}{\partial t}+(U-c_0)\frac{\partial}{\partial x}]\nabla^2\phi'+\varepsilon p(y)\frac{\partial \phi'}{\partial x}+\varepsilon J[\phi',B]+\varepsilon^2 J[\phi',\nabla^2\phi']-\lambda\delta\varepsilon J[\phi',\frac{\partial B}{\partial y}]\\&-\lambda\delta(U-c_0)\frac{\partial^2 B}{\partial y\partial x}+(U-c_0)\frac{\partial B}{\partial x}=-\mu\varepsilon\nabla^2\phi'+\mu U'+Q,\end{aligned} \tag{2.6}$$

其中 $p(y)=[\beta(y)y]'-U''$, $J[E,F]=\frac{\partial E}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial E}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}$. 为了色散和非线性之间达到平衡, 令

$$\mu=\varepsilon^3\hat{\mu},Q=-\mu U', \tag{2.7}$$

把变换 (2.7) 式代入到 (2.6) 式得

$$\begin{aligned}&\varepsilon[\frac{\partial}{\partial t}+(U-c_0)\frac{\partial}{\partial x}]\nabla^2\phi'+\varepsilon p(y)\frac{\partial\phi'}{\partial x}+\varepsilon J[\phi',B]+\varepsilon^2J[\phi',\nabla^2\phi']-\lambda\delta\varepsilon J[\phi',\frac{\partial B}{\partial y}]\\&-\lambda\delta(U-c_0)\frac{\partial^2B}{\partial y\partial x}+(U-c_0)\frac{\partial B}{\partial x}=-\hat{\mu}\varepsilon^4\nabla^2\phi',\end{aligned} \tag{2.8}$$

为了讨论非线性长波, 可作时空伸缩变换, 即 Gardner-Morikawa 变换

$$X=\varepsilon x,T=\varepsilon^3t, \tag{2.9}$$

其中 X,T 分别为经度和时间的缓变量, 同时由变换 (2.9) 得

$$\frac{\partial}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial}{\partial X},\frac{\partial}{\partial t}=\varepsilon^3\frac{\partial}{\partial T}. \tag{2.10}$$

把变换 (2.9) 和 (2.10) 代入到方程 (2.8) 中得

$$\begin{aligned}&\varepsilon^4\frac{\partial G}{\partial T}+\varepsilon^3J[\phi',G]+\varepsilon^2\{(U-c_0)\frac{\partial G}{\partial X}+\frac{\partial\phi'}{\partial X}p(y)+J[\phi',B]+\lambda\delta J[\frac{\partial B}{\partial y},\phi']\}\\&+\varepsilon(U-c_0)(\frac{\partial B}{\partial X}-\lambda\delta\frac{\partial^2B}{\partial y\partial X})=-\hat{\mu}\varepsilon^4G,\end{aligned} \tag{2.11}$$

其中 $G=(\varepsilon^2\frac{\partial^2\phi'}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\phi'}{\partial y^2})$, $J[E,F]=\frac{\partial E}{\partial X}\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial E}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial X}$. 假设底地形函数

$$B(x,y)=\varepsilon^ih(X,y), \tag{2.12}$$

把 (2.12) 式代入 (2.11) 式中得

$$\begin{aligned}&\varepsilon^2\frac{\partial G}{\partial T}+\varepsilon J[\phi',G]+(U-c_0)\frac{\partial G}{\partial X}+\frac{\partial\phi'}{\partial X}p(y)+\varepsilon^iJ[\phi',h]+\lambda\delta\varepsilon^iJ[\frac{\partial h}{\partial y},\phi']\\&+\varepsilon^{i-1}(U-c_0)(\frac{\partial h}{\partial X}-\lambda\delta\frac{\partial^2h}{\partial y\partial X})=-\hat{\mu}\varepsilon^2G,\end{aligned} \tag{2.13}$$

通过后续 (2.17), (2.21), (2.24) 式分析得

$$i=3. \tag{2.14}$$

从而底地形函数 $B(x,y)=\varepsilon^3h(X,y)$, 因为科氏参数 $\varepsilon\ll1$, 所以底地形函数 $B(x,y)$ 表示相对非常小的量, 即为弱地形作用. 进一步方程 (2.13) 可变为

$$\begin{aligned}&\varepsilon^2\frac{\partial G}{\partial T}+\varepsilon J[\phi',G]+(U-c_0)\frac{\partial G}{\partial X}+\frac{\partial\phi'}{\partial X}p(y)+\varepsilon^3J[\phi',h]+\lambda\delta\varepsilon^3J[\frac{\partial h}{\partial y},\phi']\\&+\varepsilon^2(U-c_0)(\frac{\partial h}{\partial X}-\lambda\delta\frac{\partial^2h}{\partial y\partial X})=-\hat{\mu}\varepsilon^2G.\end{aligned} \tag{2.15}$$

下面采用摄动展开法. 首先设扰动流函数有如下的小参数展开式

$$\phi' = \phi_0(X,y,T) + \varepsilon\phi_1(X,y,T) + \varepsilon^2\phi_2(X,y,T) + \cdots. \tag{2.16}$$

把方程 (2.16) 代入到方程 (2.15) 中, 通过比较 ε^0 的系数得

$$o(\varepsilon^0) : (U - c_0)\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial\phi_0}{\partial X}p(y) = 0. \tag{2.17}$$

假设 ϕ_0 具有下列形式的分离变量解

$$\phi_0 = A(X,T)\Phi_0(y), \tag{2.18}$$

其中 $A(X,T)$ 表示 Rossby 波的振幅, 把方程 (2.18) 代入方程 (2.17) 中得 Φ_0 满足

$$\Phi_0'' + \frac{p(y)}{U - c_0}\Phi_0 = 0, \tag{2.19}$$

$$\Phi_0(0) = \Phi_0(1) = 0. \tag{2.20}$$

由于函数 $p(y)$ 的未知性, 所以从本征值问题 (2.19) 和 (2.20) 来确定本征函数 Φ_0 和本征值 c_0 的精确解是比较困难. 为了确定 Rossby 波振幅 $A(X,T)$ 的数学演化模型, 继续比较 ε 的系数得

$$o(\varepsilon) : (U - c_0)\frac{\partial^3\phi_1}{\partial y^2\partial X} + p(y)\frac{\partial\phi_1}{\partial X} = -\frac{\partial\phi_0}{\partial X}\frac{\partial^3\phi_0}{\partial y^3} + \frac{\partial\phi_0}{\partial y}\frac{\partial^3\phi_0}{\partial y^2\partial X}. \tag{2.21}$$

假设 ϕ_1 具有下列形式的分离变量解

$$\phi_1 = \tilde{A}(X,T)\Phi_1(y). \tag{2.22}$$

把 (2.22) 式代入 (2.21) 式, 通过分析可以得到 $\tilde{A} = \frac{1}{2}A^2$, 得 Φ_1 满足

$$\Phi_1'' + \frac{p(y)}{U - c_0}\Phi_1 = \frac{1}{U - c_0}[\frac{p(y)}{U - c_0}]'\Phi_0^2. \tag{2.23}$$

通过分析, 还不能从方程 (2.23) 中确定 Rossby 波振幅的演化规律所满足的数学模型, 需要提高精度, 继续比较 ε^2 的系数得

$$o(\varepsilon^2) : (U - c_0)\frac{\partial^3\phi_2}{\partial y^2\partial X} + p(y)\frac{\partial\phi_2}{\partial X} = -F, \tag{2.24}$$

其中

$$\begin{aligned} F =& \frac{\partial^3\phi_0}{\partial y^2\partial T} + (U - c_0)\frac{\partial^3\phi_0}{\partial X^3} + J[\phi_1, \frac{\partial^2\phi_0}{\partial y^2}] + J[\phi_0, \frac{\partial^2\phi_1}{\partial y^2}] \\ &+ (U - c_0)(\frac{\partial h}{\partial X} - \lambda\delta\frac{\partial^2 h}{\partial y\partial X}) + \hat{\mu}\frac{\partial^2\phi_0}{\partial y^2}, \end{aligned} \tag{2.25}$$

把 (2.18) 和 (2.22) 式代入 (2.25) 式中, 并利用 (2.19) 和 (2.23) 式得

$$\begin{aligned} F =& [-\frac{p(y)}{U-c_0}\frac{\partial A}{\partial T}+(U-c_0)\frac{\partial^3 A}{\partial X^3}]\Phi_0+(U-c_0)(\frac{\partial h}{\partial X}-\lambda\delta\frac{\partial^2 h}{\partial h\partial X})+\hat{\mu}A\Phi_0'' \\ &+(\Phi_0'''\Phi_1+\frac{1}{2}\Phi_0\Phi_1'''-\frac{1}{2}\Phi_0''\Phi_1'-\Phi_0'\Phi_1'')A^2\frac{\partial A}{\partial X}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

利用本征函数的正交性和消奇异条件

$$\int_0^1 \Phi_0\frac{F}{U-c_0}dy=0, \tag{2.27}$$

可以得到 Rossby 波的振幅满足下列非齐次 mKdV-Burgers 方程

$$\frac{\partial A}{\partial T}+\alpha A^2\frac{\partial A}{\partial X}+\beta\frac{\partial^3 A}{\partial X^3}+\gamma A=\frac{dH_1}{dX}+\lambda\delta\frac{dH_2}{dX}, \tag{2.28}$$

其中系数如下

$$\begin{cases} I=\displaystyle\int_0^1\frac{p(y)}{(U-c_0)^2}\Phi_0^2dy, \\ \alpha=-\displaystyle\frac{1}{2I}\int_0^1\frac{1}{U-c_0}\{[\frac{1}{U-c_0}(\frac{p(y)}{U-c_0})_y]_y\Phi_0^4-3(\frac{p(y)}{U-c_0})_y\Phi_0^2\Phi_1\}dy, \\ \beta=-\displaystyle\frac{1}{I}\int_0^1\Phi_0^2dy, \\ \gamma=\displaystyle\frac{\hat{\mu}}{I}\int_0^1\frac{\Phi_0^2p(y)}{(U-c_0)^2}dy, H_1=\frac{1}{I}\int_0^1 h\Phi_0dy, H_2=-\frac{1}{I}\int_0^1\Phi_0\frac{\partial h}{\partial y}dy. \end{cases} \tag{2.29}$$

从方程组 (2.28) 和 (2.29) 中的 $\frac{dH_1}{dX}$ 和 $\lambda\delta\frac{dH_2}{dX}$ 可以看出底地形效应对方程起到了强迫作用, 其中 γA 表示耗散的作用, 与标准 Burgers 方程中的 $\frac{\partial^2 A}{\partial X^2}$ 具有相同的物理意义, 体现科里奥利力的水平分量参数 λ 加强了地形的强迫作用. 因此方程 (2.28) 表明 Rossby 波的振幅满足带有地形强迫的非齐次 mKdV-Burgers 方程, 其中系数依赖于基本剪切流以及 β 效应.

3 求解非齐次 mKdV-Burgers 方程

下面采用简化的微分变化法求解方程 (2.28). 假设方程 (2.28) 具有如下形式的解

$$A(X,T)=\sum_{j=0}^{\infty}A_j(X)T^j. \tag{3.1}$$

为书写简便, 同时方程 (2.28) 的非齐次项记为 $g(X)$, 即

$$g(X)\triangleq\frac{dH_1}{dX}+\lambda\delta\frac{dH_2}{dX}. \tag{3.2}$$

把 (3.1) 和 (3.2) 式代入到 (2.28) 式得

$$\sum_{j=1}^{\infty}jA_jT^{j-1}+\alpha(\sum_{j=0}^{\infty}A_jT^j)^2\sum_{j=0}^{\infty}A_j'T^j+\beta\sum_{j=0}^{\infty}A_j'''T^j+\gamma\sum_{j=0}^{\infty}A_jT^j=g. \tag{3.3}$$

分别比较 (3.3) 式中 $T^0, T^1, \cdots, T^{j-1}, \cdots$ 前的系数得 $T^0: A_1+\alpha A_0^2A_0'+\beta A_0'''+\gamma A_0=g$, 由此可得

$$A_1=g-\alpha A_0^2A_0'-\beta A_0'''-\gamma A_0; \tag{3.4}$$

$T^1: 2A_2+\alpha A_0(A_0A_1'+2A_1A_0')+\beta A_1'''+\gamma A_1=0$, 由此可得

$$A_2=-\frac{\alpha A_0(A_0A_1'+2A_1A_0')+\beta A_1'''+\gamma A_1}{2}; \tag{3.5}$$

$T^{j-1}: jA_j+\alpha(\sum\limits_{k=0}^{l}A_kA_{l-k})A_{j-l-1}'+\beta A_{j-1}'''+\gamma A_{j-1}=0 (j\geq 2)$, 由此可得

$$A_j=\frac{-\alpha(\sum\limits_{k=0}^{l}A_kA_{l-k})A_{j-l-1}'-\beta A_{j-1}'''-\gamma A_{j-1}}{j}. \tag{3.6}$$

把 (3.4)、(3.5) 和 (3.6) 式代入 (3.1) 式中, 可得方程 (2.28) 的解

$$\begin{aligned} A(X,T)=&A_0+(g-\alpha A_0^2A_0'-\beta A_0'''-\gamma A_0)T\\ &+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{-\alpha(\sum\limits_{k=0}^{l}A_kA_{l-k})A_{j-l-1}'-\beta A_{j-1}'''-\gamma A_{j-1}}{j}T^j. \end{aligned} \tag{3.7}$$

由 (3.4)、(3.5)、(3.6) 和 (3.7) 式得, 当系数 α、β、γ、A_0 和 $g(X)$ 确定后, 方程 (2.28) 的解也就确定了, 即确定了 Rossby 波振幅的演化规律. 由 (3.1) 和 (3.7) 式得 $A(X,T)$ 的近似解 [7] 为

$$A=A_0(X)+A_1(X)T+A_2(X)T^2. \tag{3.8}$$

假设初始项 $A_0(X)=m\sec hX$ 和非齐次项 $g(X)=\sin nX$, 由递推关系 (3.4) 式和 (3.5) 式应用 Maple 数学软件得

$$A_1(X)=\sin nX+m\sec hX[\alpha m^2\sec h^2X\tan hX-\beta\tan hX(5-6\tan h^2X)-\gamma], \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} A_2(X)=&\alpha^2m^5\sec h^5X(3\tan h^2X-0.5)\\ &+\alpha m^3\sec h^3X(78\beta\tan h^4X-71\beta\tan h^2X-2\gamma\tan hX+8\beta)\\ &+\alpha m^2\sec h^2X(\tan hX\sin nX-0.5n\cos nX)\\ &+\beta m\sec hX\tan hX(360\beta\tan h^5X-660\beta\tan h^3X-6\gamma\tan h^2X+331\beta\tan hX+5\gamma)\\ &+0.5\beta n^3\cos nX-30.5\beta^2m\sec hX+0.5\gamma^2m\sec hX-0.5\gamma\sin nX. \end{aligned} \tag{3.10}$$

把 (3.9) 和 (3.10) 式代入 (3.8) 式中, 方程 (2.28) 的近似解就即可确定. 从 (3.4)、(3.5) 式和 (3.6) 式体现出弱地形效应会对方程解的系数 $A_j(X), j\in N$ 均会产生影响. 进一步得出, 在正压模式下底地形效应对 Rossby 波的振幅起主要作用.

依据初始项 $A_0(X)=m\sec hX$ 和非齐次项 $g(X)=\sin nX$, 通过 (3.9) 和 (3.10) 式方程 (2.28) 的近似解就可以完全确定. 当 $\alpha=0.5, \beta=1, \gamma=1, m=1, n=0.5$ 时, 方程 (2.28) 的

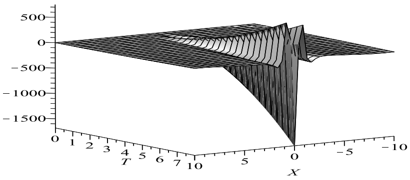

图 **1** Rossby 波的振幅

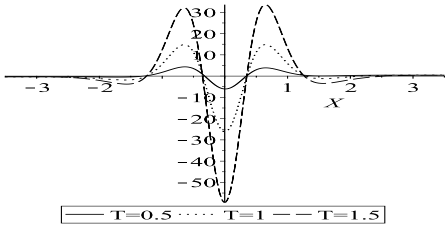

图 **2** 三个不同时刻的 Rossby 波的振幅

近似解的图形如上. 从图 1 和图 2 可以看出: 这种模拟式 Rossby 波的振幅在随时间的改变而振幅逐渐在增大. 波峰和波谷出现的经度位置随时间发生略微改变.

4 小结

本文从中高纬度含有完整 Coriolis 力的准地转位涡方程出发, 利用时空伸缩变换, 得到了描述 Rossby 波的振幅形态满足的非齐次 mKdV-Burgers 方程. 在推导模型过程中, 发现底地形函数 $B(x,y)=\varepsilon^3h(X,y)$, 因为这里考虑的是大尺度问题, 即 $\varepsilon\ll1$ 时, 所以底地形函数就表示弱地形效应. 当底地形效应彻底消失的时候就是文献 [12] 的情形. 最后对非齐次 mKdV-Burgers 方程利用简化的微分变换法做近似求解, 对影响解的因素做出分析.

通过所得的分析结论, 可以看出在理想状态正压模式下底地形效应对 Rossby 波振幅影响较大. 在大气海洋学中, 该结论为研究 Rossby 波在接近地球低层的振幅形态提供了理论依据.

参 考 文 献

[1] Kishimoto N, Yoneda T. A number theoretical observation of a resonant interaction of Rossby waves[J]. Kodai Mathematical Journal, 2017, 40(1): 52–57.

[2] 刘春, 李跃凤, 宋伟, 等. 北半球西风带准周期性转换的理论分析 – 初步探讨北极与中纬度及副热带能量相互输送的机制 [J]. 大气科学, 2019, 43(2): 456–466.

[3] 焦亚音, 冉令坤, 李娜. 台风" 彩虹"(2015) 高分辨率数值模拟及涡旋 Rossby 波特征分析 [J]. 物理学报, 2017, 66(8): 335–354.

[4] Jing P, Banerjee S, Barrera M. Impact of Rossby wave breaking on ozone variation in the upper troposphere and lower stratosphere, 1985–2015[J]. Atmospheric Environment, https://doi.org/10.1016/j.atmosenv.2019.117122.

[5] 李喜仓, 王冀, 杨晶. 内蒙古东部牧区极端降雪变化特征及其成因 [J]. 地理科学, 2013, 33(7): 884–889.

[6] Long R R. Solitary waves in the westerlies[J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1964, 21(2): 197–200.

[7] Zhang R, Yang L, Jian S. (2+1)-Dimensional nonlinear Rossby solitary waves under the effects of generalized beta and slowly varying topography[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 90(2): 815–822.

[8] 宋健, 刘全生, 岑瑞婷. 两层流体中具有 β 变化和地形影响的 Rossby 波 (英文)[J]. 数学杂志, 2017, 37(4): 751–760.

[9] 赵强, 刘式适. 切变基本纬向流中赤道 Rossby 包络孤立波 [J]. 大气科学, 2001, 25(1): 133–141.

[10] Dellar P J , Salmon R. Shallow water equations with a complete Coriolis force and topography[J]. Physics of Fluids, 2005, 17(10): 106601–106620.

[11] Stewart A L, Dellar P J. Multilayer shallow water equations with complete Coriolis force. Part 1. Derivation on a non-traditional beta-plane[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2010, 651: 387–413.

[12] 尹晓军, 杨联贵. 完整 Coriolis 力作用下的非线性 Rossby 波 [J]. 应用数学, 2017, 30(3): 607–612.

[13] Yang H, Sun J, Fu C. Time-fractional Benjamin-Ono equation for algebraic gravity solitary waves in baroclinic atmosphere and exact multi-soliton solution as well as interaction[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2019, 71: 187–201.

[14] Tort M, Ribstein B, Zeitlin V. Symmetric and asymmetric inertial instability of zonal jets on the f-plane with complete Coriolis force[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2016, 788: 274–302.

[15] Staniforth A. Consistent quasi-shallow models of the global atmosphere in non-spherical geopotential coordinates with complete Coriolis force[J]. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 2015, 141(688): 979–986.

[16] Stewart A L, Dellar P J. An energy and potential enstrophy conserving numerical scheme for the multi-layer shallow water equations with complete Coriolis force[J]. Journal of Computational Physics, 2016, 313: 99–120.

[17] Gao L N , Zi Y Y , Yin Y H. Bäcklund transformation, multiple wave solutions and lump solutions to a (3+1)-dimensional nonlinear evolution equation[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 89(3): 2233–2240.

[18] Lü X, Chen S T and Ma W X. Constructing lump solutions to a generalized Kadomtsev–Petviashvili – Boussinesq equation[J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 86(1): 523–534.

[19] Fu Z, Liu S, Liu S. New Jacobi elliptic function expansion and new periodic solutions of nonlinear wave equations[J]. Physics Letters A, 2001, 290(1–2): 72–76.

[20] Gao L N, Zhao X Y, Zi Y Y, Yu J and Lü X. Resonant behavior of multiple wave solutions to a Hirota bilinear equation[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2016, 72: 1225–1229.

[21] Zharinov V V. Bäcklund transformations[J]. Theoretical and Mathematical Physics, 2016, 189(3): 1681–1692.

INHOMOGENEOUS MKDV-BURGERS EQUATION UNDER WITH COMPLETE CORIOLIS FORCE AND WEAK TOPOGRAPHY

ZHOU Lan-suo[1] , LUAN Jin-feng[2] , YIN Xiao-jun [1] , NA Ren-man-du-la[1]

(*1. College of Science, Inner Mongolia Agriculture University, Hohhot 010018, China*)

(*2. Inner Mongolia Vocational College of Physical Education, Hohhot 010051, China*)

Abstract: In this paper, we study the problem of quasi geostrophic vortex equation with complete Coriolis force in mid and high latitude. By means of space-time scaling transformation, we obtain the conclusion of inhomogeneous mKdV-Burgers equation for describing the amplitude form of Rossbywave. The approximate solution shows that the weak topographic effect forces the amplitude of Rossbywave, which generalize the results in literature [12].

Keywords: Rossby waves; geostrophic potential vorticity equation; inhomogeneous mKdV-Burgers equation

2010 MR Subject Classification: 76B65; 86A10