Vol. 40 (2020)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

正合范畴的整体 Gorenstein 维数

郭景阁 [1], 王君甫 [2], 赵仁育 [1]

(1. 西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070)

(2. 常州工学院理学院, 江苏 常州 213032)

摘 要: 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象和足够多内射对象的正合范畴. 本文研究了 $\mathcal{A}$ 的整体 Gorenstein 维数和 $\mathcal{A}$ 中的 Gorenstein 导出函子. 利用同调的方法, 证明了: 如果 $\mathcal{A}$ 有可数直和与可数直积, 那么 $\sup\{\mathrm{Gpd}M \mid M \in \mathcal{A}\} = \sup\{\mathrm{Gid}M \mid M \in \mathcal{A}\}$; 对 $\mathcal{A}$ 中的对象 M, N, 若 $\mathrm{Gpd}M < \infty$, $\mathrm{Gid}N < \infty$, 则对任意的 $i \geq 0$, $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{GP}}(M, N) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{GI}}(M, N)$.

关 键 词: 正合范畴; 整体 Gorenstein 维数; Gorenstein 导出函子

MR(2010) **主题分类号**: 18E10; 18G05; 18G10; 18G20 **中图分类号**: O154.2

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2020)04-0451-10

0 引言

1995 年, Enochs 和 Jenda 在文献 [1] 中引入了 Gorenstein 内射模和 Gorenstein 投射模的概念. 自此, Gorenstein 同调代数逐渐被人们所关注, 至今已发展成一个比较完整的理论体系. 2010 年, Bennis 和 Nahdou 在文献 [2] 中证明了 $\sup\{\mathrm{Gpd}_R M \mid M$ 是左 R - 模 $\}=\sup\{\mathrm{Gid}_R M \mid M$ 是左 R - 模 $\}$, 并把这个值定义为环 R 的左整体 Gorenstein 维数. 2004 年, Holm 在文献 [3] 中证明了对左 R - 模 M, N, 如果 $\mathrm{Gpd}_R M < \infty$, $\mathrm{Gid}_R N < \infty$, 那么对任意的 $i \geq 0$, $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{GP}}(M,N) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{GI}}(M,N)$, 并由此定义了 Gorenstein 导出函子 $\mathrm{GExt}^i_R(-,-)$. 在文献 [4, 5] 中 Asadollahi 和 Salarian 研究了三角范畴中的 Gorenstein 同调理论. 2014 年, Ren 和 Liu 在文献 [6] 中研究了三角范畴的整体 Gorenstein 维数和三角范畴中的 Gorenstein 导出函子. 2015 年, Wang 在文献 [7] 中研究了正合范畴中的 Gorenstein 投射性和 Tate 上同调.

受以上工作启发, 本文研究正合范畴的整体 Gorenstein 维数和正合范畴中的 Gorenstein 导出函子. 全文分为三个部分: 第一部分介绍一些相关的概念及事实; 第二部分证明了在有足够多投射对象, 足够多内射对象, 有可数直和及可数直积的正合范畴 $\mathcal{A}$ 中, $\sup\{\mathrm{Gpd}M \mid M \in \mathcal{A}\} = \sup\{\mathrm{Gid}M \mid M \in \mathcal{A}\}$, 由此将这个值定义为 $\mathcal{A}$ 的整体 Gorenstein 维数; 第三部分, 证明在有足够多投射对象和足够多内射对象的正合范畴 $\mathcal{A}$ 中, 对任意的 M, $N \in \mathcal{A}$, 如果 $\mathrm{Gpd}M < \infty$, $\mathrm{Gid}N < \infty$, 那么 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{GP}}(M,N) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{GI}}(M,N)$. 由此把这个同构意义下唯一的 Abel 群定义为 $\mathcal{A}$ 中对象 M, N 确定的 Gorenstein 上同调群.

1 预备知识

*收稿日期: 2019-07-14 **接收日期**: 2019-12-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11861055); 常州工学院科研项目 (E3-6107-17-019).

作者简介: 郭景阁 (1993–), 女, 河南洛阳, 硕士, 主要研究方向: 环的同调理论

通讯作者: 赵仁育

设 $\mathcal{A}$ 是一个加法范畴, $\mathcal{A}$ 中的核 - 余核对 (i,p) 是可合成的态射 $A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A''$, 使得 i 是 p 的核, p 是 i 的余核. 令 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{A}$ 中一些核 - 余核对构成的类. 称 $\mathcal{A}$ 中的态射 i 是可许单的, 如果存在态射 p, 使得 $(i,p)\in\mathcal{E}$; 称 $\mathcal{A}$ 中的态射 p 是可许满的, 如果存在态射 i, 使得 $(i,p)\in\mathcal{E}$. 用 $\rightarrowtail$ 表示可许单态射, $\twoheadrightarrow$ 表示可许满态射.

定义 1.1 [8] 设 $\mathcal{A}$ 是加法范畴, $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{A}$ 中一些核 - 余核对构成的类, 且 $\mathcal{E}$ 关于同构封闭. 称 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{A}$ 上的正合结构, 如果

[E_0] 对任意 $A\in\mathcal{A}$, 单位态射 1_A 是可许单的.

[$\mathrm{E}_0^{\mathrm{op}}$] 对任意 $A\in\mathcal{A}$, 单位态射 1_A 是可许满的.

[E_1] 可许单态射的类关于合成封闭.

[$\mathrm{E}_1^{\mathrm{op}}$] 可许满态射的类关于合成封闭.

[E_2] 一个可许单态射沿着任意一个态射都存在一个推出并得到一个可许单态射.

[$\mathrm{E}_2^{\mathrm{op}}$] 一个可许满态射沿着任意一个态射都存在一个拉回并得到一个可许满态射.

称加法范畴 $\mathcal{A}$ 和其上的正合结构 $\mathcal{E}$ 构成的二元组 $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ 为正合范畴, $\mathcal{E}$ 中的元素称为可许对或短正合序列. 以下将正合范畴 $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ 简记为 $\mathcal{A}$.

称 $\mathcal{A}$ 中的态射 $f: A\to B$ 是可许的, 如果存在可许单态射 m 和可许满态射 e, 使得下图可交换

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "e"'] & & B \\ & I \arrow[ur, tail, "m"'] & \end{tikzcd}$$

称可许态射的序列

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "e"'] & & A \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr, two heads, "e'"'] & & A'' \\ & I \arrow[ur, tail, "m"'] & & I' \arrow[ur, tail, "m'"'] & \end{tikzcd}$$

是正合的, 如果 $I \overset{m}{\rightarrowtail} A \overset{e'}{\twoheadrightarrow} I'$ 是一个短正合序列. 称 $\mathcal{A}$ 中的序列 $\cdots\to A_{i+1}\xrightarrow{f_{i+1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i-1}\to\cdots$ 正合, 如果对任意的 $i\in\mathbb{Z}$, f_i 是可许态射, 并且 $A_{i+1}\xrightarrow{f_{i+1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i-1}$ 是正合的.

设 $P\in\mathcal{A}$, 称 P 是正合范畴 $\mathcal{A}$ 中的投射对象, 如果对 $\mathcal{A}$ 中的任意短正合序列 $A\rightarrowtail B\twoheadrightarrow C$, Abel 群的序列

$$0\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,A)\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,B)\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,C)\to 0$$

正合. 用 $\mathcal{P}$ 表示 $\mathcal{A}$ 中所有投射对象的类. 称正合范畴 $\mathcal{A}$ 有足够多的投射对象, 如果对任意的 $M\in\mathcal{A}$, 存在一个投射对象 P 和可许满态射 $P\twoheadrightarrow M$.

设 $\mathcal{A}$ 是正合范畴, $M\in\mathcal{A}$. 对象 M 的投射分解是正合序列 $\cdots\to P_n\to\cdots\to P_1\to P_0\twoheadrightarrow M$, 其中对任意的 $i\geq 0$, $P_i\in\mathcal{P}$, $P_0\twoheadrightarrow M$ 是一个可许满态射. 设 $M\in\mathcal{A}$, 用 $\mathrm{pd}M$ 表示 M 的投射维数, 定义为: 当 $M=0$ 时, $\mathrm{pd}M=-1$; 当 $M\in\mathcal{P}$ 时, $\mathrm{pd}M=0$; 设 n 是一个正整数, 若存在短正合序列 $K\rightarrowtail P\twoheadrightarrow M$, 使得 $P\in\mathcal{P}$, $\mathrm{pd}K\leq n-1$, 则 $\mathrm{pd}M\leq n$. 用 $\widetilde{\mathcal{P}}$ 表示 $\mathcal{A}$ 中所有投射维数有限的对象构成的类.

对偶地, 可以定义 $\mathcal{A}$ 中的内射对象, $\mathcal{A}$ 中对象的内射分解以及内射维数. 用 $\mathcal{I}$ 表示 $\mathcal{A}$ 中所有内射对象构成的类, 用 $\widetilde{\mathcal{I}}$ 表示 $\mathcal{A}$ 中所有内射维数有限的对象构成的类.

以下总假定 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象和足够多内射对象的正合范畴. 此时, 由文献 [8, 注 12.11], 对任意的 $n \geq 0$ 及任意的 $M, N \in \mathcal{A}$, Ext 群 $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M,N) \cong R^n\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{P}, N)$, $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(M,N) \cong R^n\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \mathbf{I})$, 其中 $\mathbf{P} \twoheadrightarrow M$ 是 M 的一个投射分解, $N \rightarrowtail \mathbf{I}$ 是 N 的一个内射分解.

命题 1.2 设 M 是 $\mathcal{A}$ 中的对象, $n \geq 0$, 则以下等价

(1) $\mathrm{pd}M \leq n$.

(2) 对任意的 $N \in \mathcal{A}$ 和任意的 $i > n$, $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M,N) = 0$.

(3) 对任意的 $N \in \mathcal{A}$, $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{A}}(M,N) = 0$.

(4) 对 $\mathcal{A}$ 中的任意正合序列 $K_n \rightarrowtail P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \twoheadrightarrow M$, 如果 $P_0, \ldots, P_{n-1} \in \mathcal{P}$, 那么 $K_n \in \mathcal{P}$.

证 (2) $\Rightarrow$ (3) 显然.

(1) $\Rightarrow$ (2) 因为 $\mathrm{pd}M \leq n$, 所以存在 M 的投射分解

$$P_n \rightarrowtail P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \twoheadrightarrow M.$$

因为对任意的 $i > n$, $P_i = 0$, 所以 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M,N) = 0$.

(3) $\Rightarrow$ (4) 设 $K_n \rightarrowtail P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \twoheadrightarrow M$ 是 $\mathcal{A}$ 中的正合序列, 其中 $P_0, \cdots, P_{n-1} \in \mathcal{P}$. 从而对任意的 $N \in \mathcal{A}$, 由 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(K_n, N) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{A}}(M,N)$ 及 (3) 知 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(K_n, N) = 0$, 所以 K_n 是投射的.

(4) $\Rightarrow$ (1) 设 $\cdots \to P_1 \to P_0 \twoheadrightarrow M$ 是 $M \in \mathcal{A}$ 的一个投射分解, 则有正合列 $K_n \rightarrowtail P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \twoheadrightarrow M$. 由 (4) 知 $K_n \in \mathcal{P}$, 所以 $\mathrm{pd}M \leq n$.

对 $\mathcal{A}$ 中对象的内射维数有对偶的结论.

2 正合范畴的整体 Gorenstein 维数

定义 2.1 [7] 称 $\mathcal{A}$ 中的短正合序列 $A \rightarrowtail B \twoheadrightarrow C$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{P})$ - 正合的, 如果对任意的 $Q \in \mathcal{P}$, Abel 群的序列

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C, Q) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, Q) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, Q) \to 0$$

正合.

定义 2.2 [7] 称正合序列 $\mathbf{P}: \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} P_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} \cdots$ 是完全投射分解, 如果对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, $P_n \in \mathcal{P}$, 且短正合序列 $K_n \rightarrowtail P_{n-1} \twoheadrightarrow K_{n-1}$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, \mathcal{P})$ - 正合的. 此时, 称 K_n 是 $\mathcal{A}$ 中的 Gorenstein 投射对象. 用 $\mathcal{GP}$ 表示 $\mathcal{A}$ 中所有 Gorenstein 投射对象的类.

对偶地可以定义 $\mathcal{A}$ 中的完全内射分解和 Gorenstein 内射对象. 用 $\mathcal{GI}$ 表示 $\mathcal{A}$ 中所有 Gorenstein 内射对象的类.

定义 2.3 [7] 设 $M \in \mathcal{A}$, 用 $\mathrm{Gpd}M$ 表示 M 的 Gorenstein 投射维数, 定义为: 若 $M = 0$, 则 $\mathrm{Gpd}M = -1$; 若 $M \in \mathcal{GP}$, 则 $\mathrm{Gpd}M = 0$; 如果存在一个短正合序列 $K \rightarrowtail G \twoheadrightarrow M$, 其中 $G \in \mathcal{GP}$, $\mathrm{Gpd}K \leq n-1$, 那么 $\mathrm{Gpd}M \leq n$. 如果对任意的 $n \geq 0$, $\mathrm{Gpd}M \neq n$, 那么令 $\mathrm{Gpd}M = \infty$. 用 $\widetilde{\mathcal{GP}}$ 表示 $\mathcal{A}$ 中所有 Gorenstein 投射维数有限的对象构成的类.

对偶地可以定义 $\mathcal{A}$ 中对象的 Gorenstein 内射维数 Gid$M$. 用 $\widetilde{\mathcal{GI}}$ 表示 $\mathcal{A}$ 中所有 Gorenstein 内射维数有限的对象构成的类.

命题 2.4 设 $\mathcal{A}$ 是正合范畴. 若 $\mathcal{A}$ 有可数直和, 则 $\mathcal{GP}$ 关于可数直和与直和项封闭.

证 设 $\{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一簇对象, 且对任意的 $i\in\mathbb{Z}$, $M_i\in\mathcal{GP}$, 下证 $\oplus_{i\in\mathbb{Z}}M_i\in\mathcal{GP}$. 因为 $M_i\in\mathcal{GP}$, 所以存在完全投射分解

$$\mathbf{P}_i:\cdots\to P_{i,1}\to P_{i,0}\to P_{i,-1}\to\cdots,$$

使得对任意的 $n\in\mathbb{Z}$, 存在短正合序列 $K_{i,n}\rightarrowtail P_{i,n-1}\twoheadrightarrow K_{i,n-1}$, 其中 $M_i=K_{i,0}$. 则由文献 [8, 命题 2.9] 知有正合列

$$\oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathbf{P}_i:\cdots\to\oplus_{i\in\mathbb{Z}}P_{i,1}\to\oplus_{i\in\mathbb{Z}}P_{i,0}\to\oplus_{i\in\mathbb{Z}}P_{i,-1}\to\cdots.$$

由文献 [9, P_{433}] 知, 对任意的 $Q\in\mathcal{A}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathbf{P}_i,\ Q)\cong\prod_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{P}_i,\ Q)$ 正合, 所以 $\oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathbf{P}_i$ 是完全投射分解, 故 $\oplus_{i\in\mathbb{Z}}M_i\in\mathcal{GP}$.

下证 $\mathcal{GP}$ 关于直和项封闭. 设 $M\in\mathcal{GP}$，且 $M=M'\oplus M''$. 令 $N=M\oplus M\oplus\cdots$. 则 $N=M'\oplus M''\oplus M'\oplus M''\oplus\cdots$, 故 $N\cong M'\oplus N$. 由文献 [8, 引理 2.7] 知 $M'\rightarrowtail M'\oplus N\twoheadrightarrow N$ 是短正合序列. 因为 $\mathcal{GP}$ 关于直和封闭, 所以由文献 [7, 引理 2.2, 定理 2.4] 和文献 [10, 命题 1.4] 知 $\mathcal{GP}$ 关于直和项封闭.

命题 2.5 设 $\mathcal{A}$ 是正合范畴. 若 $\mathcal{A}$ 有可数直和, 则对 $\mathcal{A}$ 中任何一簇对象 $\{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$,

$$\mathrm{Gpd}(\oplus_{i\in\mathbb{Z}}M_i)=\sup\{\mathrm{Gpd}M_i\mid i\in\mathbb{Z}\}.$$

证 因为 $\mathcal{GP}$ 关于可数直和封闭, 所以 $\le$ 成立. 设 $M\in\mathcal{A}$, 下面证明如果 M' 是 M 的直和项, 那么 $\mathrm{Gpd}M'\le\mathrm{Gpd}M$ 即可.

设 $\mathrm{Gpd}M=n<\infty$, 对 n 进行归纳. 当 $n=0$ 时, 由命题 2.4 知 $M'\in\mathcal{GP}$, 所以 $\mathrm{Gpd}M'=\mathrm{Gpd}M$. 设 $n>0$, 且假定结论对 $n-1$ 的情形成立. 设 $M=M'\oplus M''$, 取短正合序列 $K'\rightarrowtail G'\twoheadrightarrow M'$ 与 $K''\rightarrowtail G''\twoheadrightarrow M''$, 其中 G', $G''\in\mathcal{P}$. 则由文献 [8, 定理 12.8] 有如下行、列正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[r] \arrow[d] & K'\oplus K'' \arrow[r] \arrow[d] & K'' \arrow[d] \\
G' \arrow[r] \arrow[d] & G'\oplus G'' \arrow[r] \arrow[d] & G'' \arrow[d] \\
M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M''.
\end{tikzcd}$$

由文献 [8, 推论 11.6] 和文献 [7, 引理 2.2] 知 $G'\oplus G''\in\mathcal{GP}$. 因为 $\mathrm{Gpd}M=n$, 所以由文献 [7, 命题 2.7] 知 $\mathrm{Gpd}(K'\oplus K'')=n-1$. 因此由归纳假设知 $\mathrm{Gpd}K'\le n-1$. 故 $\mathrm{Gpd}M'\le n$.

引理 2.6 (1) 设 G 是 $\mathcal{A}$ 中的 Gorenstein 内射对象, 则对任意的 $X\in\widetilde{\mathcal{P}}$, $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X,G)=0$.

(2) 设 G 是 $\mathcal{A}$ 中的 Gorenstein 投射对象, 则对任意的 $X\in\widetilde{\mathcal{I}}$, $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(G,X)=0$.

证 只证 (1), (2) 可对偶地证明.

(1) 设 G 是 $\mathcal{A}$ 中的 Gorenstein 内射对象, 则对任意的 $i\ge 0$, 存在 $\mathcal{A}$ 中的短正合序列 $G_i\rightarrowtail I_i\twoheadrightarrow G_{i-1}$, 其中 $G_0=G$, $I_i\in\mathcal{I}$. 设 $X\in\widetilde{\mathcal{P}}$, 则有 Abel 群同构

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X,G)\cong\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(X,G_1)\cong\cdots\cong{\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}}^i(X,G_{i-1})\cong\cdots.$$

因为 X 的投射维数有限, 所以 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X,G)=0$.

命题 2.7 设 M 是 $\mathcal{A}$ 中的对象.

(1) 如果 $M\in\widetilde{\mathcal{P}}$, 那么 $\mathrm{Gid}M=\mathrm{id}M$.

(2) 如果 $M\in\widetilde{\mathcal{I}}$, 那么 $\mathrm{Gpd}M=\mathrm{pd}M$.

证 (1) 显然 $\mathrm{Gid}M\leq\mathrm{id}M$. 下证 $\mathrm{Gid}M\geq\mathrm{id}M$. 若 $\mathrm{Gid}M=\infty$, 则结论成立. 现设 $\mathrm{Gid}M<\infty$. 若 $M\in\mathcal{GI}$, 则存在一个短正合序列 $M'\rightarrowtail E\twoheadrightarrow M$, 其中 $M'\in\mathcal{GI}$, $E\in\mathcal{I}$. 因为 $M\in\widetilde{\mathcal{P}}$, $M'\in\mathcal{GI}$, 所以由引理 2.6 知 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M,M')=0$. 因此 $E\cong M'\oplus M$. 因为 $E\in\mathcal{I}$, 所以由文献 [8, 注记 11.8] 知 $M\in\mathcal{I}$.

设 $\mathrm{Gid}M>0$, 则由文献 [7, 命题 2.7] 的对偶知存在 $\mathcal{A}$ 中的短正合序列 $M\rightarrowtail G\twoheadrightarrow L$, 其中 $G\in\mathcal{GI}$, $\mathrm{id}L=\mathrm{Gid}M-1$. 因为 $G\in\mathcal{GI}$, 所以存在一个短正合序列 $G'\rightarrowtail E\twoheadrightarrow G$, 其中 $G'\in\mathcal{GI}$, $E\in\mathcal{I}$. 因为 $E\twoheadrightarrow G$ 是一个可许满态射, 所以由 $[\mathrm{E}_2^{\mathrm{op}}]$ 及文献 [8, 命题 2.15] 可以得到如下行、列正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
G' \arrow[r] \arrow[d, equal] & D \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d] \\
G' \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d] \\
& L \arrow[r, equal] & L.
\end{tikzcd}$$

因为 $E\in\mathcal{I}$, 所以 $\mathrm{id}D\leq\mathrm{id}L+1=\mathrm{Gid}M$. 因为 $M\in\widetilde{\mathcal{P}}$, $G'\in\mathcal{GI}$, 所以由引理 2.6 可知 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M,G')=0$. 因此短正合序列 $G'\rightarrowtail D\twoheadrightarrow M$ 可裂, 故 $\mathrm{id}M\leq\mathrm{id}D\leq\mathrm{Gid}M$.

(2) 对偶地可以证明.

命题 2.8 设 $M\in\widetilde{\mathcal{GP}}$, n 是非负整数, 则以下等价

(1) $\mathrm{Gpd}M\leq n$.

(2) 对任意的 $L\in\widetilde{\mathcal{P}}$ 和任意的 $i>n$, $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M,L)=0$.

(3) 对任意的 $Q\in\mathcal{P}$ 和任意的 $i>n$, $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M,Q)=0$.

(4) 对 $\mathcal{A}$ 中任意的正合序列 $K_n\rightarrowtail G_{n-1}\to\cdots\to G_0\twoheadrightarrow M$, 若 $G_0,\ldots,G_{n-1}\in\mathcal{GP}$, 则 $K_n\in\mathcal{GP}$.

证 (2) $\Rightarrow$ (3) 显然. (4) $\Rightarrow$ (1) 由文献 [7, 命题 2.7] 可知.

(1) $\Rightarrow$ (2) 假设 $\mathrm{Gpd}\,M\leq n$, 则存在 $\mathcal{A}$ 中的正合序列

$$G_n\rightarrowtail G_{n-1}\to\cdots\to G_1\to G_0\twoheadrightarrow M,$$

其中 $G_0,\cdots,G_n$ 是 $\mathcal{A}$ 中的 Gorenstein 投射对象. 设 $L\in\widetilde{\mathcal{P}}$, 则对任意的 $i>0$, 由文献 [7, 引理 2.3] 知 $\mathrm{Ext}^{i+n}_{\mathcal{A}}(M,L)\cong\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(G_n,L)=0$.

(3) $\Rightarrow$ (4) 考察 $\mathcal{A}$ 中的正合序列

$$K_n\rightarrowtail G_{n-1}\to\cdots\to G_0\twoheadrightarrow M,$$

其中 $G_0,\ldots,G_{n-1}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的 Gorenstein 投射对象. 因为 $\mathrm{Gpd}M<\infty$, 所以 $\mathrm{Gpd}K_n<\infty$, 因此有 $\mathcal{A}$ 中的正合序列

$$G'_m\rightarrowtail G'_{m-1}\to\cdots\to G'_0\twoheadrightarrow K_n,$$

其中 $G'_0,\dots,G'_m$ 是 $\mathcal{A}$ 中的 Gorenstein 投射对象. 于是有短正合序列 $L'_j \rightarrowtail G_{j-1} \twoheadrightarrow L'_{j-1}$, $j=1,\cdots,m$, 其中 $L'_m=G'_m$, $L'_0=K_n$. 设 $i>0$, $Q\in\mathcal{P}$, 则由文献 [7, 引理 2.3] 知 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(K_n,Q)\cong\mathrm{Ext}^{i+n}_{\mathcal{A}}(M,Q)=0$. 于是对任意的 $j=1,\cdots,m$, 由文献 [7, 引理 2.3] 知 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(L'_{j-1},Q)\cong\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{A}}(K_n,Q)=0$. 因此由文献 [7, 推论 2.8] 知 $L'_m,\cdots,L'_0\in\mathcal{GP}$. 特别地, $K_n\in\mathcal{GP}$.

引理 2.9 设 $\sup\{\mathrm{Gpd}M\mid M\in\mathcal{A}\}<\infty$, 则对任意的非负整数 n, 以下等价

(1) $\sup\{\mathrm{Gpd}M\mid M\in\mathcal{A}\}\leq n$.

(2) 对任意的 $P\in\widetilde{\mathcal{P}}$, $\mathrm{id}P\leq n$.

证 由引理 1.2 的对偶和命题 2.8 可得.

定义 2.10 设 $M\in\mathcal{A}$. 称 M 是强 Gorenstein 投射的, 如果存在正合序列

$$\mathbf{P}:\cdots\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}\cdots,$$

其中 $P\in\mathcal{P}$, 使得短正合序列 $P\overset{m}{\rightarrowtail}M\overset{e}{\twoheadrightarrow}P$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,\mathcal{P})$ - 正合的, 其中 $f=em$. 称 $\mathbf{P}$ 是强完全投射分解.

对偶地可以定义 $\mathcal{A}$ 中的强 Gorenstein 内射对象和强完全内射分解.

注 2.11 对象 $M\in\mathcal{A}$ 是强 Gorenstein 投射的当且仅当存在一个短正合序列 $M\rightarrowtail P\twoheadrightarrow M$, 其中 P 是投射的, 并且对任意的 $Q\in\widetilde{\mathcal{P}}$, $i>0$, $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M,Q)=0$.

命题 2.12 设 $\mathcal{A}$ 是正合范畴, 且 $\mathcal{A}$ 有可数直和 (直积), 则对任意的 $M\in\mathcal{A}$, $M\in\mathcal{GP}(M\in\mathcal{GI})$ 当且仅当 M 是 $\mathcal{A}$ 中某个强 Gorenstein 投射 (内射) 对象的直和项.

证 只证 Gorenstein 投射的情形, Gorenstein 内射的情形对偶地可以证明.

必要性 设 M 是 $\mathcal{A}$ 中的 Gorenstein 投射对象, 则存在一个完全投射分解

$$\mathbf{P}:\cdots\to P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{d_0}P_{-1}\xrightarrow{d_{-1}}\cdots,$$

使得对任意的 $n\in\mathbb{Z}$, 存在短正合序列 $K_n\rightarrowtail P_{n-1}\twoheadrightarrow K_{n-1}$, 其中 $P_{n-1}\in\mathcal{P}$, $M=K_0$. 对任意的 $m\in\mathbb{Z}$, 用 $\Sigma^m\mathbf{P}$ 表示这样的正合序列对任意的 $i\in\mathbb{Z}$, $(\Sigma^m\mathbf{P})_i=P_{i-m}$, $d_i^{\Sigma^m\mathbf{P}}=d_{i-m}$. 由文献 [8, 命题 2.9, 推论 11.6] 知有 $\mathcal{A}$ 中投射对象的正合序列

$$\mathbf{Q}=\oplus(\Sigma^m\mathbf{P})=:\cdots\to\oplus P_i\xrightarrow{\oplus d_i}\oplus P_i\xrightarrow{\oplus d_i}\oplus P_i\xrightarrow{\oplus d_i}\cdots.$$

从而有短正合序列 $K\rightarrowtail\oplus P_i\twoheadrightarrow K$, M 是 K 的直和项. 设 $L\in\mathcal{P}$, 则由

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\oplus_{m\in\mathbb{Z}}(\Sigma^m\mathbf{P}),\ L)\cong\prod_{m\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Sigma^m\mathbf{P},\ L)$$

知 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{Q},L)$ 正合. 因此 $\mathbf{Q}$ 是强完全投射分解, 故 M 是强 Gorenstein 投射对象 K 的直和项.

充分性由命题 2.4 可得.

定理 2.13 设 $\mathcal{A}$ 是正合范畴, 且 $\mathcal{A}$ 有可数直和与可数直积. 则

$$\sup\{\mathrm{Gpd}M\mid M\in\mathcal{A}\}=\sup\{\mathrm{Gid}M\mid M\in\mathcal{A}\}.$$

证 设 $n\geq 0$, 且 $\sup\{\mathrm{Gpd}M\mid M\in\mathcal{A}\}\leq n$. 下面证明 $\sup\{\mathrm{Gid}M\mid M\in\mathcal{A}\}\leq n$. 首先证明若 M 是 $\mathcal{A}$ 中的强 Gorenstein 投射对象, 则 $\mathrm{Gid}M\leq n$. 设 $M\in\mathcal{A}$ 是强 Gorenstein 投射

的, 则由注 2.11 知存在一个短正合序列 $M \rightarrowtail P \twoheadrightarrow M$, 其中 $P \in \mathcal{P}$. 由文献 [8, 定理 12.8] 的对偶可得如下行、列正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d] \\
I_0 \arrow[r] \arrow[d] & I_0 \oplus I_0 \arrow[r] \arrow[d] & I_0 \arrow[d] \\
I_1 \arrow[r] \arrow[d] & I_1 \oplus I_1 \arrow[r] \arrow[d] & I_1 \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
I_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & I_{n-1} \oplus I_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & I_{n-1} \arrow[d] \\
N \arrow[r] & C \arrow[r] & N,
\end{tikzcd}$$

其中 I_i 是内射的, $i = 0, \cdots, n-1$. 因为 P 是投射的, 由引理 2.9 知 $\mathrm{id}P \leq n$, 所以由命题 1.2 的对偶知 $C \in \mathcal{I}$. 设 E 是 $\mathcal{A}$ 中的内射对象, 则由命题 2.7 知 $\mathrm{pd}E \leq n$, 所以对任意的 $i \geq n+1$, $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(E, N) = 0$. 因此由注 2.11 的对偶知 N 是强 Gorenstein 内射的. 故 $\mathrm{Gid}M \leq n$.

其次证明对任意的 $M \in \mathcal{A}$, $\mathrm{Gid}M \leq n$.

设 $M \in \mathcal{A}$, 由条件知 $\mathrm{Gpd}M = m \leq n$. 下面对 m 进行归纳.

当 $m = 0$ 时, M 是 Gorenstein 投射的. 由命题 2.12, 存在 $\mathcal{A}$ 中的强 Gorenstein 投射对象 G, 使得 M 是 G 的直和项. 由第一步知 $\mathrm{Gid}G \leq n$. 由命题 2.5 的对偶知 $\mathrm{Gid}M \leq n$.

设 $m \geq 1$. 由文献 [7, 命题 2.7] 知存在短正合序列 $K \rightarrowtail N \twoheadrightarrow M$, 其中 $N \in \mathcal{GP}, \mathrm{Gpd}K \leq m-1$. 由归纳假设知 $\mathrm{Gid}K \leq n$, $\mathrm{Gid}N \leq n$. 于是由文献 [8, 定理 12.8] 的对偶, 命题 2.8 的对偶和文献 [7, 定理 2.4] 的对偶知 $\mathrm{Gid}M \leq n$.

对偶地可证若 $\sup\{\mathrm{Gid}M \mid M \in \mathcal{A}\} \leq n$, 则 $\sup\{\mathrm{Gpd}M \mid M \in \mathcal{A}\} \leq n$. 故结论成立.

设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象, 足够多内射对象以及可数直和与可数直积的正合范畴. 令

$$\mathcal{G}\mathrm{gdim}\mathcal{A} := \sup\{\mathrm{Gpd}M \mid M \in \mathcal{A}\} = \sup\{\mathrm{Gid}M \mid M \in \mathcal{A}\}.$$

称 $\mathcal{G}\mathrm{gdim}\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{A}$ 的整体 Gorenstein 维数.

3 正合范畴中的 Gorenstein 导出函子

定义 3.1 设 $M \in \mathcal{A}$, 对象 M 的真左 Gorenstein 投射分解是一个正合序列

$$\cdots \to G_n \to G_{n-1} \to \cdots \to G_1 \to G_0 \twoheadrightarrow M,$$

其中每个 $G_i \in \mathcal{GP}$, 并且对任意的 $i \geq 0$, 短正合序列 $K_{i+1} \rightarrowtail G_i \twoheadrightarrow K_i$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{GP}, -)$ - 正合的, 即对任意的 $G \in \mathcal{GP}$, 序列

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G, K_{i+1}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G, G_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G, K_i) \to 0$$

正合, 其中 $K_0 = M$.

设 $M \in \widetilde{\mathcal{GP}}$, 则由文献 [7, 命题 2.7, 引理 2.3] 知 M 有真左 Gorenstein 投射分解.

定义 3.2 设 $M \in \widetilde{\mathcal{GP}}$, 且 $\mathbf{G} \twoheadrightarrow M$ 是 M 的一个真左 Gorenstein 投射分解. 对任意的 $i \geq 0$ 及任意的 $N \in \mathcal{A}$, 定义

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{GP}}(M, N) = \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{G}, N)).$$

由比较定理 (文献 [8, 定理 12.4] 和文献 [11, P_{175}]) 知 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{GP}}(M, N)$ 的定义合理.

对偶地, 可以定义 $\mathcal{A}$ 中对象的余真右 Gorenstein 内射分解, 且由文献 [7, 命题 2.7, 引理 2.3] 的对偶知 $\mathcal{A}$ 中每个 Gorenstein 内射维数有限的对象都有余真右 Gorenstein 内射分解. 于是对任意的 $N \in \widetilde{\mathcal{GI}}$, 任意的 $M \in \mathcal{A}$ 及 $i \geq 0$, 可以合理地定义 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{GI}}(M, N)$.

命题 3.3 (1) 设 $\mathcal{A}$ 中的对象 M 有有限投射维数, 则对任意的 $N \in \mathcal{A}$ 及任意的 $i \geq 0$, $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{GP}}(M, N) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, N)$.

(2) 设 $\mathcal{A}$ 中的对象 N 有有限内射维数, 则对任意的 $M \in \mathcal{A}$ 及任意的 $i \geq 0$, $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{GI}}(M, N) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, N)$.

证 (1) 设 $\mathrm{pd}M = n < \infty$, 则 M 有长度为 n 的投射分解

$$P_n \rightarrowtail \cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \twoheadrightarrow M.$$

设 $0 \leq i \leq n-1$, 则短正合序列 $K_{i+1} \rightarrowtail P_i \twoheadrightarrow K_i$ 中每一项都有有限投射维数. 设 G 是 $\mathcal{A}$ 中的一个 Gorenstein 投射对象, 用 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G, -)$ 作用在上述短正合序列上, 由文献 [7, 引理 2.3] 知序列

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G, K_{i+1}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G, P_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G, K_i) \to 0$$

正合. 这表明 M 的投射分解是 M 的真左 Gorenstein 投射分解. 故对任意的 $N \in \mathcal{A}$ 及任意的 $i \geq 0$, $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{GP}}(M, N) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, N)$.

(2) 对偶地可以证明.

定理 3.4 设 $M, N \in \mathcal{A}$. 若 M 的 Gorenstein 投射维数有限, N 的 Gorenstein 内射维数有限, 则对任意的 $i \geq 0$, $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{GP}}(M, N) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{GI}}(M, N)$.

证 设 $\mathrm{Gpd}M < \infty$, 则由文献 [7, 命题 2.7] 知 M 有真左 Gorenstein 投射分解 $\mathbf{G} \twoheadrightarrow M$, 且存在 $\mathcal{A}$ 中的短正合序列 $K_1 \overset{f}{\rightarrowtail} G_0 \overset{g}{\twoheadrightarrow} M$, 其中 $G_0 \in \mathcal{GP}$, $\mathrm{pd}K_1 = \mathrm{Gpd}M - 1$. 设 H 是 $\mathcal{A}$ 中的 Gorenstein 内射对象, 则存在 $\mathcal{A}$ 中的短正合序列 $H' \overset{s}{\rightarrowtail} E \overset{t}{\twoheadrightarrow} H$, 其中 $E \in \mathcal{I}$, $H' \in \mathcal{GI}$. 因为 K_1 的投射维数有限, 所以由引理 2.6 知 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(K_1, H') = 0$. 故序列

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K_1, H') \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K_1, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K_1, H) \to 0$$

正合. 于是对任意 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K_1, H)$, 存在 $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K_1, E)$, 使得 $\alpha = t\beta$. 又因为 $E \in \mathcal{I}$, 所以序列

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G_0, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K_1, E) \to 0$$

正合. 故存在 $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G_0, E)$, 使得 $\beta = \gamma f$. 因此有以下交换图

$$\begin{tikzcd} & K_1 \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, dashed, "\beta"] & G_0 \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dashed, "\gamma"] & M \\ H & E \arrow[l, "t"] & H' \arrow[l, "s"] & \end{tikzcd}$$

令 $\delta = t\gamma$. 则 $\delta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G_0, H)$, 且 $\alpha = \delta f$. 所以

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, H) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G_0, H) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K_1, H) \to 0$$

正合. 继续该过程可知 M 的 Gorenstein 投射分解 $\mathbf{G} \twoheadrightarrow M$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\,-, \mathcal{GI})$ - 正合的. 同理可以证明 N 的余真右 Gorenstein 内射分解 $N \rightarrowtail \mathbf{H}$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{GP},\ -)$ - 正合的. 于是有交换图

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,H^0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,H^1) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G_0,N) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G_0,H^0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G_0,H^1) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G_1,N) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G_1,H^0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G_1,H^1) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{tikzcd}$$

其中除第一行和第一列外, 其他行和列均正合. 由文献 [11, 命题 1.4.16] 知, 对任意的 $i \geq 0$, $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{GP}}(M, N) = \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{G}, N)) \cong \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \mathbf{H})) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{GI}}(M, N)$. 定理证毕.

由定理 3.4, 对 $M, N \in \mathcal{A}$, 若 $\mathrm{Gpd}M < \infty$, $\mathrm{Gid}N < \infty$, 则记

$$\mathcal{G}\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, N) := \ \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{GP}}(M, N) \ \cong \ \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{GI}}(M, N).$$

称 $\mathcal{G}\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(-,-)$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,-)$ 的 Gorenstein 导出函子.

命题 3.5 设 $\sup\{\mathrm{Gid}N \mid N \in \mathcal{A}\} < \infty$, $M \in \widetilde{\mathcal{GP}}$, 则对任意的 $n \geq 0$, 下列条件等价

(1) $\mathrm{Gpd}M \leq n$.

(2) 对任意的 $N \in \mathcal{A}$ 和任意的 $i > 0, \mathcal{G}\mathrm{Ext}^{n+i}_{\mathcal{A}}(M, N) = 0$.

(3) 对任意的 $N \in \mathcal{A}, \mathcal{G}\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{A}}(M, N) = 0$.

(4) 对任意的 $Q \in \mathcal{P}, \mathcal{G}\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{A}}(M, Q) = 0$.

证 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) 显然. 下证 (4) $\Rightarrow$ (1).

设 Q 是 $\mathcal{A}$ 中的投射对象, 由命题 2.7 知 $\mathrm{id}Q = \mathrm{Gid}Q$. 因为 $\sup\{\mathrm{Gid}N \mid N \in \mathcal{A}\} < \infty$, 所以 $\mathrm{id}Q = \mathrm{Gid}Q < \infty$. 由命题 3.3 知 $\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{A}}(M, Q) \cong \mathcal{G}\mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathcal{A}}(M, Q) = 0$. 由命题 2.8 知 $\mathrm{Gpd}M \leq n$.

对偶地有

命题 3.6 设 $\sup\{\mathrm{Gpd}N \mid N\in\mathcal{A}\}<\infty$, $N\in\widetilde{\mathcal{GI}}$, 则对任意的 $n\geq 0$, 下列条件等价

(1) $\mathrm{Gid}N\leq n$.

(2) 对任意的 $M\in\mathcal{A}$ 和任意的 $i>0$, $\mathcal{G}\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+i}(M,N)=0$.

(3) 对任意的 $M\in\mathcal{A}$, $\mathcal{G}\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(M,N)=0$.

(4) 对任意的 $E\in\mathcal{I}$, $\mathcal{G}\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^{n+1}(E,N)=0$.

参 考 文 献

[1] Enoch E E, Jenda O M G. Gorenstein injective and projective modules[J]. Math. Z., 1995, 220: 611–633.

[2] Bennis D, Mahdou N. Global Gorenstein dimensions[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2010, 138: 461–465.

[3] Holm H. Gorenstein derived functors[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2004, 132: 1913–1923.

[4] Asadollahi J, Salarian Sh. Gorenstein objects in triangulated categories[J]. J. Algebra, 2004, 281: 264–286.

[5] Asadollahi J, Salarian Sh. Tate cohomology and Gorensteinness for triangulated categories[J]. J. Algebra, 2006, 299: 480–502.

[6] Ren Wei, Liu Zhongkui. Gorenstein homological dimensions for triangulated categories[J]. J. Algebra, 2014, 410: 258–276.

[7] Wang Zhicheng. Gorensteinness and Tate cohomology in exact categories[J]. Chin. Quart. J. of Math., 2015, 30(1): 79–92.

[8] Bühler T. Exact categories[J]. Expo. Math., 2010, 28: 1–69.

[9] 章璞. 三角范畴与导出范畴 [M]. 北京: 科学出版社, 2015.

[10] Holm H. Gorenstein homological dimensions[J]. J. Pure. Appl. Algebra., 2004, 189: 167–193.

[11] Enoch E E, Jenda O M G. Relative homological algebra[M]. New York: Walter de Gruyter, 2000.

GLOBAL GORENSTEIN DIMENSION OF EXACT CATEGORIES

GUO Jing-ge[1], WANG Jun-fu[2], ZHAO Ren-yu[1]

(*1.College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China*)

(*2. School of Science, Changzhou Institute of Technology, Changzhou 213032, China*)

Abstract: Let $\mathcal{A}$ be an exact category with enough projectives and injectives. In this paper, we study global Gorenstein dimension of $\mathcal{A}$ and Gorenstein derived funtors in $\mathcal{A}$. By using homological methods, it is shown that if $\mathcal{A}$ has countable direct sums and countable direct products, then $\sup\{\mathrm{Gpd}M \mid M\in\mathcal{A}\}=\sup\{\mathrm{Gid}M \mid M\in\mathcal{A}\}$. We also prove that $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{GP}}(M,N)\cong\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{GI}}(M,N)$ for any objects M, N in $\mathcal{A}$ with $\mathrm{Gpd}M<\infty$, $\mathrm{Gid}N<\infty$ and any $i\geq 0$.

Keywords: exact category; global Gorenstein dimension; Gorenstein derived functor

2010 MR Subject Classification: 18E10; 18G05; 18G10; 18G20