Vol. 40 (2020)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

S^3 中等参曲面的两个特征

方建波 [1], 梁 林 [2]

(1. 贵州财经大学数学与统计学院, 贵州 贵阳 550025)
(2. 楚雄师范学院人事处, 云南 楚雄 675000)

摘 要: 本文研究了三维球空间 $\mathbb{S}^3$ 中等参曲面. 利用活动标架法, 获得了 $\mathbb{S}^3$ 中关于等参曲面特征的两个结果. 推广了三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 和三维双曲空间中等参曲面的相关结果.

关键词: 三维球空间; 等参曲面; 高斯曲率; 平均曲率
MR(2010) **主题分类号**: 53A10; 53B20 **中图分类号**: O186.12
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2020)04-0446-05

1 引言

等参超曲面是高维微分几何中非常重要的研究对象, 在三维空间称为等参曲面, 这些曲面是一些平行曲面族. 最简单的情况, 就是一个点波源诱发的球面波, 波前就是同心球面族; 然后是一个线波源, 诱发的同轴柱面族; 或者是一个面波源诱导的平行平面族. 在三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 平行曲面之间的性质研究已出现在相关文献中, 参见文献 [1]. 在三维双曲空间 $\mathbb{H}^3$ 中, 平行曲面族的相关特征可参看文献 [2, 3]. 自然的想法是, 在三维球空间中, 平行曲面族之间又有些什么样的特征? 本文将给出一个初步的探讨.

2 S^3 中的平行曲面的曲率

设 $x: M^2 \to S^3(c)$ 为三维球空间中的曲面, e_i 是 x 的局部单位切标架, ω_i 为其对偶标架, e_3 为 x 的单位法向量, 做 M 的平行曲面族 $\{M_t\}$ 为

$$x_t = x\cos t - e_3 \sin t, \quad -\epsilon < t < \epsilon. \tag{2.1}$$

为方便起见, 我们约束指标范围 $1 \le i, j \le 2$. 对于 x 而言, 有

$$\begin{cases} dx = \omega_i e_i, \\ de_i = \omega_{ij} e_j + h_{ij}\omega_j e_3 - c\omega_i x, \\ de_3 = -h_{ij}\omega_j e_i, \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 h_{ij} 为 M 的第二基本形式的系数. 对 (2.1) 外微分并利用 (2.2) 可得

$$dx_t = (\omega_i \cos t + h_{ij}\omega_j \sin t)e_i, \tag{2.3}$$

*收稿日期: 2020-03-23 接收日期: 2020-05-08
基金项目: 本文由云南省科技厅应用基础研究青年项目基金资助 (2016FD084).
作者简介: 方建波 (1983–), 男, 四川广安, 副教授, 主要研究方向: 整体微分几何与几何分析.

即 $\{e_i\}$ 也是 $T_{x_t}M_t$ 的标准基, 其对偶基为

$$\omega_i^t = (\cos t\delta_{ij} + \sin th_{ij})\omega_j. \tag{2.4}$$

而

$$e_3^t = x\sin t + e_3\cos t \tag{2.5}$$

为 x_t 的单位法向量. 一方面,

$$de_3^t = (\omega_i \sin t - h_{ij}\omega_j \cos t)e_i; \tag{2.6}$$

另一方面,

$$de_3^t = -h_{ik}^t\omega_k^t e_i = -h_{ik}^t(\cos t\delta_{kj} + \sin th_{kj})\omega_j e_i. \tag{2.7}$$

比较 (2.6) 和 (2.7) 式可得

$$h_{ik}^t(\cos t\delta_{kj} + \sin th_{kj}) = h_{ij}\cos t - \delta_{ij}\sin t. \tag{2.8}$$

引理 2.1 S^3 中的平行曲面 M_t 的主曲率为

$$\lambda_i(t) = \cot(\theta_i + t), \tag{2.9}$$

其中 θ_i 由 $\cot\theta_i = \lambda_i$ 确定.

证 由 (2.8) 式, 令 $h_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$ 可得

$$\lambda_i^t = \frac{\cos\theta_i\cos t - \sin\theta_i\sin t}{\sin\theta_i\cos t + \cos\theta_i\sin t} = \frac{\cos(\theta_i + t)}{\sin(\theta_i + t)} = \cot(\theta_i + t).$$

为便于主要定理的证明, 我们需要下面的引理.

引理 2.2 设 $x: M^2 \to S^3(c)$ 是三维球面上的光滑曲面, λ_1, λ_2 是曲面上的两个主曲率, 则

(1) 两个主曲率 λ_1, λ_2 是曲面上的连续函数;

(2) 两个主曲率 λ_1, λ_2 是曲面上在非脐点处的光滑函数.

证 现取曲面 x 的局部参数化 $(U, u, v) \in M^2$, $x: U \to S^3$, $x = x(u, v) \in S^3$. 它的诱导度量和第二基本形式局部上分别表示为

$$ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2,\ II = h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2.$$

由于曲面的光滑性, 因此度量张量的系数 $\{g_{11}, g_{12}, g_{22}\}$ 和第二基本形式的系数 $\{h_{11}, h_{12}, h_{22}\}$ 都是曲面 x 上关于参数 u, v 的光滑函数. 这样矩阵

$$A = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

是两个光滑矩阵. 既然 A 是正定矩阵, 那么 $C = BA^{-1}$ 是一个光滑矩阵. 由于曲面上的高斯曲率 K 和平均曲率 H 可以表达为

$$K = |C|,\quad H = \mathrm{tr}(C).$$

这样曲面上的高斯曲率 K 和平均曲率 H 都是曲面上的光滑函数, 即是参数 u,v 的光滑函数.

现设 λ_1,λ_2 是曲面上的两个主曲率, 则 $\lambda_1+\lambda_2=2H,\quad \lambda_1\lambda_2=K$, 从而有

$$\lambda_1=H+\sqrt{H^2-K},\quad \lambda_2=H-\sqrt{H^2-K}.$$

注意到 $\sqrt{H^2-K}$ 在 $H^2-K>0$ 处是光滑的, 即在非脐点处主曲率是光滑的, 从而引理得证.

3 主要结论及证明

定理 3.1 M 有常主曲率的充要条件是 $\sum\limits_{i=1}^{2}\lambda_i^k(t)$ 只是 t 的函数 $(k=1,2,3)$.

证 必要性是显然的. 故只需证明充分性即可, 先证明结论对 $k=3$ 时成立. 设

$$a(t)=\sum_{i=1}^{2}\cot^3(\theta_i+t)=\sum_{i=1}^{2}\lambda_i^3(t). \tag{3.1}$$

对 (3.1) 式关于 t 求导, 得

$$\begin{cases} a^{'}(t)=-3\sum\limits_{i=1}^{2}\left(\lambda_i^4(t)+\lambda_i^2(t)\right), \\ a^{''}(t)=3\sum\limits_{i=1}^{2}\left(4\lambda_i^5(t)+6\lambda_i^3(t)+2\lambda_i(t)\right), \\ a^{'''}(t)=-6\sum\limits_{i=1}^{2}\left(10\lambda_i^6(t)+19\lambda_i^4(t)+10\lambda_i^2(t)+1\right). \end{cases} \tag{3.2}$$

在 (3.1) 和 (3.2) 式中令 $t=0$, 从而得

$$\lambda_1^3+\lambda_2^3=c_1, \tag{3.3}$$

$$\lambda_1^4+\lambda_2^4+\lambda_1^2+\lambda_2^2=c_2, \tag{3.4}$$

$$4(\lambda_1^5+\lambda_2^5)+6(\lambda_1^3+\lambda_2^3)+2(\lambda_1+\lambda_2)=c_3, \tag{3.5}$$

$$10(\lambda_1^6+\lambda_2^6)+19(\lambda_1^4+\lambda_2^4)+10(\lambda_1^2+\lambda_2^2)+1=c_4. \tag{3.6}$$

由 (3.3) 和 (3.5) 式得

$$2(\lambda_1^5+\lambda_2^5)+(\lambda_1+\lambda_2)=c_5. \tag{3.7}$$

再由 (3.4) 和 (3.6) 式可得

$$10(\lambda_1^6+\lambda_2^6)-9(\lambda_1^2+\lambda_2^2)=c_6. \tag{3.8}$$

上面的 $c_p,\ p=1,2,\cdots,6$ 为常数.

由引理 2.2 知, M 上的主曲率 λ_i 是局部坐标 u,v 的函数, 因此在 (3.3) 和 (3.4) 式中分别对 u,v 求偏导数可得

$$\begin{cases} \lambda_1^2\frac{\partial\lambda_1}{\partial u}+\lambda_2^2\frac{\partial\lambda_2}{\partial u}=0, \\ \lambda_1^2\frac{\partial\lambda_1}{\partial v}+\lambda_2^2\frac{\partial\lambda_2}{\partial v}=0, \\ \lambda_1(2\lambda_1^2+1)\frac{\partial\lambda_1}{\partial u}+\lambda_2(2\lambda_2^2+1)\frac{\partial\lambda_2}{\partial u}=0, \\ \lambda_1(2\lambda_1^2+1)\frac{\partial\lambda_1}{\partial v}+\lambda_2(2\lambda_2^2+1)\frac{\partial\lambda_2}{\partial v}=0. \end{cases} \tag{3.9}$$

(3.9) 式是以 $\frac{\partial\lambda_1}{\partial u},\frac{\partial\lambda_2}{\partial u},\frac{\partial\lambda_1}{\partial v},\frac{\partial\lambda_2}{\partial v}$ 为变元的齐次方程组, 它的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \\ \lambda_1(2\lambda_1^2+1) & \lambda_2(2\lambda_2^2+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1(2\lambda_1^2+1) & \lambda_2(2\lambda_2^2+1) \end{vmatrix} = -(\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)(1-2\lambda_1\lambda_2))^2. \tag{3.10}$$

当

$$\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)(1-2\lambda_1\lambda_2)\neq 0 \tag{3.11}$$

时, λ_i 为常数.

同理, 对 (3.3) 和 (3.7) 式做类似于 (3.9) 和 (3.10) 式的讨论可知, 当

$$(\lambda_1^2-\lambda_2^2)(10\lambda_1^2\lambda_2^2-1)\neq 0 \tag{3.12}$$

时, λ_i 为常数.

综合 (3.11) 和 (3.12) 式可得, 当 $\lambda_1^2-\lambda_2^2\neq 0$ 时, λ_i 为常数. 若 $\lambda_1=\lambda_2$, 显然 λ_i 为常数. 因此只需证明当 $\lambda_1+\lambda_2=0$ $(\lambda_i\neq 0)$ 时, λ_i 为常数. 事实上, 将 $\lambda_2=-\lambda_1$ 代入 (3.4) 和 (3.8) 式得

$$\begin{cases} \lambda_1^4+\lambda_1^2=\frac{1}{2}c_2, \\ 10\lambda_1^6-9\lambda_1^2=\frac{1}{2}c_2. \end{cases} \tag{3.13}$$

微分 (3.13) 式可得方程组

$$\begin{cases} (2\lambda_1^2+1)d\lambda_1=0, \\ (10\lambda_1^4-3)d\lambda_1=0. \end{cases} \tag{3.14}$$

由 (3.14) 式可知 $2\lambda_1^2+1=0$ 与 $10\lambda_1^4-3=0$ 无公共解, 则必然有 $d\lambda_1=0$, 即 λ_1 为常数, 由 (3.3) 式即得 λ_2 为常数. $k=3$ 的情形证毕.

下证 $k=2$ 的情形. 令

$$b(t)=\sum_{i=1}^{2}\lambda_i^2(t). \tag{3.15}$$

对 (3.15) 式两边关于 t 求二阶导数得

$$b''(t)=6\sum_{i=1}^{2}\lambda_i^4(t)+8\sum_{i=1}^{2}\lambda_i^2(t)+4. \tag{3.16}$$

在 (3.15) 和 (3.16) 式中令 $t=0$ 得

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2=c_7,\ \lambda_1^4+\lambda_2^4=c_8,$$

这里 c_7,c_8 为常数. 由 $\lambda_1^4+\lambda_2^4=\frac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)^2+\frac{1}{2}(\lambda_1^2-\lambda_2^2)^2$, 可知 λ_1^2 和 λ_2^2 是常数, 从而 λ_1 和 λ_2 是常数. $k=1$ 的情形类似于 $k=2$, 此处不再赘述.

定理 3.2 设 $\lambda_1\lambda_2\neq 0$, 且 $\lambda_1(1-\lambda_1^2)(1+\lambda_2^4)\neq\lambda_2(1-\lambda_2^2)(1+\lambda_1^4)$, 则 M 具有常主曲率的充要条件是每个 M_t 有常值的高斯曲率.

证 必要性是显然的, 下证充分性即可. 令 $G(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)$, 为 M_t 的高斯曲率, 因为 $\lambda_1\lambda_2\neq 0$, 所以当 $|t|$ 充分小时, 由引理 2.1 可知 $G(t)\neq 0$. 作函数

$$\log|G(t)|=\log|\lambda_1(t)\lambda_2(t)|, \tag{3.17}$$

上式两边对 t 求导得

$$\frac{G'(t)}{G(t)}=\sum_{i=1}^{2}\frac{\lambda_i'(t)}{\lambda_i(t)}. \tag{3.18}$$

令 $c(t)=\frac{G'(t)}{G(t)}$, 则可知

$$c(t)=-\sum_{i=1}^{2}\lambda_i(t)-\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\lambda_i(t)}, \tag{3.19}$$

$$c'(t)=\sum_{i=1}^{2}\lambda_i^2(t)-\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\lambda_i^2(t)}. \tag{3.20}$$

在 (3.19) 和 (3.20) 式中令 $t=0$ 得

$$-\lambda_1-\lambda_2-\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}=c_9,\quad \lambda_1^2+\lambda_2^2-\frac{1}{\lambda_1^2}-\frac{1}{\lambda_2^2}=c_{10}, \tag{3.21}$$

这里 c_9, c_{10} 是常数, 对 (3.21) 式做类似于 (3.9) 和 (3.10) 式的讨论可知, 在 $\lambda_1(1-\lambda_1^2)(1+\lambda_2^4)\neq\lambda_2(1-\lambda_2^2)(1+\lambda_1^4)$ 的条件下, λ_1,λ_2 是常数, 证毕.

参 考 文 献

[1] 姜国英, 黄宣国. 微分几何一百例 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1992.

[2] 许志才. 三维双曲空间中平行曲面族的两个定理 [J]. 数学杂志, 1992, 12(3): 241–244.

[3] 潮小李. 关于三维双曲空间中的平行曲面族的一个定理 [J]. 东南大学学报，1999, 29(3): 144–146.

TWO CHARACTERISTICS OF ISOPARAMETRIC SURFACE IN S^3

FANG Jian-bo[1] , LIANG Lin[2]

(*1.School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China*)

(*2.Personnel Division , Chuxiong Normal University, Chuxiong 675000, China*)

Abstract: This paper deals with the relating problem of isoparametric surfaces in three-dimensional sphere space $\mathbb{S}^3$. By using the method of moving frame, two results associated with the characteristics of isoparametric surfaces in $\mathbb{S}^3$ are obtained, which generalizes the related results of three dimensional euclidean space $\mathbb{R}^3$ and three dimensional hyperbolic space.

Keywords: three dimensional sphere space; isoparametric surface; Gauss curvature; the mean curvature

2010 MR Subject Classification: 53A10; 53B20