

图像去噪的混合正则化 LSQR 算法

闵 涛, 韩 选

(西安理工大学理学院应用数学系, 陕西 西安 710054)

摘 要: 本文研究了图像去模糊去噪问题. 利用正则化技术结合 Krylov 子空间方法, 提出了混合正则化 LSQR 算法. 实验结果表明该算法有效改善了问题的不适定性, 获得了逼真度较高的复原图像.

关键词: 图像; 恢复; Krylov; 正则化; LSQR 算法

MR(2010) 主题分类号: 45Q05; 65F10; 65F22

中图分类号: O175.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2020)03-0332-09

1 引言

图像恢复问题是一类典型的不适定问题, 它可以不满足一个或多个 Hadamard 条件, 原因在于成像系统本身的特性或观测数据的误差, 所以图像恢复的过程无论是理论分析还是数值模拟都存在着一一定的困难. 目前众多学者对图像恢复问题进行了深入的研究, 主要的恢复算法分为直接法和迭代法两大类. 由于直接法存储需求和计算量都比较大, 且难以控制, 所以迭代法就成为首选. 其中与正则化技术相结合的 Krylov 子空间方法备受广大学者青睐, 当这种 Krylov 子空间方法的天然正则性并不足以获取足够的信息时, 通过添加额外的正则化来获得足够好的近似解, 这就构成了混合正则化方法的基本思想. 1981 年, O'Leary 和 Simmons^[1] 最先提出了混合方法, 先利用 Lanczos 双对角化过程将问题投影成低维问题, 再对小问题进行 TSVD 正则化. 2001 年, Hanke^[2] 也讨论了基于 Lanczos 方法的混合正则化问题. 2011 年, 赵苗苗^[3] 等提出了图像恢复的正则化 GMRES 方法. 2014 年, Novati 等^[4] 提出用于图像恢复的自适应 Arnoldi-Tikhonov 正则化方法.

考虑到 Tikhonov 正则化方法^[5] 在求解不适定问题中具有明显的优势, 并充分利用 LSQR 算法在数值计算上收敛快、稳定的优点, 本文将其与正则化技术相结合应用于图像恢复问题中.

2 图像退化模型与 Krylov 子空间方法

图像在形成、传输和记录过程中, 由于很多原因使图像的质量变坏, 称为图像退化^[6]. 第一类 Fredholm 积分方程常用于描述图像的线性退化模型, 表达式为

$$\int_a^b \int_c^d K(u, v, x, y) f(x, y) dx dy + \eta(u, v) = g(u, v), \quad (2.1)$$

*收稿日期: 2019-08-10

接收日期: 2019-11-28

基金项目: 国家自然科学基金 (51679186); 陕西省自然科学基金 (2019JM-284).

作者简介: 闵涛 (1963-), 男, 陕西西安, 教授, 主要研究方向: 数学物理方程反问题, 科学与工程计算与计算机模拟.

其中 $g(u, v)$ 是观察到的图像, $f(x, y)$ 为原始图像, $\eta(u, v)$ 为加性随机噪声, 积分方程的核函数 $K(u, v, x, y)$ 称为点扩散函数 (PSF). 点扩散函数有多种类型, 本文中所使用的核函数为高斯核, 形如

$$K(u, v, x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(u-x)^2 + (v-y)^2}{2\sigma^2}} = \eta_\sigma(u-x)\eta_\sigma(v-y),$$

其中 $\eta_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$, $\sigma = 0.02$. 由于很难求出 (2.1) 式的解析解, 本文考虑求其数值解, 为此将 (2.1) 积分方程离散化. 所谓积分方程离散化指的就是将积分方程转化为可以数值求解的线性方程组, 从而得到积分方程的数值解. 文献 [7] 中较为完整的叙述了用于积分方程离散的多种求积法则 (如矩形公式、梯形公式等等), 在这里, 选用中点公式对 (2.1) 进行离散,

$$\int_0^1 \varphi(t) dt \approx \sum_{j=1}^n w_j \varphi(t_j), \quad (2.2)$$

其中 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 表示对应求积法则的横坐标, $w_1, w_2, \dots, w_n$ 为对应的权重. 对于中点公式有

$$t_j = \frac{j-0.5}{n}, w_j = \frac{1}{n}, j = 1, 2, \dots, n.$$

遵循该求积法则, 可以将 (2.1) 二维第一类 Fredholm 积分方程离散化. 令 $x, y \in [a, b] \times [c, d]$, $u, v \in [a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$, 将积分区间 $[a, b] \times [c, d]$ 分为 $m1 \times n1$ 等份, $[a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$ 分为 $m2 \times n2$ 等份, 可得到

$$g(u_p, v_q) = \int_a^b \int_c^d K(u_p, v_q, x, y) f(x, y) dx dy \approx \sum_{j=1}^{n1} \sum_{i=1}^{m1} K(u_p, v_q, x_i, y_j) f(x_i, y_j) w_i w'_j, \quad (2.3)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, m1$; $j = 1, 2, \dots, n1$, $p = 1, 2, \dots, m2$; $q = 1, 2, \dots, n2$. 当用矩阵表示这些方程时, 得到了线性系统

$$Af = g, \quad (2.4)$$

其中 A 是 $(m2 \times n2) \times (m1 \times n1)$ 矩阵, f 和 g 分别表示为 $m1 \times n1$ 维, $m2 \times n2$ 维的列向量. 这意味着 A 的行将取决于参数 u 和 v 的离散, A 的列将取决于 x 和 y 的离散. A, f 和 g 的元素分别为 $A = K(u_p, v_q, x_i, y_j) w_i w'_j$, $f = f(x_i, y_j)$ 以及 $g = g(u_p, v_q)$, 其中 $i = 1, 2, \dots, m1$; $j = 1, 2, \dots, n1$, $p = 1, 2, \dots, m2$; $q = 1, 2, \dots, n2$.

由于 A 是大规模奇异矩阵, 具有严重的病态性, 使得计算大规模矩阵的奇异值分解 (SVD) 或逆需要很大的运算量和存储量, 利用常见的截断奇异值分解方法 (TSVD)、求逆等直接法求解大规模的问题是不实际的. 目前求解 $Af = g$ 的大规模稀疏线性方程组的首选方法是 Krylov 子空间方法 [8], 其基本思想是在一个具有更小维数的子空间 $K \subset R^n$ 中寻找满足精度要求的近似解. 因此, 这类方法也可以看作是投影方法, 即寻找解析解在子空间中的投影.

3 混合正则化 LSQR 方法

求解线性系统 (2.4) 等价于求解最小二乘问题 [9]

$$\min_{f \in R^n} \|Af - g\|, \quad (3.1)$$

核心思想是求出的解向量 f 能够使矩阵方程两边的误差平方和最小化. 事实上, 最小二乘问题 (3.1) 也等价于下面的正规方程

$$A^T A f = A^T g. \quad (3.2)$$

将原方程 $Af = g$ 转化为正规方程的一个最大缺点是: 条件数是原问题的平方. 如果原问题的条件数本身就比较大, 则正规方程的条件数就更大, 迭代求解时收敛会更慢, 而且舍入误差的影响也更明显. 所以, 如果系数矩阵条件数比较大, 则不建议直接求解正规方程. 在这种情况下, 可以采用 Paige 和 Saunders^[10] 提出的 LSQR 方法.

注意到, 原线性方程组等价于下面的鞍点问题

$$\begin{bmatrix} I & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A\tilde{f} = \tilde{g}, \quad (3.3)$$

其中 $r = g - Af$. 选取初值 $[0, 0]^T$, 然后采用 Lanczos 方法构造 Krylov 子空间 $K(A, g_0) = \text{span}\{g_0, Ag_0, \dots, A^{m-1}g_0\}$ 的一组标准正交基, 其中 $g_0 = [g, 0]^T$. 通过直接计算可知

$$v_1 = \frac{1}{\|g\|_2} \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \frac{1}{\|A^T g\|_2} \begin{bmatrix} 0 \\ A^T g \end{bmatrix}.$$

依次类推, 可以发现这样一个规律: 基向量 v_{2k-1} 和 v_{2k} 分别具有下面的形式

$$v_{2k-1} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix}, v_{2k} = \begin{bmatrix} 0 \\ * \end{bmatrix}.$$

因此, 引入另外两组单位向量 $\{u_k\}$ 和 $\{w_k\}$ 来表示这组基, 即

$$v_{2k-1} = \begin{bmatrix} u_k \\ 0 \end{bmatrix}, v_{2k} = \begin{bmatrix} 0 \\ w_k \end{bmatrix}, k = 1, 2, \dots.$$

记 $\beta = \|g\|_2$, 则对称鞍点问题 (3.3) 的 Lanczos 过程可描述为

$$\begin{cases} \beta u_1 = g, \alpha_1 w_1 = A^T u_1, \\ \beta_k u_{k+1} = Aw_k - \alpha_k u_k \\ \alpha_{k+1} w_{k+1} = A^T u_{k+1} - \beta_k w_k \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.4)$$

其中 $\beta_k > 0$ 和 $\alpha_{k+1} > 0$ 的选取是确保 $\|u_{k+1}\|_2 = \|w_{k+1}\|_2 = 1$, 即

$$\beta_k = \|Aw_k - \alpha_k u_k\|_2, \alpha_{k+1} = \|A^T u_{k+1} - \beta_k w_k\|_2.$$

上面的这个过程实际上就是一个 Lanczos 双对角化过程, 是由 Golub 和 Kahan^[11] 提出来的. 记 $U_m = [u_1, u_2, \dots, u_m]$, $W_m = [w_1, w_2, \dots, w_m]$, 则有

$$AW_m = U_m \tilde{H}_m, AU = W_m \tilde{H}_m^T + \alpha_m w_m e_{m+1}^T, \quad (3.5)$$

其中 $e_{m+1} = [0, 0, \dots, 1]^T \in R^{m+1}$,

$$\tilde{H}_m = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & & & \\ & \beta_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \alpha_m & \\ & & & \beta_m & \end{bmatrix} \in R^{(m+1) \times m},$$

且 $U_{m+1}^T U_{m+1} = I_{m+1}$, $W_m^T W_m = I_m$. 所以矩阵

$$\begin{bmatrix} u_1 & 0 & u_2 & 0 & \cdots & 0 & u_m \\ 0 & w_1 & 0 & w_2 & \cdots & w_{m-1} & 0 \end{bmatrix},$$

或者

$$\begin{bmatrix} U_{m+1} & 0 \\ 0 & W_m \end{bmatrix}$$

的列向量组构成了 $K_{2m+1}(A, g_0)$ 的一组基.

下面, 在子空间 $K_{2m+1}(A, g_0)$ 中寻找方程组 (3.3) 的近似解, 记为 $[\tilde{f}, \tilde{r}]^T$, 使得原方程组的残量范数 (即 $\|g - A\tilde{f}\|_2$) 达到最小.

首先, 将 $[\tilde{f}, \tilde{r}]^T$ 写成

$$\begin{bmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{m+1} & 0 \\ 0 & W_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{m+1} \\ y_m \end{bmatrix},$$

或者

$$\begin{cases} \tilde{r} = U_{m+1} t_{m+1}, \\ \tilde{f} = W_m y_m. \end{cases}$$

由 (3.5) 式可知

$$\begin{aligned} g - A\tilde{f} &= \beta u_1 - AW_m y_m \\ &= U_{m+1}(\beta e_1) - U_{m+1} \tilde{H}_m y_m \\ &= U_{m+1}(\beta e_1 - \tilde{H}_m y_m). \end{aligned} \quad (3.6)$$

设 T_m 是 Lanczos 方法^[12]作用到正规方程 $A^T A f = A^T g$ 上得到的对称三对角矩阵, 则可以证明, $\tilde{H}_m$ 就是 T_m 的双对角化因子, 即 $T_m = \tilde{H}_m^T \tilde{H}_m$. 由于 $U_{m+1}^T U_{m+1} = I_{m+1}$, 因此对 (3.6) 式取范数有

$$\|g - A\tilde{f}\|_2 = \|U_{m+1}(\beta e_1 - \tilde{H}_m y_m)\|_2 = \|\beta e_1 - \tilde{H}_m y_m\|_2, \quad (3.7)$$

所以极小化残量范数就等价于求解下面的最小二乘问题

$$\min_{y \in R^m} \|\beta e_1 - \tilde{H}_m y_m\|_2. \quad (3.8)$$

可以采用基于 Givens 变换的 QR 分解^[13]来求解该问题. 因为 $\tilde{H}_m$ 具有特殊形态, QR 分解格外简单, 仅耗费 $O(m)$ 个运算. 这就形成了完整的 LSQR 方法. 求解 $Af = g$ 时观测数据误差的放大因子是奇异值的倒数, 求解 $A^T Af = A^T g$ 时观测数据误差的放大因子是奇异值平方的倒数. 所以, 对于病态问题 LSQR 算法的效果要好, 但当数据误差较大时 LSQR 算法仍会发散. 为此, 根据 Tikhonov 正则化的思想, 通过对非满秩的矩阵 A 的协方差矩阵 $A^T A$ 的每一个对角元素加入一个很小的扰动 λ , 使得奇异的协方差矩阵 $A^T A$ 求逆变为非奇异矩阵的 $A^T A + \lambda I$ 求逆, 从而大大改善求解非满秩矩阵 $Af = g$ 的数值稳定性, 同时降低了条件数的大小. 于是得到最小二乘问题

$$\min \|Af - g\|_2^2 + \lambda \|f\|_2^2, \quad (3.9)$$

式中 $\lambda > 0$ 为正则化参数, 用于控制求解后图像的精度和平滑程度之间的平衡, 对图像恢复质量的好坏有直接的影响. 在本文中, 由于原始数据中 g 的相对误差参数 ε 可以近似计算出, 所以用 Morozov 偏差原理^[14,15]来确定正则化参数 λ . 知道 (3.9) 等价于增广法方程

$$(A^T A + \lambda I)f = A^T g, \quad (3.10)$$

简记为

$$A_1 f = g_1, \quad (3.11)$$

其中 $A_1 = A^T A + \lambda I$, $g_1 = A^T g$. 然后利用上述 LSQR 算法求解方程 (3.11), 如此便将正则化技术和 LSQR 方法结合在一起, 各取所长, 构成了求解大规模离散不适定问题的新算法—混合正则化 LSQR 算法.

根据以上叙述给出混合正则化 LSQR 算法的具体实现过程.

(1) 赋初值, 输入 A 和 g 与 M , 计算矩阵 A 的条件数 $\text{cond}(A)$, 如果 $\text{cond}(A) \geq M$ (可取 $M = 10^8$), 则转向 (2), 否则 $A_1 = A$, $g_1 = g$ 转向 (3);

(2) 完成正则化过程: 选取正则化参数 λ (本文利用 Morozov 偏差原理确定 λ 的值), 正则化 $A_1 = A^T A + \lambda I$, $g_1 = A^T g$;

(3) 进行初始化

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, \beta_1 = \|g_1\|_2, u_1 = g_1/\beta_1, \alpha_1 = \|A_1^T u_1\|_2, \\ v_1 &= A_1^T u_1/\alpha_1, w_1 = v_1, \bar{\phi}_1 = \beta_1, \bar{\rho}_1 = \alpha_1; \end{aligned}$$

(4) 对 $i = 1, 2, \dots$, 重复 (5)–(8);

(5) Lanczos 双对角化

$$\begin{aligned} w &= A_1 v_i - \alpha_i u_i, \beta_{i+1} = \|w\|_2, u_{i+1} = w/\beta_{i+1}, \\ z &= A_1^T u_{i+1} - \beta_{i+1} v_i, \alpha_{i+1} = \|z\|_2, v_{i+1} = z/\alpha_{i+1}; \end{aligned}$$

(6) 进行 QR 分解

$$\begin{aligned} \rho_i &= (\bar{\rho}_i^2 + \beta_{i+1}^2)^{1/2}, c_i = \bar{\rho}_i/\rho_i, s_i = \beta_{i+1}/\rho_i, \\ \theta_{i+1} &= s_i \alpha_{i+1}, \bar{\rho}_{i+1} = -c_i \alpha_{i+1}, \phi_i = c_i \bar{\phi}_i, \bar{\phi}_{i+1} = s_i \bar{\phi}_i; \end{aligned}$$

(7) 更新迭代求解

$$x_i = x_{i-1} + (\phi_i / \rho_i) w_i, w_{i+1} = v_{i+1} - (\theta_{i+1} / \rho_i) w_i;$$

(8) 进行收敛判别.

4 数值模拟

为了验证所提方法的可行性, 下面给出数值算例, 模拟时不妨假设原始图像 f 已知, g 可通过离散线性系统 $Af = g$ 获得, 并对 g 加入高斯白噪声, 即 $g_n = g + \varepsilon \cdot \text{randn}(n, 1)$, 其中 $\text{randn}(n, 1)$ 是服从方差为 1 均值为 0 的高斯分布, 本文取 $\varepsilon = 0.01$. 另外, 用解的相对误差 δ 和改进信噪比^[16] 描述恢复图像的逼真度, 计算公式分别为

$$\delta = \frac{\|f - \tilde{f}\|_2}{\|f\|_2}, ISNR = 10 \cdot \lg \left(\frac{\|g - f\|^2}{\|\tilde{f} - f\|^2} \right),$$

其中 g 为退化图像, f 为原始图像, $\tilde{f}$ 为恢复图像. δ 越小, $ISNR$ 越大, 图像恢复的逼真度越高, 恢复效果越好. 基于上述评价标准, 给出两个测试算法性能的算例.

算例 1 选取原始图像大小 41×41 , 本例中的矩阵 A 是利用中点公式离散积分公式所得到的, 由 Morozov 偏差原理确定正则化参数 $\lambda = 3.725e - 09$. 图 1 给出了原始图像、模糊噪声图像以及用混合正则化 LSQR 方法去模糊去噪图, 图 2 给出了 LSQR 算法、文献 [3] 中的正则化 Gmres 算法 ($tol = 0.01$) 和本文新算法的 $ISNR$ 变化曲线图, 所对应的数值实验结果见表 1.

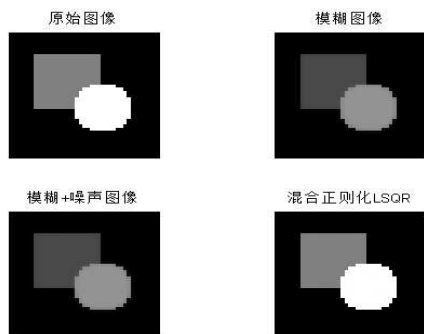


图 1: 混合正则化 LSQR 算法恢复图像

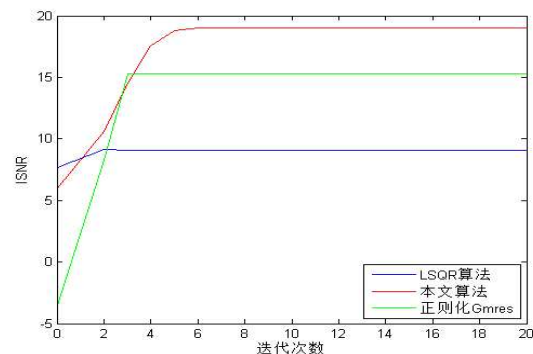


图 2: $ISNR$ 随迭代次数的变化曲线图

图 1 显示的结果说明混合正则化 LSQR 方法有效地去除了噪声和模糊, 从视觉效果来看更为清晰. 从图 2 可以得知, 提出的新算法迭代 6 次后的 $ISNR$ 值高于 LSQR 算法且趋于平稳, 这也就达到了对已有 LSQR 算法改进的目的, 而 $ISNR$ 值的提高意味着降低了噪声对信号的影响, 从而得到最优的恢复图像.

表 1: 三种算法的逼真度比较

	$ISNR$	解的相对误差	运行时间 (秒)
LSQR 算法	9.1671	0.0524	2.7984
正则化 Gmres 算法	15.2825	0.0128	2.8636
本文算法	19.0481	0.0054	0.6743

通过表 1, 显而易见的是, 本文所提出的新算法 $ISNR$ 值最高, 相对误差最小, 耗时较短. 所以新算法的数值表现总体上均优于 LSQR 算法和文献 [3] 所提出的正则化 Gmres 算法.

算例 2 选取大小为 71×71 的卫星图作为原始图像, 退化图像的模糊矩阵 A 依然利用中点公式离散积分公式所得到的, 不同的正则化参数 λ 在图像恢复时会得到不同的改进信噪比 $ISNR$, 具体见图 3. 并用 LSQR 算法、文献 [3] 中的正则化 Gmres 算法 ($\text{tol} = 0.01$) 和本文新算法的恢复效果如图 4 所示, 所对应的数值实验结果见表 2.

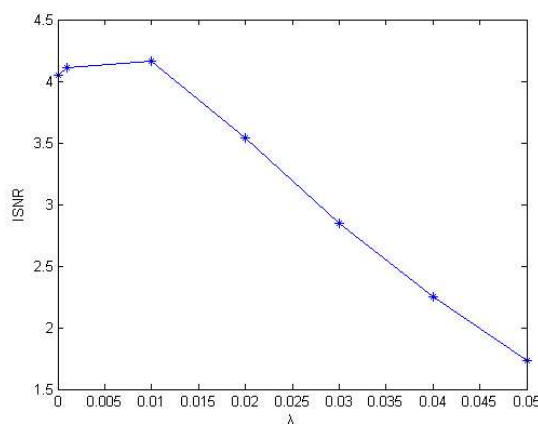
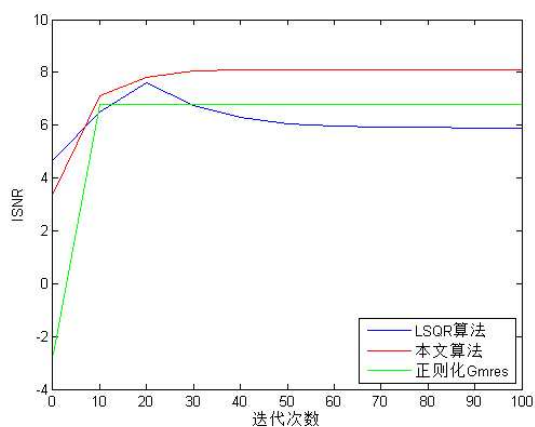
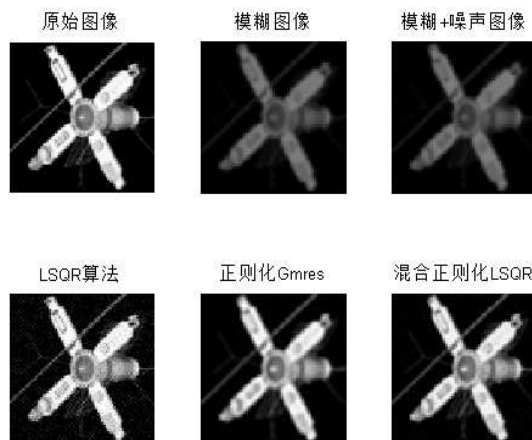
图 3: $ISNR$ 随 λ 的变化情况图 4: $ISNR$ 随迭代次数的变化曲线图

图 5: 三种算法的去模糊去噪图

由图 3 可以确定参数 λ 为 10^{-2} 时信噪比最高. 在图 4 中, 绘制了各算法的 $ISNR$ 随迭代次数的变化

情况. 显然, LSQR 算法表现出半收敛现象, 而本文算法迭代 35 次后的 $ISNR$ 值趋于平稳, 不仅有效地改善了 LSQR 算法的半收敛性, 还提高了 $ISNR$ 值, 表现出数值稳定性的优点. 图 5 可以直观地看出 LSQR 算法恢复的图像背景仍然被噪声污染严重, 导致其 $ISNR$ 值很低, 正则化 Gmres 算法恢复的卫星部分较为模糊, 相比之下本文提出的混合正则化 LSQR 方法更接近原始图像, 得到结果的图像质量较好, 表现较为稳定.

表 2: 三种算法的逼真度比较

	$ISNR$	解的相对误差	运行时间 (秒)
LSQR 算法	5.9041	0.1351	8.7378
正则化 Gmres 算法	6.7813	0.1104	6.5323
本文算法	8.1153	0.0812	9.2245

从表 2 的实验结果来看, 虽然本文提出的算法耗时略微慢点, 但是在提高 $ISNR$ 较和降低相对误差方面的表现突出, 进一步说明了本文提出的混合正则化 LSQR 算法是相对有效的.

5 结论

本文在基于投影原理的 Krylov 子空间方法的基础上, 结合 Tikhonov 正则化技术提出了一种新算法——混合正则化 LSQR 算法, 该算法不仅发挥了各自优势, 还有效克服了各自的弊端, 图像的恢复效果也令人满意. 实验结果表明, 新算法得到的图像逼真度均优于 LSQR 算法和正则化 Gmres 算法, 尤其是在改进信噪比 $ISNR$ 和相对误差方面有明显的优势, 为求解图像去模糊去噪问题提供了一个行之有效的方法.

参 考 文 献

- [1] O'Leary D P, Simmons J A. A bidiagonalization regularization procedure for large scale discretizations of ill-posed problems[J]. SIAM. J. Sci. Stat. Comput., 1981, 4(2): 474–489.
- [2] Hanke M. On Lanczos based methods for the regularization of discrete ill-posed problems[J]. BIT Numer. Math., 2001, 41(5): 1008–1018.
- [3] 闵涛, 赵苗苗, 成瑶. 图像恢复的正则化 Gmres 方法 [J]. 计算机应用, 2011, 31(8): 2201–2203.
- [4] Novati P, Russo M R. Adaptive Arnoldi-Tikhonov regularization for image restoration[J]. Numer. Algor., 2014, 65(4): 745–757.
- [5] Engl H W. Discrepancy principles for Tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rates[J]. J. Optimiz Theory App., 1987, 52(2): 209–215.
- [6] Katsaggelos A K. Digital image restoration[J]. IEEE Sign. Proc. Mag., 2016, 14(2): 24–41.
- [7] Baker, Christopher T H. The numerical treatment of integral equations[M]. Oxford: Clarendon Press, 1977.
- [8] Jan M R. Compact linear operators and Krylov subspace methods[D]. Department of Mathematics and Informatics and Mathematical Modeling Technical University of Denmark, 2001.
- [9] Mihaela C D. Regularization strategies for linear operator equations [D]. Department of Mathematics of Iowa State University, 2004.
- [10] Paige C C, Saunders M A. LSQR: an algorithm for sparse linear equations and sparse least squares[J]. ACM Trans. Math. Software, 1982, 8(1): 43–71.
- [11] Golub G, Kahan W. Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix[J]. J. SIAM Numer. Anal. Ser. B, 1965, 2(2): 205–224.
- [12] Lanczos C. An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators[J]. J. Res. Nat. Bur. Standards, 1950, 45(4): 255–282.

- [13] 徐树方, 钱江. 矩阵计算六讲 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.
- [14] Morozov V A. On regularization of ill-posed problems and selection of regularization parameter[J]. Comp. Math. Math. Phys., 1966, 6(1): 170–175.
- [15] Kunisch K. On a class of damped Morozov principle[J]. Computing, 1993, 50(3): 185–198.
- [16] Hanke M, Hansen P C. Regularization methods for large-scale problems[J]. Surv. Math. Ind., 1993, 3(4): 253–315.

HYBRID REGULARIZATION LSQR ALGORITHM FOR IMAGE DENOISING

MIN Tao¹, HAN Xuan²

*(Department of Applied Mathematics, School of Science, Xi'an University of Technology,
Xi'an 710054, China)*

Abstract: This paper is devoted to study image denoising and deblurring problems. By using regularization technology and Krylov subspace method, a hybrid regularization LSQR algorithm is proposed. The experimental results show that the algorithm can effectively improve the ill-posedness of the problem and obtain the restored image with high fidelity.

Keywords: image; recovery; Krylov; regularization; LSQR algorithm

2010 MR Subject Classification: 45Q05; 65F10; 65F22