

关于 Radon 测度的积分不等式

李华灿¹, 李群芳²

(1. 江西理工大学理学院, 江西 赣州 341000)

(2. 赣州师范高等专科学校数学系, 江西 赣州 341000)

摘要: 本文研究了满足 Dirac - 调和方程的微分形式 Radon 积分问题. 利用两种形式的 Hölder 不等式, 首先得到了作用于满足 Dirac - 调和方程的微分形式上的关于 Radon 测度的局部 Poincaré - 型不等式, 然后以此为基础, 综合运用积分技巧与 Whitney 覆盖等相关性质进一步得到 δ -John 域上全局的 Poincaré - 型不等式. 上述结果推广了微分形式的积分理论.

关键词: Dirac- 调和方程; 积分不等式; Radon 测度; 全局

MR(2010) 主题分类号: 44A12; 45E99; 46E30

中图分类号: O175.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2019)06-0899-08

1 引言

近些年, 非线性弹性理论和拟共形映射的发展促使微分形式的椭圆方程的研究取得了极大的进展, 已经从最初的 Laplace 方程扩展到了 A - 调和方程. 目前, 关于满足 A - 调和方程的微分形式的研究已取得较丰富的成果, 如 Ding, Weisz, Liu 等数学工作者们分别做出了作用于满足 A - 调和方程的微分形式的 Hardy-Littlewood - 型、Poincaré - 型以及 Caccioppoli - 型经典积分不等式^[1-5], 文献 [6-9] 进一步地做出了上述三类经典不等式的各类加权估计式. 来源于理论物理学的 Hodge-Dirac 算子, 不仅在量子力学和广义相对论中有着极为重要的作用, 还为代数学和几何学等数学分支领域的研究提供有力工具. 2015 年, Ding 和 Liu 在文献 [10] 中借助于传统的齐次 A - 调和方程 $d^*A(x, dw) = 0$ 和 Hodge-Dirac 算子得到如下形式的齐次 Dirac - 调和方程

$$d^*A(x, Dw) = 0, \quad (1.1)$$

其中 D 称为 Hodge-Dirac 微分算子, 定义 $D = d + d^*$, d 是外微分算子, d^* 是 Hodge 上的微分算子定义为 $d^* = (-1)^{n-l+1} * d *$, $*$ 是 Hodge 星算子, A 是满足特定条件的算子, 更多有关 Hodge 星算子 $*$ 、Hodge 上的微分算子 d^* 以及算子 A 的详细介绍可参见文献 [11]. 作为 A - 调和方程的衍生方程, Dirac - 调和方程的理论研究目前仍处于起步阶段, 其数学意义和实际作用还需要更深入的研究. 因此, 本文将以满足 Dirac - 调和方程的微分形式为研究对象, 首先研究作用于其上的关于 Radon 测度的局部圆域上的 Poincaré - 型不等式, 然后以此为基础证明 δ -John 域上全局的 Poincaré - 型不等式.

本文通篇假定 Ω 为 R^n 中的连通开子集, B 为球体, ρB 表示与 B 同心且 $\text{diam}(\rho B) = \rho \text{diam}(B)$ 的球体, 用 $|E|$ 来表示 R^n 中子集 E 的勒贝格测度, 文中所有积分均为勒贝格积分. 设 $g(x)$

*收稿日期: 2018-09-08

接收日期: 2018-12-29

基金项目: 国家自然科学基金 (11461032); 江西省教育厅科技项目 (GJJ180446, GJJ170566).

作者简介: 李华灿 (1985-), 男, 江西上饶, 讲师, 主要研究方向: 调和与分析.

是定义在 R^n 上非负可积函数, Radon 测度 μ 由 $d\mu = g(x)dx$ 给出, 即 $\mu(E) = \int_E g(x)dx$ 为 R^n 中子集 E 的 Radon 测度. 设 $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$ 为 R^n 上标准正交单位向量组, 用 $\Lambda^l = \Lambda^l(R^n)$ 表示由外积 $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_l}$ 所生成的 l -维向量空间, 其下标所对应的有序 l -丛 $I = (i_1, i_2, \dots, i_l), 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq n, l = 1, 2, \dots, n$. 若 $\omega = \alpha_{i_1 i_2 \dots i_l}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_l} = \alpha_I dx_I$ 是可微 l -形式, 则有

$$*\omega = *\alpha_{i_1 i_2 \dots i_l}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_l} = (-1)^{\sum(I)} \alpha_I dx_J, \quad (1.2)$$

其中 $I = (i_1, i_2, \dots, i_l), J = \{1, 2, \dots, n\} - I, \sum(I) = \frac{l(l+1)}{2} + \sum_{j=1}^l i_j$. 例如, 在 $\Lambda(R^3)$ 中有 $*dx_1 = (-1)^2 dx_2 \wedge dx_3$. 利用外微分算子 d 和 Hodge 星算子 $*$ 可定义 Hodge 上微分算子 $d^* = (-1)^{n-l+1} * d*$, 其中 $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$. 文中用 $\Lambda^l(\Omega)$ 表示余切丛的 l -次外幂, 用 $D'(\Omega, \Lambda^l)$ 表示 Ω 上可微 l -形式空间, $L^1_{\text{loc}}(\Omega, \Lambda^l)$ 表示系数局部可积的 l -形式空间. 对所有的有序 l -丛, 系数 $\alpha_I \in L^p(\Omega, R)$ 的 l -形式空间记为 $L^p(\Omega, \Lambda^l)$, 从而 $L^p(\Omega, \Lambda^l)$ 成为 Banach 空间, 其范数为

$$\|\omega\|_{p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |\omega(x)|^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_{\Omega} \left(\sum_I |\alpha_I(x)|^2 \right)^{p/2} dx \right)^{1/p}. \quad (1.3)$$

2 有界域上关于 Radon 测度的局部 Poincaré - 型不等式

本节将在有界域上证明作用于满足 Dirac - 调和方程 (1.1) 的微分形式的带 Radon 测度的局部 Poincaré - 型不等式, 在本节的相关证明中将用到以下重要引理.

引理 2.1 ^[10] 设 ω 是 Ω 上 Dirac - 调和方程 (1.1) 的解, $p > 1$ 是与方程 (1.1) 有关的确指数, 则对任意满足 $\sigma B \subset \Omega$ 的球体 B , 存在不依赖于 ω 的常数 C , 使得

$$\|\omega - \omega_B\|_{s,B} \leq C|B|^{(r-s)/rs} \|\omega - \omega_B\|_{r,\sigma B}$$

成立, 其中 $\sigma > 1, 0 < r, s < +\infty$ 均为常数.

引理 2.2 ^[10] 设 $u \in D'(Q, \Lambda^l)$ 是微分形式, $Du \in L^p(Q, \Lambda)$, 则对满足 $Q \subset R^n$ 的球体 Q , 有 $u - u_Q \in L^p(Q, \Lambda)$ 且

$$\|u - u_Q\|_{p,Q} \leq C|Q|^{1/n} \|Du\|_{p,Q},$$

其中 C 是不依赖于 u 与 Du 的常数, $p > 1$.

引理 2.3 (广义 Hölder 不等式) 设 f, g 是两个定义在 R^n 上的可测函数, 则对 R^n 中的任意子集 E , 有

$$\|fg\|_{s,E} \leq \|f\|_{\alpha,E} \|g\|_{\beta,E},$$

其中 $0 < \alpha < \infty, 0 < \beta < \infty$, 且 $s^{-1} = \alpha^{-1} + \beta^{-1}$.

定理 2.4 设 $\omega \in L^s_{\text{loc}}(\Omega, \Lambda^l)$ 是有界域 Ω 上满足 Dirac - 调和方程 (1.1) 的微分形式, $D\omega \in L^s_{\text{loc}}(\Omega, \Lambda^l), l = 0, 1, 2, \dots, n-1, 1 < s < \infty$. 则对任一满足 $\sigma B \subset \Omega$ 的球体 B , 存在不依赖于 ω 的常数 C , 使得

$$\left(\int_B |\omega - \omega_B|^s d\mu \right)^{1/s} \leq C|B|^\lambda \left(\int_{\sigma B} |D\omega|^s d\nu \right)^{1/s}. \quad (2.1)$$

上述 Radon 测度 μ, ν 分别由 $d\mu = g(x)dx, d\nu = h(x)dx$ 定义, $0 < g(x) \leq \frac{K_1}{|x-x_B|^\alpha}, h(x) \geq \frac{K_2}{|x-x_B|^\beta}$ 且 $g(x), h(x) \in L^1_{loc}(\Omega)$, 其中 $K_1 > 0, K_2 > 0, n > \alpha > \beta, \sigma > 1, \lambda = \frac{1}{n} - \frac{\alpha-\beta}{ns}$ 均为常数, x_B 为球体 B 的球心.

证 设 r_B 是球体 B 的半径, 选取正数 ε 满足 $0 < \varepsilon < r_B$, 并令 $B_\varepsilon \triangleq \{x \in B : |x-x_B| \leq \varepsilon\}, D_\varepsilon \triangleq B - B_\varepsilon = \{x \in B : |x-x_B| > \varepsilon\}$, 则 $B_\varepsilon \subset B, D_\varepsilon \subset B$ 且 $B_\varepsilon \neq \phi, D_\varepsilon \neq \phi$. 由 $0 < g(x) \leq \frac{K_1}{|x-x_B|^\alpha}$ 知

$$\begin{aligned} \left(\int_{D_\varepsilon} |\omega - \omega_B|^s d\mu\right)^{1/s} &= \left(\int_{D_\varepsilon} |\omega - \omega_B|^s g(x) dx\right)^{1/s} \\ &\leq \left(\int_{D_\varepsilon} |\omega - \omega_B|^s \frac{K_1}{|x-x_B|^\alpha} dx\right)^{1/s} \\ &= \left(\int_{D_\varepsilon} (|\omega - \omega_B| \frac{C_1}{|x-x_B|^{\alpha/s}})^s dx\right)^{1/s}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中 $C_1 = K_1^{1/s}$. 取 $\delta \in (0, 1)$, 并令 $t = \frac{s}{1-\delta}, \gamma = \frac{t}{t-s}$, 则 $t > s, \gamma > 1$, 由 $\frac{1}{s} = \frac{1}{t} + \frac{t-s}{st}$, 式 (2.2) 及引理 2.3, 得

$$\begin{aligned} \left(\int_{D_\varepsilon} |\omega - \omega_B|^s d\mu\right)^{1/s} &\leq \left(\int_{D_\varepsilon} (|\omega - \omega_B| \frac{C_1}{|x-x_B|^{\alpha/s}})^s dx\right)^{1/s} \\ &\leq \left(\int_{D_\varepsilon} |\omega - \omega_B|^t dx\right)^{1/t} \left(\int_{D_\varepsilon} \left(\frac{C_1}{|x-x_B|^{\alpha/s}}\right)^{st/(t-s)} dx\right)^{(t-s)/st} \\ &= \left(\int_{D_\varepsilon} |\omega - \omega_B|^t dx\right)^{1/t} \left(\int_{D_\varepsilon} \left(\frac{C_1^{s/\alpha}}{|x-x_B|}\right)^{\alpha t/(t-s)} dx\right)^{(t-s)/st} \\ &= \|\omega - \omega_B\|_{t, D_\varepsilon} \left(\int_{D_\varepsilon} \left(\frac{C_1^{s/\alpha}}{|x-x_B|}\right)^{\alpha t/(t-s)} dx\right)^{(t-s)/st} \\ &= \|\omega - \omega_B\|_{t, D_\varepsilon} \left(\int_{D_\varepsilon} C_2 |x-x_B|^{-\alpha\gamma} dx\right)^{1/\gamma s} \\ &\leq C_3 \|\omega - \omega_B\|_{t, B} \cdot \left(\int_{D_\varepsilon} |x-x_B|^{-\alpha\gamma} dx\right)^{1/\gamma s}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

不妨设球体 B 的球心 x_B 为原点 O (若不然, 只需将 x_B 平移至原点 O 即可), 利用多重积分的极坐标变换可得

$$\begin{aligned} \left(\int_{D_\varepsilon} |x-x_B|^{-\alpha\gamma} dx\right)^{1/\gamma s} &= \left(C_4 \int_\varepsilon^{r_B} \rho^{-\alpha\gamma} \rho^{n-1} d\rho\right)^{1/\gamma s} \\ &= \left|\frac{C_4}{n-\alpha\gamma} (r_B^{n-\alpha\gamma} - \varepsilon^{n-\alpha\gamma})\right|^{1/\gamma s} \\ &\leq C_5 |r_B^{n-\alpha\gamma} - \varepsilon^{n-\alpha\gamma}|^{1/\gamma s}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

取 $m = \frac{nst}{ns+\alpha t-\beta t}$, 则 $0 < m < s$. 应用引理 2.1 及引理 2.2, 可得

$$\|\omega - \omega_B\|_{t, B} \leq C_6 |B|^{\frac{m-t}{mt}} \|\omega - \omega_B\|_{m, \sigma B} \leq C_7 |B|^{\frac{m-t}{mt}} |B|^{\frac{1}{n}} \|D\omega\|_{m, \sigma B}, \quad (2.5)$$

其中 $\sigma > 1$ 为常数. 综合 Hölder 不等式, $h(x) \geq \frac{K_2}{|x-x_B|^\beta}$ 以及极坐标变换, 得

$$\begin{aligned}
 \|D\omega\|_{m,\sigma B} &= \left(\int_{\sigma B} (|D\omega| h^{1/s}(x) h^{-1/s}(x))^m dx \right)^{1/m} \\
 &\leq \left(\int_{\sigma B} |D\omega|^s h(x) dx \right)^{1/s} \left(\int_{\sigma B} (h^{-1/s}(x))^{\frac{ms}{s-m}} dx \right)^{(s-m)/sm} \\
 &= \left(\int_{\sigma B} |D\omega|^s d\nu \right)^{1/s} \left(\int_{\sigma B} (h^{-1}(x))^{\frac{m}{s-m}} dx \right)^{(s-m)/sm} \\
 &\leq \left(\int_{\sigma B} |D\omega|^s d\nu \right)^{1/s} \left(\int_{\sigma B} \left(\frac{|x-x_B|^\beta}{K_2} \right)^{\frac{m}{s-m}} dx \right)^{(s-m)/sm} \\
 &\leq \left(\int_{\sigma B} |D\omega|^s d\nu \right)^{1/s} C_8 (\sigma r_B)^{\beta/s+n(s-m)/sm} \\
 &= C_9 \left(\int_{\sigma B} |D\omega|^s d\nu \right)^{1/s} (r_B)^{\beta/s+n(s-m)/sm}. \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

经计算可得 $n - \alpha\gamma + \beta\gamma + n\gamma(s-m)/m = 0$, $\frac{1}{n} + \frac{m-t}{mt} = \frac{1}{n} - \frac{\alpha-\beta}{ns}$, 综合式 (2.3)-(2.6), 得

$$\begin{aligned}
 &\left(\int_{D_\varepsilon} |\omega - \omega_B|^s d\mu \right)^{1/s} \\
 &\leq C_{10} |B|^{\frac{1}{n} + \frac{m-t}{mt}} \left(\int_{\sigma B} |D\omega|^s d\nu \right)^{1/s} (r_B)^{\beta/s+n(s-m)/sm} |r_B^{n-\alpha\gamma} - \varepsilon^{n-\alpha\gamma}|^{1/\gamma s} \\
 &= C_{10} |B|^{\frac{1}{n} + \frac{m-t}{mt}} \left(\int_{\sigma B} |D\omega|^s d\nu \right)^{1/s} |r_B^{n-\alpha\gamma+\beta\gamma+\frac{n\gamma(s-m)}{m}} - \varepsilon^{n-\alpha\gamma} r_B^{\beta\gamma+\frac{n\gamma(s-m)}{m}}|^{1/\gamma s} \\
 &\leq C_{10} |B|^{\frac{1}{n} + \frac{m-t}{mt}} \left(\int_{\sigma B} |D\omega|^s d\nu \right)^{1/s} (r_B^{n-\alpha\gamma+\beta\gamma+\frac{n\gamma(s-m)}{m}} - \varepsilon^{n-\alpha\gamma} \varepsilon^{\beta\gamma+\frac{n\gamma(s-m)}{m}})^{1/\gamma s} \\
 &\leq C_{10} |B|^{\frac{1}{n} + \frac{m-t}{mt}} \left(\int_{\sigma B} |D\omega|^s d\nu \right)^{1/s} (r_B^{n-\alpha\gamma+\beta\gamma+\frac{n\gamma(s-m)}{m}} + \varepsilon^{n-\alpha\gamma} \varepsilon^{\beta\gamma+\frac{n\gamma(s-m)}{m}})^{1/\gamma s} \\
 &= 2C_{10} |B|^{\frac{1}{n} - \frac{\alpha-\beta}{ns}} \left(\int_{\sigma B} |D\omega|^s d\nu \right)^{1/s} \\
 &= C_{11} |B|^\lambda \left(\int_{\sigma B} |D\omega|^s d\nu \right)^{1/s}. \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

从而有

$$\left(\int_{D_\varepsilon} |\omega - \omega_B|^s d\mu \right)^{1/s} \leq C_{11} |B|^\lambda \left(\int_{\sigma B} |D\omega|^s d\nu \right)^{1/s}. \tag{2.8}$$

又 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{D_\varepsilon} |\omega - \omega_B|^s d\mu \right)^{1/s} = \left(\int_B |\omega - \omega_B|^s d\mu \right)^{1/s}$, 故由极限的保号性可得

$$\left(\int_B |\omega - \omega_B|^s d\mu \right)^{1/s} \leq C_{11} |B|^\lambda \left(\int_{\sigma B} |D\omega|^s d\nu \right)^{1/s}. \tag{2.9}$$

式 (2.9) 说明式 (2.1) 成立, 故定理 2.4 证毕.

3 δ -John 域上关于 Radon 测度的全局的 Poincaré - 型不等式

本节将以定理 2.4 中的局部圆域上的关于 Radon 测度的 Poincaré - 型不等式 (2.1) 为基础, 结合 δ -John 域的相关性质, 进一步证明 δ -John 域上关于 Radon 测度的全局的 Poincaré - 型不等式. 在本节定理的证明中将利用下述关于 δ -John 域的定义和性质.

定义 3.1 ^[12] 设 Ω 是 R^n 的一个子区域, 若存在一点 $x_0 \in \Omega$, 它与 Ω 中任一点 x 均可以由 Ω 中连续曲线 γ 连接, 且对任意 $\xi \in \gamma$, 有

$$d(\xi, \partial\Omega) \geq \delta|x - \xi|$$

成立, 则称 Ω 为 δ -John 域, 其中 $\delta > 0$, $d(\xi, \partial\Omega)$ 是 ξ 与 $\partial\Omega$ 间的欧几里得距离.

引理 3.2 ^[12] (覆盖引理) R^n 中的每一连通开子集 Ω 均有一个修正的立方体链的 Whitney 覆盖 $W = \{Q_i\}$, 且存在某常数 $N > 1$, 对所有的 $x \in R^n$, 有

$$\bigcup_i Q_i = \Omega, \sum_{Q \in W} \chi_{\sqrt{5/4}Q}(x) \leq N \cdot \chi_\Omega(x) \quad (3.1)$$

成立, 其中 χ 是特征函数. 此外, 若 $Q_i \cap Q_j \neq \emptyset$, 则存在立方体 $R \subset R^n$ (R 不必是 W 中的元素) 有下式成立

$$R \subset Q_i \cap Q_j, Q_i \cup Q_j \subset NR.$$

进一步, 若 Ω 是 δ -John 域, 则对于 W 中每一个立方体 Q , 存在一中心立方体 $Q_0 \in W$, 它可以通过 W 中立方体链 $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_k = Q$ 将立方体 Q 连接起来, 并且有 $Q \subset \rho Q_i$ 成立, 其中 $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$, $\rho = \rho(n, \delta)$ 为一常数.

因为立方体与球体具有相互包含关系, 故可将引理 3.2 中的立方体链 $\{Q_i\}$ 替换为球体链 $\{B_i\}$, 于是便可得到引理 3.2 中关于 δ -John 域的性质如下等价描述.

引理 3.2' 设 R^n 中的连通开子集 Ω 是 δ -John 域, 则存在 Ω 的 Whitney 覆盖 $W = \{B_i\}$, 满足下述两个条件

$$(1) \text{ 存在一常数 } N > 1, \text{ 使得对所有的 } x \in R^n, \text{ 成立 } \bigcup_i B_i = \Omega, \sum_{B \in W} \chi_{\sigma B}(x) \leq N \cdot \chi_\Omega(x),$$

其中 χ 是特征函数;

(2) 存在一中心球体 $B_0 \in W$, 它可以通过 W 中球体链 $B_0, B_1, B_2, \dots, B_k = B$ 将 W 中任何一个球体 B 连接起来, 且有 $B \subset \rho B_i$ 成立, $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$, $\rho = \rho(n, \delta)$ 为常数, 并存在立方体 R (R 不必是 W 中的元素) 有下式成立

$$R \subset B_i \cap B_j, B_i \cup B_j \subset NR.$$

定理 3.3 设 Ω 是 δ -John 域, $\omega \in L^s_{\text{loc}}(\Omega, \Lambda^l)$ 是 Ω 上满足 Dirac - 调和方程 (1.1) 的微分形式, $D\omega \in L^s_{\text{loc}}(\Omega, \Lambda^l)$, $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $1 < s < \infty$. 则存在不依赖于 ω 的常数 C , 使得

$$\left(\int_\Omega |\omega - \omega_{B_0}|^s d\mu \right)^{1/s} \leq C |\Omega|^\lambda \left(\int_\Omega |D\omega|^s d\nu \right)^{1/s}, \quad (3.2)$$

其中 Radon 测度 μ, ν 分别由 $d\mu = g(x)dx, d\nu = h(x)dx$ 定义, $g(x), h(x) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $1 \leq g(x) \leq \frac{K_1}{d^\alpha(x, \partial\Omega)}$, 且 $h(x) \geq \sum_i \chi_{B_i} \frac{K_2}{|x - x_{B_i}|^\beta}$, 这里 $K_1 > 0, K_2 > 0, \beta < \alpha < \min\{n, s + \beta - n\}$, $\sigma > 1, \lambda = \frac{1}{n} - \frac{\alpha - \beta}{ns}$ 均为常数, x_{B_i} 为球体 B_i 的球心, $B_0, B_1, B_2, \dots, B_k, \dots$ 是引理 3.2' 中条件 (2) 对应的球体链, 且 $\bigcup_i B_i = \Omega$.

证 对 Ω 中任意球体 B , 由 $g(x) \geq 1$ 可得

$$\mu(B) = \int_B d\mu = \int_B g(x)dx \geq \int_B dx = |B|. \quad (3.3)$$

由引理 3.2' 知 Ω 有 Whitney 开覆盖 $W = \{B_i\}$ 满足 $\Omega = \bigcup_i B_i$. 容易验证定理 3.3 中的 g, h 同样满足定理 2.4, 故在 B_i 中应用定理 2.4 可知, 存在不依赖于 ω 的常数 C_1 , 使得

$$\left(\int_{B_i} |\omega - \omega_{B_i}|^s d\mu\right)^{1/s} \leq C_1 |B_i|^\lambda \left(\int_{\sigma B_i} |D\omega|^s d\nu\right)^{1/s}, \quad (3.4)$$

其中 $\sigma > 1$ 为常数. 应用初等不等式 $((a+b)^s \leq 2^s(|a|^s + |b|^s))(s \geq 0)$ 可得

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} |\omega - \omega_{B_0}|^s d\mu\right)^{1/s} = \left(\int_{\bigcup_i B_i} |\omega - \omega_{B_0}|^s d\mu\right)^{1/s} \\ & \leq \left(\sum_{B_i \in W} \int_{B_i} |\omega - \omega_{B_0}|^s d\mu\right)^{1/s} \leq \left(\sum_{B_i \in W} (2^s \int_{B_i} |\omega - \omega_{B_i}|^s d\mu + 2^s \int_{B_i} |\omega_{B_i} - \omega_{B_0}|^s d\mu)\right)^{1/s} \\ & = 2^{1+1/s} \left(\sum_{B_i \in W} \int_{B_i} |\omega - \omega_{B_i}|^s d\mu\right)^{1/s} + 2^{1+1/s} \left(\sum_{B_i \in W} \int_{B_i} |\omega_{B_i} - \omega_{B_0}|^s d\mu\right)^{1/s}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中 $B_0 \subset \Omega$ 是满足引理 3.2' 中的一中心球体. 由式 (3.4) 可得

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{B_i \in W} \int_{B_i} |\omega - \omega_{B_i}|^s d\mu\right)^{1/s} \leq \left(\sum_{B_i \in W} C_1^s |B_i|^{s\lambda} \int_{\sigma B_i} |D\omega|^s d\nu\right)^{1/s} \\ & \leq C_1 |\Omega|^\lambda \left(\sum_{B_i \in W} \int_{\sigma B_i} |D\omega|^s d\nu\right)^{1/s} = C_1 |\Omega|^\lambda \left(\sum_{B_i \in W} \chi_{\sigma B_i} \int_{\Omega} |D\omega|^s d\nu\right)^{1/s}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

由引理 3.2' 的条件 (1) 知 $\sum_{B_i \in W} \chi_{\sigma B_i}(x) \leq N \chi_{\Omega}(x)$, 故

$$\sum_{B_i \in W} \chi_{\sigma B_i} \int_{\Omega} |D\omega|^s d\nu \leq N \int_{\Omega} |D\omega|^s d\nu. \quad (3.7)$$

综合式 (3.6)–(3.7), 可得

$$\left(\sum_{B_i \in W} \int_{B_i} |\omega - \omega_{B_i}|^s d\mu\right)^{1/s} \leq C_1 N^{1/s} |\Omega|^\lambda \left(\int_{\Omega} |D\omega|^s d\nu\right)^{1/s} = C_2 |\Omega|^\lambda \left(\int_{\Omega} |D\omega|^s d\nu\right)^{1/s}. \quad (3.8)$$

下面将利用引理 3.2' 中关于 δ -John 域的性质来估计式 (3.5) 中 $\left(\sum_{B_i \in W} \int_{B_i} |\omega_{B_i} - \omega_{B_0}|^s d\mu\right)^{1/s}$ 的积分上界. 对任意 $B_i \in W$, 有

$$|\omega_{B_i} - \omega_{B_0}| \leq \sum_{k=0}^{i-1} |\omega_{B_{k+1}} - \omega_{B_k}|. \quad (3.9)$$

由引理 3.2' 的条件 (2) 知存在立方体 D_j 满足 $D_j \subset B_j \cap B_{j+1}$ 且 $B_j \cup B_{j+1} \subset N D_j$, 因此有

$$\frac{\max\{|B_j|, |B_{j+1}|\}}{|B_j \cap B_{j+1}|} \leq \frac{|B_j \cup B_{j+1}|}{|D_j|} \leq \frac{|N D_j|}{|D_j|} = N^n = C_3. \quad (3.10)$$

综合式 (3.3), (3.10), (3.4), 便有

$$\begin{aligned}
 |\omega_{B_{j+1}} - \omega_{B_j}|^s &= \frac{1}{\mu(B_j \cap B_{j+1})} \int_{B_j \cap B_{j+1}} |\omega_{B_{j+1}} - \omega_{B_j}|^s d\mu \\
 &\leq \frac{1}{|B_j \cap B_{j+1}|} \int_{B_j \cap B_{j+1}} |\omega_{B_{j+1}} - \omega_{B_j}|^s d\mu \leq \frac{C_3}{\max\{|B_j|, |B_{j+1}|\}} \int_{B_j \cap B_{j+1}} |\omega_{B_{j+1}} - \omega_{B_j}|^s d\mu \\
 &\leq C_3 \sum_{l=j}^{j+1} \frac{1}{|B_l|} \int_{B_l} |\omega - \omega_{B_l}|^s d\mu \leq C_4 \sum_{l=j}^{j+1} \frac{|B_l|^{\lambda s}}{|B_l|} \int_{\sigma B_l} |D\omega|^s d\nu \\
 &= C_4 \sum_{l=j}^{j+1} |B_l|^{\lambda s-1} \int_{\sigma B_l} |D\omega|^s d\nu. \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

由 $\beta < \alpha < \min\{n, s + \beta - n\}$ 知 $\lambda s - 1 > 0$, 又 $B_i \subset \rho B_l$, $l = j, j+1$, $1 \leq j \leq i-1$, 则利用 (3.11) 可得

$$\begin{aligned}
 |\omega_{B_{j+1}} - \omega_{B_j}|^s \chi_{B_i}(x) &\leq C_4 \sum_{l=j}^{j+1} \chi_{\rho B_l}(x) |B_l|^{\lambda s-1} \int_{\sigma B_l} |D\omega|^s d\nu \\
 &\leq C_4 \sum_{l=j}^{j+1} \chi_{\rho B_l}(x) |\Omega|^{\lambda s-1} \int_{\sigma B_l} |D\omega|^s d\nu = C_4 |\Omega|^{\lambda s-1} \sum_{l=j}^{j+1} \chi_{\rho B_l}(x) \int_{\sigma B_l} |D\omega|^s d\nu. \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

综合式 (3.9), (3.12), 引理 3.2' 及初等不等式 $(a+b)^{1/s} \leq 2^{1/s}(|a|^{1/s} + |b|^{1/s})$, 可得

$$|\omega_{B_i} - \omega_{B_0}| \chi_{B_i}(x) \leq C_5 |\Omega|^{\lambda-1/s} \sum_{D_i \in W} \left(\int_{\sigma D_i} |D\omega|^s d\nu \right)^{1/s} \chi_{\rho D_i}(x), \tag{3.13}$$

其中 $x \in R^n$. (3.13) 式两端先作 s 次幂, 然后在 R^n 上作 μ -积分, 可得

$$\sum_{B_i \in W} \int_{B_i} |\omega_{B_i} - \omega_{B_0}|^s d\mu \leq C_6 |\Omega|^{\lambda s-1} \int_{R^n} \left| \sum_{D_i \in W} \left(\int_{\sigma D_i} |D\omega|^s d\nu \right)^{1/s} \chi_{\rho D_i}(x) \right|^s d\mu. \tag{3.14}$$

注意到 $\sum_{D_i \in W} \chi_{\rho D_i}(x) \leq \sum_{D_i \in W} \chi_{\rho N D_i}(x) \leq N \chi_\Omega(x)$, 综合不等式 $|\sum_{i=1}^N t_i|^s \leq N^{s-1} \sum_{i=1}^N |t_i|^s$, $s > 1$, 可得

$$\begin{aligned}
 &\left(\sum_{B_i \in W} \int_{B_i} |\omega_{B_i} - \omega_{B_0}|^s d\mu \right)^{1/s} \leq C_7 |\Omega|^{\lambda-1/s} \left(\int_{R^n} \left(\sum_{D_i \in W} \left(\int_{\sigma D_i} |D\omega|^s d\nu \right) \chi_{\rho D_i}(x) \right) d\mu \right)^{1/s} \\
 &= C_7 |\Omega|^{\lambda-1/s} \left(\sum_{D_i \in W} \left(\int_{\sigma D_i} |D\omega|^s d\nu \right) \right)^{1/s} \leq C_8 |\Omega|^{\lambda-1/s} \left(\int_{\Omega} |D\omega|^s d\nu \right)^{1/s} \\
 &\leq C_8 |\Omega|^\lambda \left(\int_{\Omega} |D\omega|^s d\nu \right)^{1/s}. \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

综合式 (3.5), (3.8), (3.15), 可得

$$\left(\int_{\Omega} |\omega - \omega_{B_0}|^s d\mu \right)^{1/s} \leq C_9 |\Omega|^\lambda \left(\int_{\Omega} |D\omega|^s d\nu \right)^{1/s}. \tag{3.16}$$

定理 3.3 证毕.

参 考 文 献

- [1] Ding Shusen. Local and global norm comparison theorems for solutions to the nonhomogeneous A -harmonic equation[J]. J. Math. Anal. Appl., 2007, 335(2): 1274–1293.
- [2] 高红亚, 时坚. WT_2 类微分形式的 Caccioppoli 不等式及其应用 [J]. 数学杂志, 2011, 31(4): 695–698.
- [3] Ding Shusen. Weighted Hardy-Littlewood inequality for A -harmonic tensors[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1997, 125(6): 1727–1735.
- [4] Liu Bing. $A_r(\lambda)$ -weighted Caccioppoli-type and Poincaré-type inequalities for A -harmonic tensors[J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2002, 31(2): 115–122.
- [5] Liu Bing. $A_r^\lambda(\Omega)$ -weighted imbedding inequalities for A -harmonic tensors[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, 273(2): 667–676.
- [6] Bi Hui. Weighted inequalities for potential operators on differential forms[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2010, Volume 2010, Article ID 713625, 13 pages.
- [7] Li Huacan, Li Qunfang. Some weighted norm estimates for the composition of the homotopy and Green's operator[J]. Abstract and Applied Analysis, 2014, Volume 2014, Article ID 941658, 7 pages.
- [8] Wang Yong. Two-weight Poincaré-type inequalities for differential forms in averaging domains[J]. Applied Mathematics Letters, 2007, 20(11): 1161–1166.
- [9] Xing Yuming. A new weight class and Poincaré inequalities with the Radon measure[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2012, 2012:32.
- [10] Ding Shusen, Liu Bing. Dirac-harmonic equations for differential forms[J]. Nonlinear Analysis, 2015, 122: 43–57.
- [11] Agarwal Ravi P, Ding Shusen, Nolder Craig A. Inequalities for differential forms[M]. New York: Springer, 2009.
- [12] Nolder Craig A. Hardy-Littlewood theorems for A -harmonic tensors[J]. Illinois Journal of Mathematics, 1999, 43(4): 613–632.

SOME INTEGRAL INEQUALITIES WITH RADON MEASURE

LI Hua-can¹, LI Qun-fang²

(1.School of Science, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China)

(2.Department of Mathematics, Ganzhou Teachers College, Ganzhou 341000, China)

Abstract: In this paper, we study the problem of Radon integrability of differential forms satisfying the Dirac-harmonic equation. By two kind of Hölder inequalities, we first obtain the local Poincaré-type inequality applying to differential forms which satisfy Dirac-harmonic equation. Then, based on the local result, we also obtain the global Poincaré-type inequality on δ -John domain by use of some proper integral skills and the property of Whitney cover, which generalized the integral theory differential form.

Keywords: Dirac-harmonic equation; integral inequalities; Radon measure; global

2010 MR Subject Classification: 44A12 ; 45E99; 46E30.