Vol. 39 (2019)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

马氏环境中树指标马氏链随机转移概率调和平均的强极限性质

石志岩, 鲍 丹, 吴佰慧
(江苏大学理学院, 江苏 镇江 212013)

摘 要: 本文研究了离散状态下随机环境中树指标马氏链, 证明了该过程在概率空间中可以实现, 同时阐明了马氏环境下树指标马氏链与树指标马氏双链的等价性. 获得了有限状态下马氏环境中树指标马氏链的随机转移概率调和平均的强极限性质.

关键词: 马氏环境; 马氏链; 随机转移概率; 调和平均

MR(2010) **主题分类号:** 60F15; 60J10 **中图分类号:** O211.6

文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2019)04-0575-08

1 引言

设 T 是一个局部有限的无限树, σ, t $(\sigma \neq t)$ 是 T 中任两个顶点, 则存在唯一的从 σ 到 t 的路径, $\sigma = z_1, z_2, \cdots, z_m = t$, 其中 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 互不相同且 z_i, z_{i+1} 为相邻两顶点, $m-1$ 称为 σ 到 t 的距离. 为给 T 中的顶点编号, 选定一个顶点作为根顶点 (简称根), 记为 o. 如果一个顶点 σ 位于根 o 到顶点 t 的唯一路径上, 则记 $\sigma \leq t$. 若 σ, t 为 T 上不同的两个顶点, 记 $\sigma \wedge t$ 为同时满足 $\sigma \wedge t \leq t$ 和 $\sigma \wedge t \leq \sigma$ 且离根 o 最远的顶点.

若 t 为 T 中的任一顶点, 记 $|t|$ 为顶点 t 到根 o 的距离. 若 $|t| = n$, 称 t 位于树的第 n 层. 记 $T^{(n)}$ 表示从根 o 到第 n 层所有顶点的子图, L_n 表示第 n 层所有顶点的集合, L_m^n 表示含有 T 的从 m 层到 n 层所有顶点的集合. 对于任一个顶点 t, 从根 o 到顶点 t 的路径上存在唯一一个离顶点 t 最近的顶点称为 t 的父代, 记为 1_t, 且称 t 为 1_t 的子代. 令 $X^S = \{X_t, t \in S\}$, $S \subset T$, x^S 为 X^S 的实现, 且记 $|S|$ 为 S 中顶点的个数. 如果树图 T 的根顶点有 N 个相邻顶点, 而其它顶点有 $N+1$ 个相邻顶点, 即 T 的每个顶点都有 N 个子代, 则称此树为 Cayley 树, 记为 $T_{C,N}$ (见图 1).

树指标随机过程是新兴的概率论研究方向. Benjamini 和 Peres [1] 给出了树指标马氏链的定义并研究了其常返性和射线常返性; 陈晓雪和杨卫国 [2] 等研究了树指标马氏链的等价定义; Berger 和叶中行 [3] 研究了齐次树图上平稳随机场熵率的存在性; 叶中行和 Berger[4,5] 利用 Pemantle 在文献 [6] 中的结果及组合方法, 在依概率收敛意义下研究了齐次树图上 PPG 不变和遍历随机场的 Shannon -McMillan 定理; 杨卫国和刘文 [7] 研究了齐次树图上马氏链场 (这实际上是树指标马氏链和 PPG 不变随机场的特殊情形) 状态发生频率的强大数定律. 近年来, 杨卫国 [8,9] 研究了树上马氏链的强大数定律和渐近均分割性; 黄辉林和杨卫国 [10] 研究了一致有界树上马氏链的强大数定律和 Shannon-McMillian 定理; 石志岩和杨卫国 [11] 研究了树上非齐次马氏链随机转移概率调和平均的强极限性质; 王豹等 [12] 研究了 Cayley 树指

*收稿日期: 2017-11-07 接收日期: 2018-05-15
基金项目: 国家自然科学基金 (11601191;11571142) 和江苏大学青年英才计划.
作者简介: 石志岩 (1985–), 男, 江苏宿迁, 副教授, 主要研究方向: 概率极限理论及信息论.

标可列马氏链的强大数定律; 党慧等 [13] 给出了离散状态下二叉树上非齐次分支马氏链的定义, 并研究其等价性及存在性, 同时研究了有限状态下二叉树上非齐次分支马氏链的强大数定理和熵遍历定理.

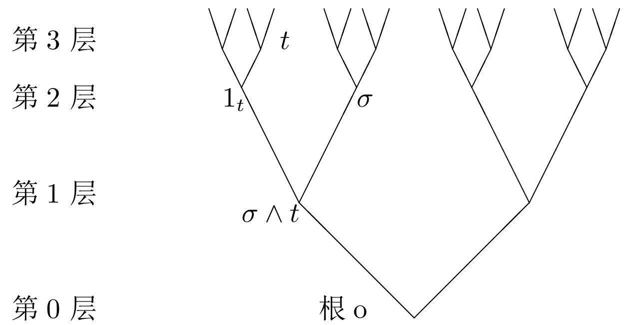

图 1: Cayley 树 $T_{C,2}$

随机环境中马氏链的研究已有相当长的历史. Nawrotzki[14,15] 建立了该主题的一般理论; Cogburn[16−18] 构造了 Hopf - 链, 利用 Hopf - 链理论深入研究了平稳环境中马氏链的遍历理论、中心极限定理、直接收敛和转移函数的周期性关系以及不变概率测度的存在性; 胡迪鹤 [19,20] 对连续时间参数的随机环境中的马氏过程的存在性、等价性、q - 过程的存在唯一性进行了研究; 李应求 [21,22] 利用完善的鞅差理论来研究随机环境中的马氏链, 在假设马氏双链遍历的条件下, 得到了马氏环境中马氏链的强大数定律成立的充分条件以及马氏环境中若干强极限定理; 石志岩等 [23] 给出了离散状态下随机环境中树指标马氏链的定义, 并证明了该定义在概率空间中可以实现; 黄辉林 [24] 研究了有限 i.i.d. 随机环境下齐次树指标马氏链的强大数定律和 Shannon-McMillian 定理.

本文首先给出离散状态下随机环境中树指标马氏链的定义, 并且证明了该定义在概率空间中可以实现, 给出了马氏环境下树指标马氏链与树指标马氏双链的等价定义, 该部分重述了文献 [23] 中的一些结果. 最后研究了有限状态下马氏环境中树指标马氏链的随机转移概率调和平均的强极限性质.

2 基本概念

设 $\Theta=\{0,1,2,\cdots\},\chi=\{0,1,2,\cdots\}$ 为可列状态空间, $\xi^T=\{\xi_t,t\in T\}$ 和 $X^T=\{X_t,t\in T\}$ 分别是 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上取值于 Θ 和 χ 的随机变量族. 假定 $p_\theta=\{p(\theta;x),x\in\chi\},\theta\in\Theta$ 是关于参数 θ 的一个分布, 且 $P_\theta=\{p(\theta;x,y),x,y\in\chi\},\theta\in\Theta$ 是定义在 χ^2 上的关于参数 θ 的一个转移矩阵.

定义 1[2] 设 T 为一树图, $\chi=\{0,1,2,\cdots\}$ 是可列状态空间, $\{X_t,t\in T\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上在 χ 中取值的树指标变量族. 设 $p=\{p(x),x\in\chi\}$ 是 χ 上一概率分布, $P=\{p(x,y),x,y\in\chi\}$ 是定义在 χ^2 上的转移矩阵. 如果 $\forall t\in T,\forall n\geq 1$, 有

$$P(X^{L_n}=x^{L_n}|X^{T^{(n-1)}}=x^{T^{(n-1)}})=\prod_{t\in L_n}p(x_{1_t},x_t) \tag{1}$$

且

$$P(X_o=x_o)=p(x_o),\forall x_o\in\chi, \tag{2}$$

则称 $\{X_t, t \in T\}$ 为具有初始分布 p 与转移矩阵 P 在 χ 中取值的树指标马氏链.

注 1 文献 [2] 介绍了树指标马氏链的各种等价定义, 定义 1 仅仅是其中的一种形式, 对于其他的定义形式, 读者可参阅文献 [2].

生物学家研究杆状菌的分裂时, 总结出杆状菌分裂的规律, 即一个杆状菌在分裂时, 从中间断开, 这样就分裂成两个新杆状菌, 这两个新的杆状菌为原来杆状菌的后代. 如果我们把每一次分裂中的杆状菌看成一个顶点, 那么杆状菌的分裂过程就可以抽象为一个二叉树结构 (分支马氏链) (见文献 [25]). 如果杆状菌分裂时受到周边环境的影响, 这样杆状菌的分裂过程就可以抽象为一个随机环境中二叉树模型, 因此研究随机环境中树指标过程不仅具有理论意义, 更具有应用价值. 类似于定义 1 中的树指标马氏链的定义, 结合随机环境中马氏链的定义, 给出随机环境中树指标马氏链的定义.

定义 2 [23] 设 T 为树, $X^T = \{X_t, t \in T\}, \xi^T = \{\xi_t, t \in T\}$ 分别在 χ, Θ 中取值的随机变量族. 设 $p_\theta = \{p(\theta; x), x \in \chi\}, \theta \in \Theta$ 是 χ 上一含参数的分布, $P_\theta = \{p(\theta; x, y), x, y \in \chi\}, \theta \in \Theta$ 是定义在 χ^2 上的含参数的转移矩阵. 若

$$P(X_o = x_o | \xi^T) = p(\xi_o; x_o) \quad \text{a.e.}, \tag{3}$$

$$P(X^{L_n} = x^{L_n} | \xi^T, X^{T^{(n-1)}}) = \prod_{t \in L_n} p(\xi_{1_t}; X_{1_t}, x_t) \quad \text{a.e.}, \tag{4}$$

则称 (X^T, ξ^T) 为由含参数的分布 p_θ 与含参数的转移矩阵 P_θ 确定的随机环境中树指标马氏链, 其中 ξ^T 为随机环境. 若 ξ^T 为树指标马氏链, 称 (X^T, ξ^T) 为马氏环境中树指标马氏链.

注 2 当 ξ^T 取常数时, 随机环境中树指标马氏链就是一般树指标马氏链. 如果树的每一顶点只有一个子代, 则随机环境中树指标马氏链即为随机环境中马氏链. 因此随机环境中树指标马氏链是树指标马氏链和随机环境中马氏链的推广.

引理 1 [23] (X^T, ξ^T) 为定义 2 定义的由含参数的分布 p_θ 与含参数的转移矩阵 P_θ 确定的随机环境中的树指标马氏链的充要条件是

(i)

$$P(X_o = x_o | \xi^{T^{(n)}} = \theta^{T^{(n)}}) = p(\theta_o; x_o). \tag{5}$$

(ii) 当 $k \geq n-1$ 时,

$$P(X^{L_n} = x^{L_n} | \xi^{T^{(k)}} = \theta^{T^{(k)}}, X^{T^{(n-1)}} = x^{T^{(n-1)}}) = \prod_{t \in L_n} p(\theta_{1_t}; x_{1_t}, x_t). \tag{6}$$

引理 2 [23] 引理 1 中 (5) 和 (6) 式成立的充要条件是

$$P(\xi^{T^{(m)}} = \theta^{T^{(m)}}, X^{T^{(n)}} = x^{T^{(n)}}) = P(\xi^{T^{(m)}} = \theta^{T^{(m)}}) p(\theta_o; x_o) \prod_{t \in T^{(n)} \setminus \{o\}} p(\theta_{1_t}; x_{1_t}, x_t). \tag{7}$$

注 3 设 $\overline{\Omega} = \chi^T \times \Theta^T, \mathcal{F}'$ 为 $\overline{\Omega}$ 中所有有限维柱集生成的 σ - 代数. 定义 $(\overline{\Omega}, \mathcal{F}')$ 上随机环境中树指标随机过程如下 $\omega = (x^T, \theta^T) \in \overline{\Omega}$. 定义 $X^T(x^T, \theta^T) = x^T, \xi^T(x^T, \theta^T) = \theta^T$. 定义 μ_P 在柱集 $(X^{T^{(n)}} = x^{T^{(n)}}, \xi^{T^{(m)}} = \theta^{T^{(m)}})$ 上的值如 (7) 式的右端, 由 Kolmogorov 存在定理 (见文献 [26]), μ_P 可以扩张为整个空间 $(\overline{\Omega}, \mathcal{F}')$ 上的概率测度, 于是 (X^T, ξ^T) 在 μ_P 下为随机环境中的树指标马氏链, 这样就得到了随机环境中树指标马氏链的实现.

注 4 若 ξ^T 为初始分布为 $p^{'}(\theta)$, 转移矩阵族为 $K_t=(K_t(\theta,a))$ 的非齐次树指标马氏链. 由 (7) 式和定义 1 知

$$P(\xi^{T^{(n)}}=\theta^{T^{(n)}},X^{T^{(n)}}=x^{T^{(n)}})=p(\theta_o;x_o)p^{'}(\theta_o)\prod_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}p(\theta_{1_t};x_{1_t},x_t)K_t(\theta_{1_t},\theta_t).$$

若令 $Q_t(x,\theta;y,a)=p(\theta;x,y)K_t(\theta,a)$, $q(\theta_o,x_o)=p(\theta_o;x_o)p^{'}(\theta_o)$, 则

$$P(\xi^{T^{(n)}}=\theta^{T^{(n)}},X^{T^{(n)}}=x^{T^{(n)}})=q(\theta_o,x_o)\prod_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}Q_t(x_{1_t},\theta_{1_t};x_t,\theta_t).$$

由此可知马氏环境下树指标马氏链与树指标非齐次马氏双链是等价的. 此时, (X^T,ξ^T) 为初始分布为 $q(\theta_o,x_o)$, 转移矩阵族为 $\{Q_t(x,\theta;y,a),t\in T\}$ 的树指标非齐次马氏双链.

以后总假定 ξ^T 是马氏环境, 则 (X^T,ξ^T) 是具有初始分布为 $q(\theta_o,x_o)$, 转移矩阵族为 $Q_t=\{Q_t(x,\theta;y,a),t\in T\}$ 的树指标非齐次马氏双链. 在下节中, 将给出有限状态下马氏环境中树指标马氏链的随机转移概率的调和平均的极限性质.

3 主要结果

引理 3 [24] 设 (X^T,ξ^T) 为马氏环境中的树指标马氏链, $\{g_t(x,\theta;y,\alpha),t\in T\}$ 是定义在 $(\chi\times\Theta)^2$ 上的函数族. 令 $L_o=\{o\}$, $\mathcal{F}_n=\sigma(X^{T^{(n)}},\xi^{T^{(n)}})$,

$$t_n(\lambda,\omega)=\frac{e^{\lambda\sum\limits_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}g_t(X_{1_t},\xi_{1_t};X_t,\xi_t)}}{\prod\limits_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}E[e^{\lambda g_t(X_{1_t},\xi_{1_t};X_t,\xi_t)}|X_{1_t},\xi_{1_t}]},\tag{8}$$

其中 λ 为实数, 则 $\{t_n(\lambda,\omega),\mathcal{F}_n,n\geq 1\}$ 是非负鞅.

定理 1 设 $\chi=\{1,2,\cdots,M\},\Theta=\{1,2,\cdots,N\}$, 且 ξ^T 的初始分布为 $p^{'}(\theta)$, 转移概率族为 $K_t=\{K_t(\theta,\alpha),t\in T\}$. 设 (X^T,ξ^T) 为马氏环境中的树指标马氏链, 其初始分布和转移概率族满足

$$P(\xi_o=\theta_o,X_o=x_o)=q(\theta_o,x_o)>0,\quad \forall x_o\in\chi,\theta_o\in\Theta,\tag{9}$$

$$Q_t(x,\theta;y,\alpha)=K_t(\theta,\alpha)P(\theta;x,y)>0.\ \ \forall x,y\in\chi,\theta,\alpha\in\Theta,t\in T^{(n)}\setminus\{o\}.\tag{10}$$

令

$$b_t=\min\{Q_t(x,\theta;y,\alpha);x,y\in\chi,\theta,\alpha\in\Theta\},\quad t\in T^{(n)}\setminus\{o\}.\tag{11}$$

若存在常数 $h>0$, 使得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\sum_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}e^{\frac{h}{b_t}}=S<\infty,\tag{12}$$

则随机转移概率 $\{Q_t(X_{1_t},\xi_{1_t};X_t,\xi_t),t\in T^{(n)}\setminus\{o\}\}$ 的调和平均 a.e. 收敛于 $\frac{1}{MN}$, 即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|T^{(n)}|}{\sum\limits_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}Q_t(X_{1_t},\xi_{1_t};X_t,\xi_t)^{-1}}=\frac{1}{MN}\quad \text{a.e..}\tag{13}$$

注 5 假设 $\forall t\in T, b_t\equiv\frac{1}{2}$, 此时

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\sum_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}e^{\frac{h}{b_t}}=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\sum_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}e^{2h}=e^{2h}<\infty,$$

因此等式 (12) 是可以实现的.

证 在引理 3 中令 $g_t(x,\theta;y,\alpha)=Q_t(x,\theta;y,\alpha)^{-1}$, 则由引理 3 知

$$t_n(\lambda,\omega)=\frac{e^{\lambda\sum\limits_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}Q_t(X_{1_t},\xi_{1_t};X_t,\xi_t)^{-1}}}{\prod\limits_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}E[e^{\lambda Q_t(X_{1_t},\xi_{1_t};X_t,\xi_t)^{-1}}|X_{1_t},\xi_{1_t}]}\tag{14}$$

为非负鞅, 由 Doob 鞅收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}t_n(\lambda,\omega)=t(\lambda,\omega)<\infty\ \ \text{a.e.},\tag{15}$$

故

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\ln t_n(\lambda,\omega)\le 0\ \ \text{a.e..}\tag{16}$$

由式 (14) 和 (16) 得

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\{\lambda\sum_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}Q_t(X_{1_t},\xi_{1_t};X_t,\xi_t)^{-1}-\sum_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}\ln E[e^{\lambda Q_t(X_{1_t},\xi_{1_t};X_t,\xi_t)^{-1}}|X_{1_t},\xi_{1_t}]\}\\&\le 0\ \ \text{a.e..}\end{aligned}\tag{17}$$

由式 (17) 和不等式 $\ln x\le x-1(x>0), 0\le e^x-1-x\le\frac{x^2}{2}e^{|x|}$ 得

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\sum_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}[\lambda Q_t(X_{1_t},\xi_{1_t};X_t,\xi_t)^{-1}-\lambda MN]\\
\le&\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\sum_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}\{\ln E[e^{\lambda Q_t(X_{1_t},\xi_{1_t};X_t,\xi_t)^{-1}}|X_{1_t},\xi_{1_t}]-\lambda MN\}\\
\le&\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\sum_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}\{E[e^{\lambda Q_t(X_{1_t},\xi_{1_t};X_t,\xi_t)^{-1}}|X_{1_t},\xi_{1_t}]-1-\lambda MN\}\\
=&\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\sum_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}\sum_{x\in\chi,\theta\in\Theta}Q_t(X_{1_t},\xi_{1_t};x,\theta)[e^{\lambda Q_t(X_{1_t},\xi_{1_t};x,\theta)^{-1}}-1-\lambda Q_t(X_{1_t},\xi_{1_t};x,\theta)^{-1}]\\
\le&\frac{\lambda^2}{2}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\sum_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}\sum_{x\in\chi,\theta\in\Theta}Q_t(X_{1_t},\xi_{1_t};x,\theta)^{-1}e^{|\lambda|Q_t(X_{1_t},\xi_{1_t};x,\theta)^{-1}}\\
\le&\frac{\lambda^2}{2}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\sum_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}\sum_{x\in\chi,\theta\in\Theta}\frac{1}{b_t}e^{\frac{|\lambda|}{b_t}}\\
\le&\frac{\lambda^2MN}{2}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\sum_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}\frac{1}{b_t}e^{\frac{|\lambda|}{b_t}}\ \ \text{a.e..}\end{aligned}\tag{18}$$

易知当 $0<\lambda<1$ 时有

$$\max\{x\lambda^x, x>0\}=-\frac{e^{-1}}{\ln\lambda}. \tag{19}$$

当 $0<\lambda<h$ 时, 由式 (11),(12),(18) 与 (19) 得

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\sum_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}[Q_t(X_{1_t},\xi_{1_t};X_t,\xi_t)^{-1}-MN]\\
\le&\frac{\lambda MN}{2}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\sum_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}\frac{1}{b_t}e^{\frac{\lambda}{b_t}}\\
=&\frac{\lambda MN}{2}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\sum_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}\frac{1}{b_t}\left(\frac{e^{\lambda}}{e^{h}}\right)^{\frac{1}{b_t}}e^{\frac{h}{b_t}}\\
\le&\frac{\lambda MN}{2(h-\lambda)e}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\sum_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}e^{\frac{h}{b_t}}\\
=&\frac{\lambda MN}{2(h-\lambda)e}S.
\end{aligned} \tag{20}$$

令 $\lambda\to 0^+$, 由式 (20) 有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\sum_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}[Q_t(X_{1_t},\xi_{1_t};X_t,\xi_t)^{-1}-MN]\le 0 \quad \text{a.e..} \tag{21}$$

当 $-h<\lambda<0$ 时, 将式 (18) 两边同除以 λ 并利用式 (11),(12) 与 (19) 得

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\sum_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}[Q_t(X_{1_t},\xi_{1_t};X_t,\xi_t)^{-1}-MN]\\
\ge&\frac{\lambda MN}{2}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\sum_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}\frac{1}{b_t}e^{\frac{-\lambda}{b_t}}\\
=&\frac{\lambda MN}{2}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\sum_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}\frac{1}{b_t}\left(\frac{e^{-\lambda}}{e^{h}}\right)^{\frac{1}{b_t}}e^{\frac{h}{b_t}}\\
\ge&\frac{\lambda MN}{2(h+\lambda)e}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\sum_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}e^{\frac{h}{b_t}}=\frac{\lambda MN}{2(h+\lambda)e}S.
\end{aligned} \tag{22}$$

令 $\lambda\to 0^-$, 由式 (22) 有

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{|T^{(n)}|}\sum_{t\in T^{(n)}\setminus\{o\}}[Q_t(X_{1_t},\xi_{1_t};X_t,\xi_t)^{-1}-MN]\ge 0 \quad \text{a.e..} \tag{23}$$

由式 (21) 与 (23) 即可以知式 (13) 成立.

参 考 文 献

[1] Benjamini I, Peres Y. Markov chains indexed by trees[J]. Ann. Prob., 1994, 22(1): 219–243.

[2] Chen X,Yang W G, Wang B. The equivalent definition of T-indexed Markov chains[J]. J. Math. Study, 2012, 4: 411–414.

[3] Berger T, Ye Z. Entropic aspects of random fields on trees[J]. IEEE Trans. Inform. The., 1990, 36(5): 1006–1018.

[4] Ye Z, Berger T. Ergodic, regularity and asymptotic equipartition property of random fields on trees[J]. J. Combin. Inform. Sys. Sci., 1996, 21(2): 157–184.

[5] Ye Z, Berger, T. Information measures for discrete random fields[M]. Beijing: Sci. Publ. Co., 1998.

[6] Pemantle R. Automorphism invariant measures on trees[J]. Ann. Prob., 1992, 20(3): 1549–1566.

[7] Yang W G, Liu W. Strong law of large numbers for Markov chains field on a Bethe tree[J]. Stat. Prob. Lett., 2000, 49(3): 245–250.

[8] Yang W G. Some limit properties for Markov chains indexed by a homogeneous tree[J], Stat. Prob. Lett., 2003, 65(3): 241–250.

[9] Yang W G, Ye Z. The asymptotic equipartition property for nonhomogeneous Markov chains indexed by a homogeneous tree[J]. IEEE Trans. Inform. The., 2007, 53(9): 3275–3280.

[10] Huang H L, Yang W G. Strong law of large numbers for Markov chains indexed by an infinite tree with uniformly bounded degree[J]. Sci. China, 2008, 51(2): 195–202.

[11] Shi Z Y, Yang W G. A limit property of random transition probability for a nonhomogeneous Markov chain indexed by a tree[J]. Acta Math. Appl. Sin., 2008, 31(4): 648–653.

[12] Wang B, Yang W G, Shi Z Y. Strong laws of large numbers for countable Markov chains indexed by a Cayley tree[J]. Sci. China, 2012, 42(10): 1031.

[13] Dang H, Yang W G, Shi Z Y. The strong law of large numbers and the entropy ergodic theorem for nonhomogeneous bifurcating Markov chains indexed by a binary tree[J]. IEEE Trans. Inform. The., 2015, 61(4): 1640–1648.

[14] Nawrotzki K. Discrete open systems or Markov chains in a random environment[J]. I. J. Inform. Proc. Cybernet, 1982, 17(1): 569–599.

[15] Nawrotzki K. Discrete open system or Markov chains in a random environment[J]. II. J. Inform. Proc. Cybernet, 1982, 18: 83–98.

[16] Cogburn R. On the central limit theorem for Markov chains in random environments[J]. Ann. Prob., 1991, 19(2): 587–604.

[17] Cogburn R. The ergodic theory of Markov chains in random environments[J]. Z. Wahrsch Verw. Gebiete, 1984, 66(1): 109–128.

[18] Cogburn R. On direct convergence and periodicity for transition probabilities of Markov chains in random environments[J]. Ann. Prob., 1990, 18(2): 642–654.

[19] Hu D H. The construction of Markov processes in random environments and the equivalence theorems[J]. Sci. China (Ser. A), 2004, 47(4): 481–496.

[20] Hu D H. The existence and uniqueness of q-process in random environment[J]. Sci. China (Ser. A), 2004, 47(5): 641–658.

[21] 李应求. 双无限随机环境中马氏链的瞬时性与不变函数 [J]. 数学年刊: 中文版, 2003, 24(4): 515–520.

[22] 李应求, 王苏明, 胡杨利. 马氏环境中马氏链的一类强极限定理 [J]. 数学进展, 2008, 37(5): 539–550.

[23] 石志岩, 杨卫国. 关于随机环境中树指标马氏链的定义及存在性 [J]. 系统科学与数学, 2015, 35(9): 1049–1058.

[24] Huang H L. The asymptotic behavior for markov chains in a finite i.i.d random environment indexed by Cayley trees[J]. Filomat, 2015, 31(2): 273–283.

[25] Guyon J. Limit theorems for bifurcating Markov chains: application to the detection of cellular aging[J]. Ann. Appl. Prob., 2007, 17(5/6): 1538–1569.

[26] 严加安. 测度论讲义 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.

A LIMIT PROPERTY OF RANDOM TRANSITION PROBABILITY FOR A MARKOV CHAIN INDEXED BY A TREE IN MARKOVIAN ENVIRONMENT

SHI Zhi-yan, BAO Dan, WU Bai-hui

(*School of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China*)

Abstract: In this paper, we study the tree-indexed Markov chain in random environment under discrete state and prove the realization of this stochastic process in the probability space. Meanwhile, the equivalence between tree-indexed Markov chains in Markov environment and tree-indexed Markov double chains is provided in this paper. Finally, the strong limit property of the harmonic mean of the random transition probability of tree indexed Markov chain in the Markovian environment is obtained under the finite state.

Keywords: Markovian environment; Markov chains; random transition probability; harmonic mean

2010 MR Subject Classification: 60F15; 60J10