Vol. 39 (2019)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

正则双单 ω^2 - 半群

汪立民 [1], 商 宇 [2], 冯莹莹 [3]

(1. 华南师范大学数学科学学院, 广东 广州 510631)
(2. 普洱学院数学与统计学院, 云南 普洱 665000)
(3. 佛山科学技术学院数学系, 广东 佛山 528000)

摘 要: 本文研究了幂等元的 ω^2 - 链及广义 Bruck-Reilly 扩张. 利用扩张的方法, 获得了正则双单 ω^2 - 半群的结构定理.

关键词: ω^2 - 链; 广义 Bruck-Reilly 扩张; ω^2 - 半群
MR(2010) **主题分类号**: 20M10 **中图分类号**: O152.7
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2019)04-0566-09

1 引言及背景知识

在文献 [1] 中, 通过对群 G 进行 Bruck-Reilly 扩张, Reilly 获得了正则双单 ω - 半群的 $BR(G,\theta)$ 结构. Warne 研究了正则双单 ω^n - 半群, 他在文献 [2] 中证明了正则双单 ω^n - 半群具有 $(G\times C_n,\circ)$ 的结构, 其中 G 为群, C_n 为 $2n$ - 循环半群, "$\circ$" 是一种乘法. 本文将用文献 [1] 的方法研究正则双单 ω^2 - 半群. 在本节中, 引入了 ω^2 - 链; 在第 2 节中, 将引入幺半群 T 的一种广义 Bruck-Reilly 扩张, 然后通过群 G 的关于它的两个同态 β,γ 及它的一个元 u 的广义 Bruck-Reilly 扩张, 得到正则双单 ω^2 - 半群; 在第 3 节中, 将证明任意一个正则双单 ω^2 - 半群都可以这样构造.

我们将使用文献 [3, 4] 的概念及记号, 其余相关概念参见文献 [3–16]. 在本文中, 映射作用在元素上都统一用映射写在元素的右侧来表示. 设 a,b 为半群 S 的元, 若 $S^1a=S^1b$, 则称 a,b 是 $\mathcal{L}$ - 相关的. 若 $aS^1=bS^1$, 则称 a,b 是 $\mathcal{R}$ - 相关的. 规定 $\mathcal{H}=\mathcal{L}\cap\mathcal{R}$ 且 $\mathcal{D}=\mathcal{L}\vee\mathcal{R}$. 可知 $\mathcal{L},\mathcal{R},\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{D}$ 是 S 上的等价关系且满足 $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{L}\subseteq\mathcal{D}$, $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{R}\subseteq\mathcal{D}$ 及 $\mathcal{D}=\mathcal{L}\circ\mathcal{R}=\mathcal{R}\circ\mathcal{L}$. 为了避免混淆, 记 S 上的关系 $\mathcal{K}$ 为 $\mathcal{K}(S)$. 用 L_a 记 S 上包含 a 的 $\mathcal{L}$ - 类, R_a 记 S 上包含 a 的 $\mathcal{R}$ - 类. 若半群 S 只含一个 $\mathcal{D}$ - 类, 则称它是双单的. 若对半群 S 的任一元 a, 存在唯一的 S 的元 x, 满足 $axa=a$ 且 $xax=x$, 则称半群 S 为逆半群, 称 x 为 a 的逆元, 记为 a^{-1}. 用 E_S 表示半群 S 的幂等元的集合. 在 E_S 上定义偏序 "$\leq$" 为 $e\leq f$ 当且仅当 $ef=fe=e$. 设 S 为半群且 $C_\omega=\{e_0,e_1,e_2,\cdots\}$, 其中 $e_0,e_1,e_2,\cdots$ 为幂等元且 $e_0>e_1>e_2>\cdots$, 若 $E_S\cong C_\omega$, 则称 S 为 ω - 半群. 用 N^0 表示所有非负整数的集合, N 表示所有正整数的集合, T 为具有单位元 e 的幺半群, θ 为从 T 到 T 的单位的群 H_e 的同态. 在 $N^0\times T\times N^0$ 上规定乘法为

$$(m,a,n)(p,b,q)=(m-n+t,(a\theta^{t-n})(b\theta^{t-p}),q-p+t),$$

*收稿日期: 2018-04-07 接收日期: 2018-09-12
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11871150); 普洱学院创新团队 (CXTD003).
作者简介: 汪立民 (1962–), 男, 湖北襄阳, 教授, 主要研究方向: 半群代数理论.
通讯作者: 商宇

其中 $t=\max\{n,p\}$, θ^0 为 T 的恒等映射, 则 $N^0\times T\times N^0$ 在上述乘法下构成一个半群, 称为 T 的由 θ 决定的 Bruck-Reilly 扩张, 记为 $\mathrm{BR}(T,\theta)$, 可知

$$(m,a,n)\mathcal{H}(p,b,q)\Leftrightarrow m=p,\ a\mathcal{H}b,\ n=q.$$

引理 1.1 [3] 设 G 为群, θ 为 G 的自同态, $S=\mathrm{BR}(G,\theta)$ 为 G 的由 θ 决定的 Bruck-Reilly 扩张, 则 S 为双单逆 ω - 半群. 反之, 任一个双单逆 ω - 半群同构于某一个 $\mathrm{BR}(G,\theta)$.

定义 1.2 在集合 $N^0\times N^0$ 上规定一个序为: $(m,n)\le(p,q)$ 当且仅当 $m>p$, 或 $m=p$ 且 $n\ge q$, 则称具有这样序的集合 $N^0\times N^0$ 为一个 ω^2 - 链, 记为 C_{ω^2}. 任一个序同构于 C_{ω^2} 的偏序集也称为 ω^2 - 链.

若半群 S 的幂等元集 E_S 序同构于 C_{ω^2}, 则称 S 为 ω^2 - 半群. 因此, 若 S 为 ω^2 - 半群, 则 $E_S=\{e_{m,n}:m,\ n\in N^0\}$, 其中 $e_{m,n}\le e_{p,q}$ 当且仅当 $(m,n)\le(p,q)$. 用 $R_{m,n}$ 表示 S 的包含幂等元 $e_{m,n}$ 的 $\mathcal{R}$ - 类, 用 $L_{m,n}$ 表示 S 的包含幂等元 $e_{m,n}$ 的 $\mathcal{L}$ - 类, 用 $H_{(m,n),(q,p)}$ 表示 $R_{m,n}\cap L_{p,q}$, 即

$$\begin{aligned}&R_{m,n}=\{a\in S:a\mathcal{R}e_{m,n}\},\ \ L_{p,q}=\{a\in S:a\mathcal{L}e_{p,q}\},\\&H_{(m,n),(q,p)}=\{a\in S:e_{m,n}\mathcal{R}a\mathcal{L}e_{p,q}\}.\end{aligned}$$

若 $H_{(m,n),(q,p)}\neq\emptyset$, 则 $H_{(m,n),(q,p)}$ 为 S 的一个 $\mathcal{H}$ - 类.

引理 1.3 [5] 设 S 为 ω^2 - 逆半群, 则 $H_{(m,n),(q,p)}H_{(a,b),(d,c)}\subseteq H_{(i,j),(l,k)}$, 其中

$$(i,j,l,k)=\begin{cases}(m,\max\{q,b\}-q+n,\max\{q,b\}-b+d,c), & \text{当 } p=a,\\(m,n,q,p-a+c), & \text{当 } p>a,\\(a-p+m,b,d,c), & \text{当 } p<a.\end{cases}$$

引理 1.4 设 S 为正则 ω^2 - 半群, 则 S 为具有单位元的 ω^2 - 逆半群. 特别地, 双单 ω^2 - 半群是双单 ω^2 - 逆半群.

证 设 S 为正则 ω^2 - 半群, e 和 f 为 S 的幂等元, 则 $e\le f$ 或 $f\le e$, 从而 $ef=fe=e$ 或 $ef=fe=f$. 不论何种情况, 都有 $ef=fe$. 因此 S 的幂等元可交换, 从而 S 为逆半群. 设 $E_S=\{e_{m,n}:m,\ n\in N^0\}$, 其中 $e_{m,n}\le e_{p,q}$ 当且仅当 $(m,n)\le(p,q)$. 设 a 为 S 的任一元, 则存在 S 的幂等元 $e_{m,n}$, 使得 $aa^{-1}=e_{m,n}$, 因此 $e_{0,0}a=e_{0,0}(e_{m,n}a)=(e_{0,0}e_{m,n})a=e_{m,n}a=a$. 类似有 $ae_{0,0}=a$, 于是 $e_{0,0}$ 是单位元, 故 S 为具有单位元的 ω^2 - 逆半群.

2 广义 Bruck-Reilly 扩张

在这一节中, 将引入一种广义 Bruck-Reilly 扩张, 对群和它的一对同态做这种扩张, 可得到正则双单 ω^2 - 半群. 在下一节中, 将证明任一个正则双单 ω^2 - 半群都可以这样构造出来.

设 T 为具有单位元 e 的幺半群, H_e 为 T 的包含 e 作为单位元的极大子群, u 为 H_e 的一个元,τ_u 为 H_e 的内部自同构, 即对任意 $g\in H_e$, 有 $g\tau_u=ugu^{-1}$. 设 β, γ 为从 T 到 H_e 的两个同态, 且满足 $\gamma\tau_u=\beta\gamma$, 其中 β^0, γ^0 为 T 的恒等映射, $u^0=e$. 对任意 $(m,n,t,q,p),(m',n',t',q',p')\in N^0\times N^0\times T\times N^0\times N^0$, 在 $N^0\times N^0\times T\times N^0\times N^0$ 上规

定乘法如下

$$
\begin{aligned}
&(m,n,a,q,p)(m',n',a',q',p')\\
=&\begin{cases}(m,n-q+\max\{q,n'\},a\beta^{\max\{q,n'\}-q}a'\beta^{\max\{q,n'\}-n'},\\ q'-n'+\max\{q,n'\},p'), & \text{当 } p=m',\\ (m,n,a(u^{-n'}a'\gamma u^{q'})\gamma^{p-m'-1}\beta^{q},q,p+p'-m'), & \text{当 } p>m',\\ (m+m'-p,n',(u^{-n}a\gamma u^{q})\gamma^{m'-p-1}\beta^{n'}a',q',p'), & \text{当 } p<m'.\end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

可以验证 (2.1) 式满足结合律, 由于证明过程是直接的和繁琐的, 因此省略了验证过程. 规定从 $\mathrm{BR}(T,\gamma)$ 到 $N^0\times N^0\times T\times N^0\times N^0$ 的映射 ϕ 为 $(m,a,n)\phi=(m,0,a,0,n)$. 显然 ϕ 为单射. 对任意 $(m,0,a,0,n),(m',0,a',0,n')\in N^0\times N^0\times T\times N^0\times N^0$, 有

$$
\begin{aligned}
&(m,0,a,0,n)(m',0,a',0,n')\\
=&(m-n+\max\{n,m'\},0,a\gamma^{\max\{n,m'\}-n}a'\gamma^{\max\{n,m'\}-m'},0,n'-m'+\max\{n,m'\}),
\end{aligned}
$$

从而 ϕ 为同态. 在这个观点下, 称上述构造的半群为 T 的由 β,γ,u 所决定的广义 Bruck-Reilly 扩张, 记为 $\mathrm{GBR}(T;\beta,\gamma;u)$. 可验证 (m,n,a,q,p) 为 $\mathrm{GBR}(T;\beta,\gamma;u)$ 的幂等元当且仅当 $m=p$, $n=q$ 且 a 为 T 的幂等元.

引理 2.1 设 $S=\mathrm{GBR}(T;\beta,\gamma;u)$ 为幺半群 T 的由 β,γ,u 所决定的广义 Bruck-Reilly 扩张, $(m,n,a,q,p),(m',n',a',q',p')$ 为 S 的任意元, 则

(1) $(m,n,a,q,p)\mathcal{R}(S)(m',n',a',q',p')$ 当且仅当 $m=m'$, $n=n'$ 及 $a\mathcal{R}(T)a'$.

(2) $(m,n,a,q,p)\mathcal{L}(S)(m',n',a',q',p')$ 当且仅当 $q=q'$, $p=p'$ 及 $a\mathcal{L}(T)a'$.

证 (1) 设 (m,n,a,q,p), (m',n',a',q',p') 为 S 的两个元且 $(m,n,a,q,p)\mathcal{R}(S)(m',n',a',q',p')$, 则存在 S 中的元 (x,y,b,z,w) 使得 $(m,n,a,q,p)(x,y,b,z,w)=(m',n',a',q',p')$, 从而

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases}(m,n-q+\max\{q,y\},a\beta^{\max\{q,y\}-q}b\beta^{\max\{q,y\}-y},z-y+\max\{q,y\},w), & \text{当 } p=x,\\ (m,n,a(u^{-y}b\gamma u^{z})\gamma^{p-x-1}\beta^{q},q,w-x+p), & \text{当 } p>x,\\ (m-p+x,y,(u^{-n}a\gamma u^{q})\gamma^{x-p-1}\beta^{y}b,z,w), & \text{当 } p<x\end{cases}\\
=&(m',n',a',q',p').
\end{aligned}
$$

比较第一分量, 得 $m'\geq m$. 对偶地, 有 $m\geq m'$, 从而 $m=m'$, 因此 $p\geq x$. 比较第二分量, 得 $n\leq n'$. 对偶地, 有 $n\geq n'$, 于是 $n=n'$. 若 $p=x$, 比较第二分量, 得 $\max\{q,y\}=q$, 从而

$$a\beta^{\max\{q,y\}-q}b\beta^{\max\{q,y\}-y}=ab\beta^{q-y}.$$

比较第三分量得 $a'=ab\beta^{q-y}$, 从而在 T 中有 $R_{a'}\leq R_a$. 若 $p>x$, 比较第三分量, 从而在 T 中有 $R_{a'}\leq R_a$. 对偶地, 有 $R_a\leq R_{a'}$. 故 $a\mathcal{R}(T)a'$.

反之, 若 $a\mathcal{R}(T)a'$, 则存在 T 的元 c, d, 使得 $ac=a'$ 且 $a'd=d$, 从而

$$
\begin{aligned}
(m,n,a,q,p)(p,q,c,q',p')=(m,n,a',q',p'),\\
(m,n,a',q',p')(p',q',d,q,p)=(m,n,a,q,p).
\end{aligned}
$$

故 $(m,n,a,q,p)\mathcal{R}(S)(m,n,a',q',p')$. (2) 类似可证.

引理 2.2 设 $S=\mathrm{GBR}(T;\beta,\gamma;u)$ 为幺半群 T 的由 β,γ,u 所决定的广义 Bruck-Reilly 扩张, 则 S 为逆半群当且仅当 T 是逆半群.

证 若 T 为逆半群, 则对 S 的任一元 (m,n,a,q,p), 有

$$\begin{aligned}(m,n,a,q,p)(p,q,a^{-1},n,m)(m,n,a,q,p)&=(m,n,aa^{-1},n,m)(m,n,a,q,p)\\&=(m,n,a,q,p)\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}(p,q,a^{-1},n,m)(m,n,a,q,p)(p,q,a^{-1},n,m)&=(p,q,a^{-1}a,q,p)(p,q,a^{-1},n,m)\\&=(p,q,a^{-1},n,m).\end{aligned}$$

因此 (m,n,a,q,p) 有逆元 (p,q,a^{-1},n,m), 于是 S 是正则的. 若 (m,n,e,n,m) 和 (m',n',e',n',m') 为 S 的两个幂等元, 则

$$\begin{aligned}&(m,n,e,n,m)(m',n',e',n',m')\\&=\begin{cases}(m,\max\{n,n'\},e\beta^{\max\{n,n'\}-n}e'\beta^{\max\{n,n'\}-n'},\max\{n,n'\},m'), & 当\ m=m',\\(m,n,e(u^{-n'}e'\gamma u^{n'})\gamma^{m-m'-1}\beta^{n},n,m), & 当\ m>m',\\(m',n',(u^{-n}e\gamma u^{n})\gamma^{m'-m-1}\beta^{n'}e',n',m'), & 当\ m<m'\end{cases}\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}&(m',n',e',n',m')(m,n,e,n,m)\\&=\begin{cases}(m',\max\{n,n'\},e'\beta^{\max\{n,n'\}-n'}e\beta^{\max\{n,n'\}-n},\max\{n,n'\},m), & 当\ m'=m,\\(m',n',e'(u^{-n}e\gamma u^{n})\gamma^{m'-m-1}\beta^{n'},n',m'), & 当\ m'>m,\\(m,n,(u^{-n'}e'\gamma u^{n'})\gamma^{m-m'-1}\beta^{n}e,n,m), & 当\ m'<m,\end{cases}\end{aligned}$$

由于 T 为逆半群, 幂等元可交换, 从而 S 的幂等元是可交换的.

反之, 若 S 为逆半群, 设 $(m,n,a,q,p)^{-1}=(x,y,b,z,w)$, 则

$$\begin{aligned}&(m,n,a,q,p)(x,y,b,z,w)\\&=\begin{cases}(m,n-q+\max\{q,y\},a\beta^{\max\{q,y\}-q}b\beta^{\max\{q,y\}-y},z-y+\max\{q,y\},w), & 当\ p=x,\\(m,n,a(u^{-y}b\gamma u^{z})\gamma^{p-x-1}\beta^{q},q,w-x+p), & 当\ p>x,\\(m-p+x,y,(u^{-n}a\gamma u^{q})\gamma^{x-p-1}\beta^{y}b,z,w), & 当\ p<x\end{cases}\end{aligned}$$

是幂等元且 $\mathcal{R}$ - 相关于 (m,n,a,q,p) 且 $\mathcal{L}$ - 相关于 (x,y,b,z,w), 从而 $p=x$. 由于

$$(m,n,a,q,p)(x,y,b,z,w)$$

是幂等元, 从而 $m=w$ 且 $n=n-q+\max\{q,y\}=z-y+\max\{q,y\}=z$, 因此 $q=y$, 于是

$$\begin{aligned}(m,n,a,q,p)&=(m,n,a,q,p)(p,q,b,n,m)(m,n,a,q,p)\\&=(m,n,ab,n,m)(m,n,a,q,p)=(m,n,aba,q,p)\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}(p,q,b,n,m) &= (p,q,b,n,m)(m,n,a,q,p)(p,q,b,n,m)\\ &= (p,q,ba,q,p)(p,q,b,n,m) = (p,q,bab,n,m).\end{aligned}$$

故在 T 中有 $a = aba$ 且 $b = bab$, 从而 T 是正则的. 若 e, f 为 T 的两个幂等元, 由于

$$(0,0,e,0,0)(0,0,f,0,0) = (0,0,f,0,0)(0,0,e,0,0),$$

从而 $ef = fe$. 因此 T 为逆半群.

定理 2.3 设 G 为群且单位元为 e, u 为 G 的元, β 和 γ 为 G 的同态, $S = \mathrm{GBR}(G;\beta;\gamma;u)$ 为 G 的由 β,γ,u 决定的广义 Bruck-Reilly 扩张, 则 $S = \mathrm{GBR}(G;\beta,\gamma;u)$ 为正则双单 ω^2 - 半群.

证 由引理 2.2 知, S 为正则半群. 设 (m,n,a,q,p), (m',n',a',q',p') 为 S 的任意两个元, 则

$$(m,n,a,q,p)\mathcal{R}(m,n,a,q',p')\mathcal{L}(m',n',a',q',p'),$$

从而 $(m,n,a,q,p)\mathcal{D}(m',n',a',q',p')$, 因此 S 是双单的. 设 (m,n,e,n,m), (m,n',e,n',m) 为 S 的任意两个幂等元且 $n < n'$, 则

$$(m,n',e,n',m) < (m,n,e,n,m).$$

若 (m,n,e,n,m), (m',n',e,n',m') 为 S 的两个幂等元且 $m < m'$, 则

$$(m,n,e,n,m)(m',n',e,n',m') = (m',n',e,n',m') = (m',n',e,n',m')(m,n,e,n,m),$$

从而 $(m',n',e,n',m') < (m,n,e,n,m)$, 因此 S 的幂等元构成一个链

$$\begin{aligned}&(0,0,e,0,0) > (0,1,e,1,0) > (0,2,e,2,0) > \cdots\\ &> (1,0,e,0,1) > (1,1,e,1,1) > (1,2,e,2,1) > \cdots\\ &> (2,0,e,0,2) > (2,1,e,1,2) > (2,2,e,2,2) > \cdots\\ &\qquad\qquad\qquad \vdots\end{aligned}$$

对任意 $m,n \in N^0$, 规定 $e_{m,n} = (m,n,e,n,m)$, 从而 S 的幂等元的集合为 $\{e_{m,n} : m,\ n \in N^0\}$ 且 $e_{m,n} \leq e_{p,q}$ 当且仅当 $(m,n) \leq (p,q)$. 因此 $S = GBR\,(G;\beta,\gamma;u)$ 为正则双单 ω^2 - 半群.

3 结构定理

在本节中, 我们将证明任一个正则双单 ω^2 - 半群同构于群 G 的由 β,γ,u 决定的 Bruck-Reilly 扩张 $\mathrm{GBR}(G;\beta,\gamma;u)$.

设 S 为正则双单 ω^2 - 半群, E_S 为 S 的幂等元的集合, 则

$$E_S = \{e_{m,n} : m,\ n \in N^0\}$$

构成 ω^2 - 链且 $e_{m,n} < e_{p,q}$ 当且仅当 $(m,n) < (p,q)$ 且 $e_{0,0}$ 为 S 的单位元. 设 $a \in H_{(0,0),(1,0)}$, $b \in H_{(0,0),(0,1)}$. 规定 $a^0 = e_{0,0}$ 且 $b^0 = e_{0,0}$, 则 $a^0 \in H_{(0,0),(0,0)}$. 假设 $a^{n-1} \in H_{(0,0),(n-1,0)}$, 则

$$a^n = a^{n-1}a \in H_{(0,0),(n-1,0)}H_{(0,0),(1,0)} \subseteq H_{(0,0),(n,0)}.$$

从而对任意非负整数 n, 有 $a^n \in H_{(0,0),(n,0)}$. 类似地, 设 m,n 为非负整数, 则

$$a^{-n} \in H_{(0,n),(0,0)},\ \ b^m \in H_{(0,0),(0,m)},\ \ b^{-m} \in H_{(m,0),(0,0)}$$

且

$$a^na^{-n} = e_{0,0},\ \ a^{-n}a^n = e_{0,n},\ \ b^mb^{-m} = e_{0,0},\ \ b^{-m}b^m = e_{m,0}.$$

由引理 1.3, 对 $H_{(0,0),(0,0)}$ 的任意元 g, 有 $b^{-m}a^{-n}ga^qb^p \in H_{(m,n),(q,p)}$. 对任意 $m,n,p,q \in N^0$, 规定从 $H_{(0,0),(0,0)}$ 到 $H_{(m,n),(q,p)}$ 的对应法则 σ 为 $g\sigma = b^{-m}a^{-n}ga^qb^p$. 若 $b^{-m}a^{-n}g_1a^qb^p = b^{-m}a^{-n}g_2a^qb^p$, 则

$$b^mb^{-m}a^{-n}g_1a^qb^pb^{-p} = b^mb^{-m}a^{-n}g_2a^qb^pb^{-p},$$

从而 $a^{-n}g_1a^q = a^{-n}g_2a^q$, 因此

$$a^na^{-n}g_1a^qa^{-q} = a^na^{-n}g_2a^qa^{-q},$$

于是 $g_1 = g_2$. 设 x 为 $H_{(m,n),(q,p)}$ 的任意元, 则

$$b^mxb^{-p} \in H_{(0,n),(q,0)},\ \ a^nb^mxb^{-p}a^{-q} \in H_{(0,0),(0,0)},$$

从而 $(a^nb^mxb^{-p}a^{-q})\sigma = x$, 因此 σ 为双射.

由于 $S = \bigcup\{H_{(m,n),(q,p)} | \ m,n,p,q \in N^0\}$, 从而由上述论证可知下列引理成立.

引理 3.1 设 $a \in H_{(0,0),(1,0)}$ 且 $b \in H_{(0,0),(0,1)}$, 则 S 的任一元都可唯一的表为 $b^{-m}a^{-n}ga^qb^p$ 的形式, 其中 $m,n,p,q \in N^0, g \in H_{(0,0),(0,0)}$.

设 $H_{(0,0),(0,0)} = G, g$ 为 G 的任一元, 则 $ag \in H_{(0,0),(1,0)}H_{(0,0),(0,0)} \subseteq H_{(0,0),(1,0)}$ 且 $bg \in H_{(0,0),(0,1)}H_{(0,0),(0,0)} \subseteq H_{(0,0),(0,1)}$, 从而由引理 3.1 知 ag 可唯一的表示为 $b^0a^0g'a^1b^0 = g'a$; bg 可唯一的表示为 $b^0a^0g''a^0b^1 = g''b$, 其中 $g', g'' \in G$. 设 β,γ 分别为 G 的按如下条件所决定的映射

$$ag = (g\beta)a, \quad bg = (g\gamma)b,$$

则

$$[(g_1g_2)\beta]a = a(g_1g_2) = (ag_1)g_2 = [(g_1\beta)a]g_2 = (g_1\beta)(ag_2) = (g_1\beta)(g_2\beta)a,$$
$$[(g_1g_2)\gamma]b = b(g_1g_2) = (bg_1)g_2 = [(g_1\gamma)b]g_2 = (g_1\gamma)(bg_2) = (g_1\gamma)(g_2\gamma)b.$$

由于 $aa^{-1} = e_{0,0}$ 且 $bb^{-1} = e_{0,0}$, 从而

$$(g_1g_2)\beta = (g_1\beta)(g_2\beta), \quad (g_1g_2)\gamma = (g_1\gamma)(g_2\gamma).$$

因此 β,γ 为 G 的自同态. 于是对任意 $n \in N^0$, 有

$$a^ng = a^{n-1}ag = a^{n-1}(g\beta)a = a^{n-2}(g\beta^2)a^2 = \cdots = (g\beta^n)a^n. \tag{3.1}$$

进一步地, 由于 $ga^{-n}\in H_{(0,n),(0,0)}$ 且 $a^na^{-n}=e_{0,0}$ 为 S 的单位元, 从而

$$ga^{-n}=e_{0,n}ga^{-n}=a^{-n}(a^ng)a^{-n}=a^{-n}(g\beta^n)a^na^{-n}=a^{-n}(g\beta^n). \tag{3.2}$$

类似地, 对任意 $n\in N^0$, 有

$$b^ng=(g\gamma^n)b^n,\quad gb^{-n}=b^{-n}(g\gamma^n). \tag{3.3}$$

令 $u=bab^{-1}$, 则 $u^{-1}=ba^{-1}b^{-1}$. 规定 $u^0=e_{0,0}$. 由于

$$ba^{-1}\in H_{(0,0),(0,1)}H_{(0,1),(0,0)}\subseteq H_{(0,0),(0,1)},$$

从而 $ba^{-1}=u^{-1}b$. 类似有

$$ba=ub,\quad ab^{-1}=b^{-1}u,\quad a^{-1}b^{-1}=b^{-1}u^{-1}.$$

因此, 对任意 $m,n,q,p\in N^0$, 有

$$ba^{-m}=u^{-m}b,\quad ba^n=u^nb,\quad a^qb^{-1}=b^{-1}u^q,\quad a^{-p}b^{-1}=b^{-1}u^{-p}. \tag{3.4}$$

引理 3.2 设 S 为正则双单 ω^2- 半群, G 为 S 的单位的群, $a\in H_{(0,0),(1,0)},b\in H_{(0,0),(0,1)}$, 则 $u=bab^{-1}\in G$ 且 $\gamma\tau_u=\beta\gamma$, 其中 τ_u 为 G 的内部自同构, 即对任意 $g\in G, g\tau_u=ugu^{-1}$.

证 由 $H_{(0,0),(0,1)}H_{(0,0),(1,0)}H_{(1,0),(0,0)}\subseteq H_{(0,0),(0,0)}$ 知 $u=bab^{-1}\in G$ 且对任意 $g\in G$, 有

$$\begin{aligned}u(g\gamma)&=(bab^{-1})g\gamma=ba(b^{-1}g\gamma)=ba(gb^{-1})=b(ag)b^{-1}=b(g\beta)ab^{-1}\\&=(b(g\beta))ab^{-1}=((g\beta\gamma)b)ab^{-1}=g\beta\gamma(bab^{-1})=g\beta\gamma u,\end{aligned}$$

因此对任意 $g\in G$, 有 $g\gamma\tau_u=ug\gamma u^{-1}=g\beta\gamma$, 于是 $\gamma\tau_u=\beta\gamma$.

定理 3.3 设 S 为正则双单 ω^2 - 半群, 则 $S\simeq \mathrm{GBR}(G;\beta,\gamma;u)$, 其中 G 为群, β,γ 都为 G 的自同态, $u\in G$.

证 设 G,β,γ,u 如前述所规定. 由引理 3.1 知, S 的每一元都可唯一表示为 $b^{-m}a^{-n}ga^qb^p$ 的形式, 其中 $m,n,p,q\in N^0, g\in G$. 设 $x=b^{-m}a^{-n}ga^qb^p$, $y=b^{-m'}a^{-n'}g'a^{q'}b^{p'}$, 其中 $g,\ g'\in G$. 分以下三种情形.

情形 1 若 $p=m'$, 则

$$xy=b^{-m}a^{-n}ga^qb^pb^{-m'}a^{-n'}g'a^{q'}b^{p'}=b^{-m}a^{-n}ga^{q-n'}g'a^{q'}b^{p'};$$

若 $q=n'$, 则

$$xy=b^{-m}a^{-n}gg'a^{q'}b^{p'};$$

若 $q>n'$, 则由 (3.1) 式知

$$xy=b^{-m}a^{-n}g(g'\beta^{q-n'})a^{q+q'-n'}b^{p'};$$

若 $q<n'$, 则由 (3.2) 式知

$$xy=b^{-m}a^{-(n-q+n')}(g\beta^{n'-q})g'a^{q'}b^{p'}.$$

情形 2 若 $p > m'$, 则由 (3.1), (3.3), (3.4) 式知

$$\begin{aligned}
xy &= b^{-m}a^{-n}ga^{q}b^{p-m'-1}ba^{-n'}g'a^{q'}b^{p'}\\
&= b^{-m}a^{-n}ga^{q}b^{p-m'-1}u^{-n'}bg'a^{q'}b^{p'}\\
&= b^{-m}a^{-n}ga^{q}(u^{-n'}\gamma^{p-m'-1})b^{p-m'-1}bg'a^{q'}b^{p'}\\
&= b^{-m}a^{-n}g(u^{-n'}\gamma^{p-m'-1}\beta^{q})a^{q}b^{p-m'}g'a^{q'}b^{p'}\\
&= b^{-m}a^{-n}g(u^{-n'}\gamma^{p-m'-1}\beta^{q})a^{q}(g'\gamma^{p-m'})b^{p-m'}a^{q'}b^{p'}\\
&= b^{-m}a^{-n}g(u^{-n'}\gamma^{p-m'-1}\beta^{q})(g'\gamma^{p-m'}\beta^{q})a^{q}b^{p-m'}a^{q'}b^{p'}\\
&= b^{-m}a^{-n}g(u^{-n'}\gamma^{p-m'-1}\beta^{q})(g'\gamma^{p-m'}\beta^{q})a^{q}b^{p-m'-1}u^{q'}b^{p'+1}\\
&= b^{-m}a^{-n}g(u^{-n'}\gamma^{p-m'-1}\beta^{q})(g'\gamma^{p-m'}\beta^{q})a^{q}(u^{q'}\gamma^{p-m'-1})b^{p-m'+p'}\\
&= b^{-m}a^{-n}g(u^{-n'}\gamma^{p-m'-1}\beta^{q})(g'\gamma^{p-m'}\beta^{q})(u^{q'}\gamma^{p-m'-1}\beta^{q})a^{q}b^{p-m'+p'}\\
&= b^{-m}a^{-n}g(u^{-n'}g'\gamma u^{q'})\gamma^{p-m'-1}\beta^{q}a^{q}b^{p-m'+p'}.
\end{aligned}$$

情形 3 若 $p < m'$, 则由 (3.2)–(3.4) 式知

$$\begin{aligned}
xy &= b^{-m}a^{-n}ga^{q}b^{-1}b^{p-m'+1}a^{-n'}g'a^{q'}b^{p'}\\
&= b^{-m}a^{-n}gb^{-1}u^{q}b^{p-m'+1}a^{-n'}g'a^{q'}b^{p'}\\
&= b^{-m}a^{-n}gb^{-1}b^{p-m'+1}(u^{q}\gamma^{m'-p-1})a^{-n'}g'a^{q'}b^{p'}\\
&= b^{-m}a^{-n}gb^{p-m'}a^{-n'}(u^{q}\gamma^{m'-p-1}\beta^{n'})g'a^{q'}b^{p'}\\
&= b^{-m}a^{-n}b^{p-m'}(g\gamma^{m'-p})a^{-n'}(u^{q}\gamma^{m'-p-1}\beta^{n'})g'a^{q'}b^{p'}\\
&= b^{-m}a^{-n}b^{p-m'}a^{-n'}(g\gamma^{m'-p}\beta^{n'})(u^{q}\gamma^{m'-p-1}\beta^{n'})g'a^{q'}b^{p'}\\
&= b^{-m}b^{-1}u^{-n}b^{p-m'+1}a^{-n'}(g\gamma^{m'-p}\beta^{n'})(u^{q}\gamma^{m'-p-1}\beta^{n'})g'a^{q'}b^{p'}\\
&= b^{-m-1}b^{p-m'+1}(u^{-n}\gamma^{m'-p-1})a^{-n'}(g\gamma^{m'-p}\beta^{n'})(u^{q}\gamma^{m'-p-1}\beta^{n'})g'a^{q'}b^{p'}\\
&= b^{p-m-m'}a^{-n'}(u^{-n}\gamma^{m'-p-1}\beta^{n'})(g\gamma^{m'-p}\beta^{n'})(u^{q}\gamma^{m'-p-1}\beta^{n'})g'a^{q'}b^{p'}\\
&= b^{-(m-p+m')}a^{-n'}(u^{-n}g\gamma u^{q})\gamma^{m'-p-1}\beta^{n'}g'a^{q'}b^{p'}.
\end{aligned}$$

因此从 S 到 $\mathrm{GBR}(G;\beta,\gamma;u)$ 的映射

$$\psi:\ \ (b^{-m}a^{-n}ga^{q}b^{p})\psi=(m,n,g,q,p)$$

为同构映射. 故 $S\simeq\mathrm{GBR}(G;\beta,\gamma;u)$.

参 考 文 献

[1] Reilly N R. Bisimple ω-semigroups[J]. Proc. Glasgow Math. Asso., 1966, 7: 160–167.

[2] Warne R J. Bisimple inverse semigroups mod groups[J]. Duke Math. J., 1967, 34: 787–811.

[3] Howie J M. Fundamentals of semigroup theory[M]. Oxford: Clarendon Press, 1995.

[4] Petrich M. Inverse semigroups[M]. New York: Wiley-Interscience, 1984.

[5] Shang Yu, Wang Limin. A class of regular simple ω^2-semigroups-I[J]. Adv. Math. (China), 2013, 42: 631–643.

[6] Chen Hui, Huang Hui, Guo Xiaojiang. On q^*-bisimple IC semigroups of type E[J]. Semigroup Forum, 2009, 78(1): 106–117.

[7] Guo Xiaojiang, Shum K P. On translational hulls of type-A semigroups[J]. J. Alg., 2003, 269: 240–249.

[8] Munn W D. 0-Bisimple inverse semigroups[J]. J. Alg., 1970, 15: 570–588.

[9] Munn W D. Regular ω-semigroups[J]. Glasgow Math. J., 1968, 9: 46–66.

[10] Shang Yu, Wang Linmin, Feng Yingying. A class of regular simple ω^2-semigroups-II[J]. Comm. Math. Res., 2013, 29: 351–362.

[11] Shang Yu, Wang Linmin. Regular bisimple ω^2-semigroups[J]. Adv. Math. (China), 2008, 37: 121–122.

[12] Shum K P, Du L, Guo Y Q. Green's relations and their generalizations on semigroups[J]. Discuss. Math. Gen. Algebra Appl., 2010, 30: 71–89.

[13] Shum K P, Guo Y Q. Regular semigroups and their generalizations in rings, groups, and algebras[J]. Lecture Notes Pure Appl. Math. Marcel Dekker INC., 1996: 181: 182–226.

[14] Wang Limin. Trace-kernel-operator semigroups of Bisimple ω-semigroups[J]. Semigroup Forum., 2000, 60: 424–435.

[15] Warne R J. A class of bisimple inverse semigroups[J]. Pacific J. Math., 1966: 563–577.

[16] Warne R J. I-bisimple semigroups[J]. Tran. Amer. Math. Soc., 1968, 130: 367–386.

REGULAR BISIMPLE ω^2-SEMIGROUPS

WANG Li-min[1], SHANG Yu[2], FENG Ying-ying[3]

(*1. School of Mathematics, South China Normal University, Guangzhou 510631, China*)

(*2. School of Mathematics and Statistics, Puer University, Puer 665000, China*)

(*3. Department of Mathematics, Foshan University, Foshan 528000, China*)

Abstract: In this paper, we study the ω^2-chain of idempotent elements and generalized Bruck-Reilly expansion. By using the expansion method, the structure theorem of regular bisimple ω^2-semigroups is obtained.

Keywords: ω^2-chain; generalized Bruck-Reilly extension; ω^2-semigroup

2010 MR Subject Classification: 20M10