

带跳随机利率与波动率模型的远期生效期权定价

薛广明¹, 邓国和²

(1. 广西财经学院信息与统计学院, 广西 南宁 530003)

(2. 广西师范大学数学与统计学院, 广西 桂林 541004)

摘要: 本文研究了市场利率, 基础资产价格及其波动率过程满足一类多元仿射跳扩散模型的远期生效期权定价问题, 其中市场利率和波动率过程与基础资产相关且具有共同跳跃风险成分. 利用 Fourier 反变换和远期测度技术, 获得了欧式远期生效看涨期权价格的解析显示解. 应用数值计算比较了利率, 波动率过程对期权价格的不同表现, 并分析了模型中主要参数对期权价格和对冲策略的影响. 数值结果表明, 利率和波动率因素, 以及跳跃风险参数对期权价格有显著作用, 这表明了多元仿射跳扩散模型具有较好拟合实际的能力.

关键词: 多元仿射跳扩散模型; 随机波动率; 随机利率; 远期生效期权; Fourier 反变换

MR(2010) 主题分类号: 60G20; 60H30; 90B25

中图分类号: O211.9

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2019)03-0414-17

1 引言

作为经典 Black-Scholes 模型^[1]的一类重要扩展模型, 2000 年, Duffie, Pan 和 Singleton 等^[2]学者提出的多元仿射跳扩散模型已广泛应用于金融市场中基础变量的建模和资产定价(如文献 [3–6]). 这是因为多元仿射跳扩散模型不仅能表达金融市场中资产价格的常规平稳运动, 而且能较好地捕捉市场的非常规变动(如尖峰厚尾, 波动聚集性, 价格自身杠杆效应, 突发事件爆发的暴涨暴跌等现象)和长期限特点. 另外, 该模型在数学分析与计算上具有易处理特性, 能比较方便地获得期权价格和对冲策略的解析式. 我们知道, 金融市场交易了大量奇异期权(例如, 障碍期权, 亚式期权, cliquet 期权或 ratchet 期权等), 作为构建基础金融工具的远期生效期权 (Forward-starting options)^[7]也引起了学术界和业界越来越多的关注. 远期生效期权是一种路径依赖型期权 (path-dependent options), 它是现在支付期权费但在未来某个时刻(称生效日)才生效的一种期权, 该时刻也是期权执行价格的确定时间. 可见, 远期生效期权的收益对基础资产的波动率非常敏感. 另外, 具有远期生效特征的金融衍生工具(如 cliquet 期权或 ratchet 期权)通常是三年以上的长期限产品. 显然, 在长期限内假设利率, 波动率等变量是常数不符合金融实际变化规律. 同样地, 长期限内金融市场也会发生非常规变动的突发事件. 因此, 需要综合考虑波动率和利率过程的随机变动, 同时还需要关注市场中突发事件的作用. 本文基于此, 在多元仿射跳扩散模型的基础上构建一类利率, 股价及其波动率过程满足具有相关性的随机跳跃风险的仿射期限结构模型, 并在此模型下讨论远期生效期权定价.

*收稿日期: 2017-08-05

接收日期: 2017-11-29

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11461008); 广西财经学院青年教师科研发展基金 (2018QNB07).

作者简介: 薛广明 (1985–), 男, 黑龙江齐齐哈尔, 讲师, 主要研究方向: 随机微分方程, 金融数学.

通讯作者: 邓国和

远期生效期权有两种基本类型,一种是期权的执行价格被设定为标的基础资产在期权生效日时价格的一定比例.另一种形式是基于标的基础资产的收益率,这种情形可以看成标的基础资产为到期日价格与生效日价格比值的欧式期权.这种引入不确定性执行价格的作用不仅能增强期权自身作为风险管理和投资工具的灵活性,而且增加了确定期权费用的难度.因此,该期权在金融风险管理和产品创新设计中有广泛应用.金融实务中,远期生效期权常常被保险公司用来管理蕴含于担保型股权挂钩寿险产品的风险,有时也被用来对雇员实施奖励,但对其定价仅是最近才受到关注.在经典 Black-Scholes 模型下,远期生效期权的定价可以较方便地转化为类似的欧式期权定价,如 Rubinstein^[8], Wilmott^[9], Zhang^[10] 等.随后, Lucić^[11], Kruse 和 Nögel^[12], Amerio^[13], 以及黄国安^[14] 等学者将经典 Black-Scholes 模型中的常数波动率推广到随机波动率模型,并在 Heston 随机波动率模型下给出了远期生效期权价格的解析解,并分析了解析解的数值计算. Hsieh^[15], Ahlip 和 Rutkowski^[16], Van Haastrecht 和 Pelsser^[17] 在假设标的基础资产价格过程同时包含随机利率和随机波动率的情况下获得了远期生效期权定价公式. Romo^[18], Zhang 和 Sun^[19] 考虑了多因子随机波动率模型下的远期生效期权定价问题,并给出了其解析表达式. Beyer 和 Kienitz^[20] 给出了时变 Levy 过程下的远期生效期权价格的解析表达式,并分析了 VG, NIG 等几个具体模型的定价封闭式解. Ramponi^[21] 讨论了结构转换跳扩散模型下的远期生效期权定价问题,分析了两个状态转换 Merton 跳扩散模型下的数值实例,并将其与经典 Black-Scholes 模型下的价格作比较.这些研究成果,尽管考虑了波动率过程,利率过程的时变性和随机性,也引入了跳扩散过程来刻画市场中的突发事件,但对波动率过程,利率过程的建模假设仅限于平稳运动且基于利率过程与标的基础资产之间的独立假定.显然,这些假设条件过于简单.因为金融现实中,波动率,利率过程均与标的基础资产之间具有紧密的统计依赖关系,且可能存在共同的跳跃风险作用.

本文在前人已有研究成果的基础上,讨论一类含跳风险的随机波动率和随机利率仿射扩散模型下远期生效期权定价问题.主要贡献为:首先,利用多元仿射跳扩散过程的特点建立了瞬时利率,基础资产及其波动率行为的动力学模型,该模型中波动率,利率过程与基础资产均受常规和非常规的因素影响,且利率,波动率过程与基础资产之间存在共同跳跃风险成分.利用带跳的 Feynman-Kac 定理建立了欧式未定权益满足的偏微分-积分方程,并利用仿射期限结构特点,获得了多元随机变量的折现联合条件特征函数的显示解.其次,应用 Fourier 反变换方法和远期概率测度技术,研究了两类欧式远期生效看涨期权的定价,分别获得这些期权价格计算的显示公式,为金融风险管理(如对冲策略的计算)提供便利.最后,给出数值计算实例,比较了利率或波动率过程对期权价格的不同表现,以及利率,波动率过程中共同跳跃风险因素对期权价格和 Δ 对冲策略的影响.

2 模型设定

考虑一个无套利,无摩擦,且可连续自由进行交易的不完全市场,交易有限期限为 $\mathcal{T} = [0, T]$, $T < \infty$. 该市场存在两类交易证券,第一类证券为无风险债券或银行存款账户,其收益按年无风险利率进行连续复利计算.第二类证券为风险资产(也称标的基础资产.例如,股票),其收益 S_t 受市场中不确定性因素的影响.现设市场中所有不确定性因素均定义在一个带有信息滤波的给定完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}, Q)$ 上,其中该概率空间上定义了四维标准布朗运动 $\{W_t = (W_{1,t}, W_{2,t}, W_{3,t}, W_{4,t})', t \in \mathcal{T}\}$ 和三维纯跳跃过程 $Z_t = (Z_t^x, Z_t^v, Z_t^r)'$,

Q 是风险中性概率测度, 信息滤波 $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ 为满足通常条件的完备参考族. 假定在风险中性概率 Q 下, 股票对数回报 $X_t = \ln S_t$ 满足下列带跳的随机微分方程

$$\begin{aligned} d \begin{pmatrix} X_t \\ v_t \\ r_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{r_t - v_t}{2} - \lambda \mu \\ \kappa_1(\gamma_1 - v_t) \\ \kappa_2(\gamma_2 - r_t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \rho_1 \sqrt{v_t} & \rho_2 \sqrt{r_t} & \sqrt{1 - \rho_1^2} \sqrt{v_t} & \sqrt{1 - \rho_2^2} \sqrt{r_t} \\ \sigma_1 \sqrt{v_t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \sqrt{r_t} & 0 & 0 \end{pmatrix} dW_t \\ &\quad + d \begin{pmatrix} Z_t^x \\ Z_t^v \\ Z_t^r \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中 r_t 为短期瞬时无风险利率, v_t 是股票的波动率过程, ρ_1 为股价 S_t 与其波动率 v_t 之间的相关系数, ρ_2 为股价 S_t 与无风险利率 r_t 之间的相关系数, 且 ρ_1, ρ_2 均为常数. 另外, 参数 $\kappa_1, \theta_1, \sigma_1$ 与 $\kappa_2, \theta_2, \sigma_2$ 分别刻画波动率与无风险利率各自的均值回复速度, 长期平均水平和标准差, 假定它们均为非负常数, 并满足 $2\kappa_i \gamma_i \geq \sigma_i^2$, $i = 1, 2$. 纯跳跃过程 $Z_t = (Z_t^x, Z_t^v, Z_t^r)'$ 的分量定义分别为下列复合 Poisson 过程

$$Z_t^x = \sum_{n=1}^{N_{1,t}} Y_{1,n}, \quad Z_t^v = \sum_{n=1}^{N_{1,t}} Y_{2,n}, \quad Z_t^r = \sum_{n=1}^{N_{2,t}} Y_{3,n}. \quad (2.2)$$

这里 $N_{1,t}$ 与 $N_{2,t}$ 是强度参数分别为常数 λ_1 与 λ_2 的两个相互独立的 Poisson 过程, $N_t = N_{1,t} + N_{2,t}$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. 序列 $Y_1 = (Y_{1,n})_{n \geq 1}$ 独立同分布, 表示股价的随机跳跃幅度, 序列 $Y_2 = (Y_{2,n})_{n \geq 1}$ 独立同分布, 表示股票波动率的随机跳跃幅度, 序列 $Y_3 = (Y_{3,n})_{n \geq 1}$ 独立同分布, 表示利率的随机跳跃幅度. 假设 Z_t 的联合随机跳跃幅度之分布具有跳变换 θ :

$$\theta(c_1, c_2, c_3) = \frac{\lambda_1 \theta_1(c_1, c_2) + \lambda_2 \theta_2(c_1, c_3)}{\lambda}, \quad (2.3)$$

其中

$$\theta_1(c_1, c_2) = \frac{\exp\left(\mu_{x,v} c_1 + \frac{1}{2} \sigma_{x,v}^2 c_1^2\right)}{1 - \rho_v \mu_v c_1 - \mu_v c_2}, \quad \theta_2(c_1, c_3) = \frac{\exp\left(\mu_{x,r} c_1 + \frac{1}{2} \sigma_{x,r}^2 c_1^2\right)}{1 - \rho_r \mu_r c_1 - \mu_r c_3}. \quad (2.4)$$

这里 ρ_v, ρ_r 分别是随机变量序列 Y_1 与 Y_2 , 以及 Y_1 与 Y_3 之间的相关系数. 系数 $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$, $\mu = \theta(1, 0, 0) - 1$. 假定 $\rho_v, \rho_r, \mu_v, \mu_r, \mu_{x,v}, \mu_{x,r}, \sigma_{x,v}$ 与 $\sigma_{x,r}$ 均为常数.

注 2.1 式 (2.3)–(2.4) 的跳变换来源于下述假定: $Y_2 \sim \text{Exp}(\frac{1}{\mu_v})$, $Y_3 \sim \text{Exp}(\frac{1}{\mu_r})$, 且 $Y_1|Y_2 \sim N(\mu_{x,v} + \rho_v Y_2, \sigma_{x,v}^2)$, $Y_1|Y_3 \sim N(\mu_{x,r} + \rho_r Y_3, \sigma_{x,r}^2)$, 即模型 (2.1)–(2.4) 不仅考虑了股价与其波动率之间的共同跳跃, 并且考虑了股价与无风险利率之间的共同跳跃. 它们共同跳跃的强度分别为 λ_1 和 λ_2 , 且基于波动率, 无风险利率的跳跃幅度边际分布满足指数分布的条件下对应的股价跳跃幅度服从正态分布. 进一步, 还可以考虑股价, 波动率过程, 以及无风险利率各自的独立跳跃情形, 将模型 (2.1)–(2.4) 扩展至一般情形, 这只需修改假设 (2.2)–(2.3), 增加独自的跳变换, 理论研究上与本文无本质差异, 但实证研究与数学计算上会很复杂. 本文记这类模型为 JSVSI 模型 (Stochastic Volatility and Stochastic Interest Rate with Jumps).

注 2.2 当 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ 时, JSVSI 模型退化为 Ahlip 和 Rutkowski^[16], 以及 Deng^[22] 的工作. 当 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ 且 $r_t = 0$ 时, JSVSI 模型变为 Heston 的随机波动率模型 (即 SV

模型^[23]. 当 $\lambda_2 = 0$ 且 $r_t = 0$ 时, JSVSI 模型变为随机波动率跳扩散模型 (即 JSV 模型^[24]). 当 $\lambda_1 = 0$ 且 $v_t = 0$ 时, JSVSI 模型变为随机利率跳扩散模型 (即 JSI 模型). 故本文市场模型具有较广泛的适应性.

注 2.3 应用 Duffie 等人^[2] 方法, 容易验证模型 (2.1)–(2.4) 具有仿射结构特征. 另外, 考虑利率与波动率之间存在相关的情形, 这将导致模型不再是仿射结构模型, 且数学上不易处理, 可能需要近似计算 (见文献 [25]).

按照风险中性定价原理, 该市场中所有交易证券的折现过程是 $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ -鞅过程. 记该市场中到期期限为 T , 收益依赖于变量 (X_t, v_t, r_t) 的任意可交易证券 t 时刻的价格为 $F(t, x, v, r)$, 且该证券到期日 T 时的收益为 $H(X_T, v_T, r_T) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$, 于是在风险中性概率 Q 下, 有

$$\begin{aligned} F(t, x, v, r) &= E^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} H(X_T, v_T, r_T) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= E^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} H(X_T, v_T, r_T) \middle| X_t = x, v_t = v, r_t = r \right] \\ &:= E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} H(X_T, v_T, r_T) \right]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

进一步, 应用半鞅 Itô 公式与带跳的 Feynman-Kac 定理, 可得 $F = F(t, x, v, r)$ 满足下列抛物型偏微分-积分方程

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}(r+v)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \rho_1\sigma_1v\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial v} + \frac{1}{2}\sigma_1^2v\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + \rho_2\sigma_2r\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_2^2r\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\ &+ [\frac{1}{2}(r-v) - \lambda\mu]\frac{\partial F}{\partial x} + \kappa_1(\gamma_1-v)\frac{\partial F}{\partial v} + \kappa_2(\gamma_2-r)\frac{\partial F}{\partial r} - rF \\ &+ \lambda_1 \int \int_{R^2} [F(t, x+y_1, v+y_2, r) - F(t, x, v, r)] f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \\ &+ \lambda_2 \int \int_{R^2} [F(t, x+y_1, v, r+y_3) - F(t, x, v, r)] f_{Y_1, Y_3}(y_1, y_3) dy_1 dy_3 = 0, \\ &F(T, x, v, r) = H(x, v, r), \end{aligned} \right. \quad (2.6)$$

其中 $R^2 = (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$, 以及 $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$ 和 $f_{Y_1, Y_3}(y_1, y_3)$ 分别是随机向量 (Y_1, Y_2) 和 (Y_1, Y_3) 的联合概率密度函数, 其值由注 2.1 确定.

记 $\Phi(t, x, v, r; u_1, u_2, u_3, T) = E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds + iu_1 X_T + iu_2 V_T + iu_3 r_T} \right]$ 为随机向量 (X_T, v_T, r_T) 基于 t 时刻值 $(x_t, v_t, r_t) = (x, v, r)$ 下的折项联合条件特征函数, 其中 $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{C}$, $t \in [0, T]$, i 为虚数单位.

引理 2.1 设股价 S_t 满足模型 (2.1)–(2.4), 则联合条件特征函数 $\Phi(t, x, v, r; u_1, u_2, u_3, T)$ 具有解析表达式 $\exp\{iu_1 x + A(\tau, u_1, u_2, u_3) + B(\tau, u_1, u_2, u_3)v + C(\tau, u_1, u_2, u_3)r\}$, 其中

$$\begin{aligned} \tau &= T - t, \quad a_1(u) = (\kappa_1 - iu\rho_1\sigma_1), \quad b_1(u) = \frac{1}{2}iu(iu - 1), \quad d_1(u) = \sqrt{a_1^2(u) - 2\sigma_1^2 b_1(u)}, \\ a_2(u) &= (\kappa_2 - iu\rho_2\sigma_2), \quad b_2(u) = \frac{1}{2}iu(iu + 1) - 1, \quad d_2(u) = \sqrt{a_2^2(u) - 2\sigma_2^2 b_2(u)}, \end{aligned}$$

以及

$$B(t, u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{\sigma_1^2} \left[a_1(u_1) + d_1(u_1) - \frac{2d_1(u_1)}{1 - g_1(u_1, u_2)e^{-d_1(u_1)t}} \right], \quad (2.7)$$

$$C(t, u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{\sigma_2^2} \left[a_2(u_1) + d_2(u_1) - \frac{2d_2(u_1)}{1 - g_2(u_1, u_3)e^{-d_2(u_1)t}} \right], \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} A(t, u_1, u_2, u_3) = & -\lambda(iu_1\mu + 1)t + \frac{\kappa_1\gamma_1[a_1(u_1) - d_1(u_1)]t}{\sigma_1^2} - \frac{2\kappa_1\gamma_1}{\sigma_1^2} \ln \left[\frac{1 - g_1(u_1, u_2)e^{-d_1(u_1)t}}{1 - g_1(u_1, u_2)} \right] \\ & + \frac{\kappa_2\gamma_2[a_2(u_1) - d_2(u_1)]t}{\sigma_2^2} - \frac{2\kappa_2\gamma_2}{\sigma_2^2} \ln \left[\frac{1 - g_2(u_1, u_3)e^{-d_2(u_1)t}}{1 - g_2(u_1, u_3)} \right] \\ & + \lambda_1 \exp \left[iu_1\mu_{x,v} - \frac{1}{2}u_1^2\sigma_{x,v}^2 \right] \left\{ \frac{t}{e_1(u_1)} + \frac{1}{d_1(u_1)} \left[\frac{1}{e_1(u_1)} + \frac{1}{\vartheta_1(u_1)} \right] \right. \\ & \cdot \ln \left[\frac{e_1(u_1) - \vartheta_1(u_1)g_1(u_1, u_2)e^{-d_1(u_1)t}}{e_1(u_1) - \vartheta_1(u_1)g_1(u_1, u_2)} \right] \left. \right\} \\ & + \lambda_2 \exp \left[iu_1\mu_{x,r} - \frac{1}{2}u_1^2\sigma_{x,r}^2 \right] \left\{ \frac{t}{e_2(u_1)} + \frac{1}{d_2(u_1)} \left[\frac{1}{e_2(u_1)} + \frac{1}{\vartheta_2(u_1)} \right] \right. \\ & \cdot \ln \left[\frac{e_2(u_1) - \vartheta_2(u_1)g_2(u_1, u_3)e^{-d_2(u_1)t}}{e_2(u_1) - \vartheta_2(u_1)g_2(u_1, u_3)} \right] \left. \right\}, \quad (2.9) \end{aligned}$$

$$e_1(u) = \vartheta_1(u) + \frac{2\mu_v d_1(u)}{\sigma_1^2}, \quad \vartheta_1(u) = 1 - iu\mu_v\rho_v - \frac{\mu_v}{\sigma_1^2} [a_1(u) + d_1(u)],$$

$$e_2(u) = \vartheta_2(u) + \frac{2\mu_r d_2(u)}{\sigma_2^2}, \quad \vartheta_2(u) = 1 - iu\mu_r\rho_r - \frac{\mu_r}{\sigma_2^2} [a_2(u) + d_2(u)],$$

$$g_1(u_1, u_2) = \frac{iu_2\sigma_1^2 - a_1(u_1) + d_1(u_1)}{iu_2\sigma_1^2 - a_1(u_1) - d_1(u_1)}, \quad g_2(u_1, u_3) = \frac{iu_3\sigma_2^2 - a_2(u_1) + d_2(u_1)}{iu_3\sigma_2^2 - a_2(u_1) - d_2(u_1)}.$$

证 应用半鞅 Itô 公式与带跳的 Feynman-Kac 定理, 可得函数 $\Phi = \Phi(t, x, v, r; u_1, u_2, u_3, T)$ 也满足抛物型偏微分 - 积分方程 (2.6), 且边界条件

$$H(x, v, r) = \Phi(T, x, v, r; u_1, u_2, u_3, T) = e^{iu_1 X_T + iu_2 v_T + iu_3 r_T}.$$

由于市场模型具有仿射结构特征. 因此, 方程 (2.6) 的解 Φ 具有指数形式

$$\exp\{iu_1 x + A(t, u_1, u_2, u_3) + B(t, u_1, u_2, u_3)v + C(t, u_1, u_2, u_3)r\}.$$

于是, 将其代入方程 (2.6), 则待定系数

$$A(t) = A(t, u_1, u_2, u_3), \quad B(t) = B(t, u_1, u_2, u_3), \quad C(t) = C(t, u_1, u_2, u_3)$$

分别满足下列常系数一阶线性微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 B^2 - (\kappa_1 - iu_1\rho_1\sigma_1)B + \frac{1}{2}iu_1(iu_1 - 1) = 0, \\ B(T, u_1, u_2, u_3) = iu_2 \end{cases} \quad (2.10)$$

和

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 C^2 - (\kappa_2 - iu_1\rho_2\sigma_2)C + \frac{1}{2}iu_1(iu_1 + 1) - 1 = 0, \\ C(T, u_1, u_2, u_3) = iu_3, \end{cases} \quad (2.11)$$

以及

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \kappa_1 \gamma_1 B + \kappa_2 \gamma_2 C + \lambda_1 \theta_1(iu_1, B) + \lambda_2 \theta_2(iu_1, C) - \lambda(iu_1 \mu + 1) = 0, \\ A(T, u_1, u_2, u_3) = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

先解方程 (2.10), (2.11). 应用文 [6] 中引理 2.1 的证明, 可得 (2.7), (2.8) 式.

下面解方程 (2.12). 显然

$$\begin{aligned} A(\tau) &= \kappa_1 \gamma_1 \int_0^\tau B(s) ds + \kappa_2 \gamma_2 \int_0^\tau C(s) ds + \lambda_1 \int_0^\tau \theta_1(iu_1, B(s)) ds \\ &\quad + \lambda_2 \int_0^\tau \theta_2(iu_1, C(s)) ds - \lambda(iu_1 \mu + 1) \tau. \end{aligned} \quad (2.13)$$

将 (2.7), (2.8) 式中的 $B(t), C(t)$ 代入 (2.13) 式中右边四个定积分, 经繁琐计算, 分别得

$$\begin{aligned} \int_0^\tau B(s) ds &= \left[\frac{a_1(u_1) - d_1(u_1)}{\sigma_1^2} \right] \tau - \frac{2}{\sigma_1^2} \ln \left[\frac{1 - g_1(u_1, u_2) e^{-d_1(u_1) \tau}}{1 - g_1(u_1, u_2)} \right], \\ \int_0^\tau C(s) ds &= \left[\frac{a_2(u_1) - d_2(u_1)}{\sigma_2^2} \right] \tau - \frac{2}{\sigma_2^2} \ln \left[\frac{1 - g_2(u_1, u_3) e^{-d_2(u_1) \tau}}{1 - g_2(u_1, u_3)} \right], \\ \int_0^\tau \theta_1(iu_1, B(s)) ds &= \exp \left[iu_1 \mu_{x,v} + \frac{1}{2} (iu_1)^2 \sigma_{x,v}^2 \right] \int_0^\tau \frac{1}{1 - iu_1 \rho_v \mu_v - \mu_v B(s)} ds \\ &= \exp \left[iu_1 \mu_{x,v} - \frac{1}{2} u_1^2 \sigma_{x,v}^2 \right] \left\{ \frac{\tau}{e_1(u_1)} + \frac{1}{d_1(u_1)} \left[\frac{1}{e_1(u_1)} + \frac{1}{\vartheta_1(u_1)} \right] \right. \\ &\quad \cdot \ln \left[\frac{e_1(u_1) - \vartheta_1(u_1) g_1(u_1, u_2) e^{-d_1(u_1) \tau}}{e_1(u_1) - \vartheta_1(u_1) g_1(u_1, u_2)} \right] \Big\}, \\ \int_0^\tau \theta_2(iu_1, C(s)) ds &= \exp \left[iu_1 \mu_{x,r} + \frac{1}{2} (iu_1)^2 \sigma_{x,r}^2 \right] \int_0^\tau \frac{1}{1 - iu_1 \rho_r \mu_r - \mu_r C(s)} ds \\ &= \exp \left[iu_1 \mu_{x,r} - \frac{1}{2} u_1^2 \sigma_{x,r}^2 \right] \left\{ \frac{\tau}{e_2(u_1)} + \frac{1}{d_2(u_1)} \left[\frac{1}{e_2(u_1)} + \frac{1}{\vartheta_2(u_1)} \right] \right. \\ &\quad \cdot \ln \left[\frac{e_2(u_1) - \vartheta_2(u_1) g_2(u_1, u_3) e^{-d_2(u_1) \tau}}{e_2(u_1) - \vartheta_2(u_1) g_2(u_1, u_3)} \right] \Big\}. \end{aligned}$$

由 (2.13) 式及上述四个积分表达式, 整理得 (2.9) 式.

注 2.4 (1) 当 $\lambda_1 = \rho_1 = \kappa_1 = \gamma_1 = \sigma_1 = 0$ 时 (即 JSI 模型), 则

$$\begin{aligned} &A(t, u_1, u_2, u_3) \\ &= -\lambda_2(iu_1 \mu + 1)t + \frac{\kappa_2 \gamma_2 [a_2(u_1) - d_2(u_1)]t}{\sigma_2^2} - \frac{2\kappa_2 \gamma_2}{\sigma_2^2} \ln \left[\frac{1 - g_2(u_1, u_3) e^{-d_2(u_1)t}}{1 - g_2(u_1, u_3)} \right] \\ &\quad + \lambda_2 \exp \left[iu_1 \mu_{x,r} - \frac{1}{2} u_1^2 \sigma_{x,r}^2 \right] \left\{ \frac{t}{e_2(u_1)} + \frac{1}{d_2(u_1)} \left[\frac{1}{e_2(u_1)} + \frac{1}{\vartheta_2(u_1)} \right] \right. \\ &\quad \cdot \ln \left[\frac{e_2(u_1) - \vartheta_2(u_1) g_2(u_1, u_3) e^{-d_2(u_1)t}}{e_2(u_1) - \vartheta_2(u_1) g_2(u_1, u_3)} \right] \Big\}, \\ &B(t, u_1, u_2, u_3) = iu_2 + b_1(u_1)t. \end{aligned}$$

(2) 当 $\lambda_2 = \rho_2 = \kappa_2 = \gamma_2 = \sigma_2 = 0$ 时 (即 JSV 模型), 则

$$\begin{aligned} & A(t, u_1, u_2, u_3) \\ = & -\lambda_1(iu_1\mu + 1)t + \frac{\kappa_1\gamma_1[a_1(u_1) - d_1(u_1)]t}{\sigma_1^2} - \frac{2\kappa_1\gamma_1}{\sigma_1^2} \ln \left[\frac{1 - g_1(u_1, u_2)e^{-d_1(u_1)t}}{1 - g_1(u_1, u_2)} \right] \\ & + \lambda_1 \exp \left[iu_1\mu_{x,v} - \frac{1}{2}u_1^2\sigma_{x,v}^2 \right] \left\{ \frac{t}{e_1(u_1)} + \frac{1}{d_1(u_1)} \left[\frac{1}{e_1(u_1)} + \frac{1}{\vartheta_1(u_1)} \right] \right. \\ & \cdot \ln \left[\frac{e_1(u_1) - \vartheta_1(u_1)g_1(u_1, u_2)e^{-d_1(u_1)t}}{e_1(u_1) - \vartheta_1(u_1)g_1(u_1, u_2)} \right] \left. \right\}, \\ & C(t, u_1, u_2, u_3) = iu_3 + b_2(u_1)t. \end{aligned}$$

现令 $u_1 = u_2 = u_3 \equiv 0$, 并记 T -期无风险零息票债券 t ($t < T$) 时刻的价格为 $P(t, T)$, 则

引理 2.2 在模型 (2.1)–(2.4) 下, T -期无风险零息票债券 t 时刻的价格, $P(t, T) = P(t, r, t + \tau)$ 等于

$$P(t, r, t + \tau) = \exp\{a(\tau) + c(\tau)r_t\}, \quad (2.14)$$

其中 $a(\tau) = A(\tau, 0, 0, 0)$, $c(\tau) = C(\tau, 0, 0, 0)$.

3 远期生效期权定价

本节考虑标的资产为股票的欧式远期生效期权定价. 首先给出远期生效期权的定义, 再给出欧式远期生效期权的定价. 远期生效期权是一种在未来某指定时刻才开始生效的金融工具, 它有两种类型. 一类是该期权在到期日 T 时刻的收益基于标的资产 S_T , 但执行价却设定为标的资产在生效时刻 T_0 ($T_0 < T$) 价格的一定比例 ($k \in (0, 1)$, 也称相对执行价). 另一类是该期权在到期日 T 时刻的收益基于标的资产在到期日 T 与生效时刻 T_0 ($T_0 < T$) 的价格之比 $\frac{S_T}{S_{T_0}}$ (称标的资产的回报率), 执行价设定为 K ($K > 0$, 称绝对执行价). 于是, 远期生效期权在到期日 T 时刻的收益为

$$\text{类型 I: } \left[\eta(S_T - kS_{T_0}) \right]^+, \quad (3.1)$$

$$\text{类型 II: } \left[\eta \left(\frac{S_T}{S_{T_0}} - K \right) \right]^+, \quad (3.2)$$

这里 $x^+ = \max\{x, 0\}$ 且 $\eta = 1$ 表示看涨期权 (call option), $\eta = -1$ 表示看跌期权 (put option). 本节仅讨论欧式远期生效看涨期权的定价, 即 $\eta = 1$. 对于看跌情形可类似讨论.

记类型 I (或类型 II) 的欧式远期生效看涨期权在 $t \in [0, T]$ 时刻的价格为 $C_I(t, x, v, r, T_0, T, k)$ (或 $C_{II}(t, x, v, r, T_0, T, K)$). 于是由 (2.5) 式可得

$$C_I(t, x, v, r, T_0, T, k) = E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} (S_T - kS_{T_0})^+ \right] \quad (3.3)$$

或

$$C_{II}(t, x, v, r, T_0, T, K) = E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \left(\frac{S_T}{S_{T_0}} - K \right)^+ \right]. \quad (3.4)$$

定理 3.1 设股价 S_t 满足模型 (2.1)–(2.4), 则当 $t \in [T_0, T]$ 时,

$$C_I(t, x, v, r, T_0, T, k) = e^x \Pi_1 - k S_{T_0} P(t, T) \Pi_2, \quad (3.5)$$

$$C_{II}(t, x, v, r, T_0, T, K) = \frac{C_I(t, x, v, r, T_0, T, K)}{S_{T_0}}, \quad (3.6)$$

其中 $\Pi_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left[\frac{e^{-iu \ln(k S_{T_0})} \phi_j(u)}{iu} \right] du$, $j = 1, 2$, $\tau = T - t$, 以及

$$\phi_1(u) = \exp\{iux + A(\tau, u - i, 0, 0) + B(\tau, u - i, 0, 0)v + C(\tau, u - i, 0, 0)r\},$$

$$\begin{aligned} \phi_2(u) = & \exp\{iux + [A(\tau, u, 0, 0) - A(\tau, 0, 0, 0)] + B(\tau, u, 0, 0)v \\ & + [C(\tau, u, 0, 0) - C(\tau, 0, 0, 0)]r\}, \end{aligned}$$

这里 $\Re[\cdot]$ 表示 $[\cdot]$ 的实部, i 是虚数单位, 函数 A, B, C 的值由 (2.7)–(2.9) 式给出.

证 先证 (3.5) 式. 由于当前时间 $t \in [T_0, T]$, 故 S_{T_0} 是一个已知数, 于是 (3.2) 式退化为欧式标准看涨期权的计算. 为此记 $\hat{K} = k S_{T_0}$, 由 (3.2) 式可知

$$\begin{aligned} C_I(t, x, v, r, T_0, T, k) &= E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} S_T I_{(\ln S_T \geq \ln \hat{K})} \right] - \hat{K} E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} I_{(\ln S_T \geq \ln \hat{K})} \right] \\ &= S_t E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \frac{S_T}{S_t} I_{(X_T \geq \ln \hat{K})} \right] - \hat{K} P(t, T) E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \frac{1}{P(t, T)} I_{(X_T \geq \ln \hat{K})} \right], \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中 I_A 是集合 A 的示性函数. 仿文 [22] 的思想, 应用计价单位变换法简化计算式 (3.7) 中的两个条件期望值. 对第一个期望值, 选择股价 S_t 作为计价单位, 并将概率测度 Q 变换到测度 Q_1 , 第二个期望值选择 T -期远期测度 $P(t, T)$ 作为计价单位且将测度 Q 变换到测度 Q_2 . 此时, 测度变换的 Radon-Nikodým 导数分别为

$$\frac{dQ_1}{dQ} \Big|_{\mathcal{F}_T} = e^{-\int_t^T r_s ds} \frac{S_T}{S_t} \quad \text{与} \quad \frac{dQ_2}{dQ} \Big|_{\mathcal{F}_T} = e^{-\int_t^T r_s ds} \frac{1}{P(t, T)}. \quad (3.8)$$

容易验证, 测度 Q_1 和 Q_2 都是概率测度 Q 的等价鞅测度. 因此, 在新的概率测度 Q_1 和 Q_2 下, 式 (3.7) 可改写成

$$\begin{aligned} C_I(t, x, v, r, T_0, T, k) &= e^x Q_1(X_T \geq \ln \hat{K}) - \hat{K} P(t, T) Q_2(X_T \geq \ln \hat{K}) \\ &= e^x \Pi_1 - \hat{K} P(t, T) \Pi_2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中 $\Pi_j = Q_j(X_T \geq \ln \hat{K})$, $j = 1, 2$. 于是, 应用 Fourier 反变换法, 有

$$Q_j(X_T \geq \ln \hat{K}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left[\frac{e^{-iu \ln \hat{K}} \phi_j(u)}{iu} \right] du, \quad (3.10)$$

这里 $\phi_j(u)$, $j = 1, 2$ 是随机变量 X_T 分别在 Q_1 和 Q_2 下基于 $\mathcal{F}_t$ -的条件特征函数, 即 $\phi_j(u) = E_t^{Q_j}[e^{iuX_T}]$.

下面在原概率测度 Q 下计算条件特征函数 $\phi_j(u), j = 1, 2$. 由式 (3.8) 及引理 2.1, 可得

$$\begin{aligned}\phi_1(u) &= E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \frac{S_T}{S_t} e^{iu X_T} \right] = e^{-x} E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds + (iu + 1) X_T} \right] \\ &= e^{-x} \Phi(t, x, v, r; u - i, 0, 0, T)\end{aligned}$$

以及

$$\phi_2(u) = E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \frac{1}{P(t, T)} e^{iu X_T} \right] = e^{-a(\tau) - c(\tau)r} \Phi(t, x, v, r; u, 0, 0, T).$$

现证 (3.6) 式. 由 (3.3), (3.4) 式可知

$$\begin{aligned}C_{II}(t, x, v, r, T_0, T, K) &= \frac{1}{S_{T_0}} E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} S_{T_0} \left(\frac{S_T}{S_{T_0}} - K \right)^+ \right] \\ &= \frac{1}{S_{T_0}} E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} (S_T - K S_{T_0})^+ \right] = \frac{C_I(t, x, v, r, T_0, T, K)}{S_{T_0}},\end{aligned}$$

得证 (3.6) 式.

定理 3.2 设股价 S_t 满足模型 (2.1)–(2.4), 则当 $t \in [0, T_0]$ 时,

$$C_I(t, x, v, r, T_0, T, k) = e^x \left[\hat{\Pi}_1 - k \hat{P}(t, T) \hat{\Pi}_2 \right], \quad (3.11)$$

$$C_{II}(t, x, v, r, T_0, T, K) = P(t, T_0) \tilde{\Pi}_1 - K P(t, T) \tilde{\Pi}_2, \quad (3.12)$$

其中 $\hat{\Pi}_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left[\frac{e^{-iu \ln k} \hat{\phi}_j(u)}{iu} \right] du$, $\tilde{\Pi}_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left[\frac{e^{-iu \ln K} \tilde{\phi}_j(u)}{iu} \right] du$, $j = 1, 2$ 以及

$$\hat{P}(t, T) = \exp\{a(\tau_0) + A(\hat{\tau}, -i, 0, -ic(\tau_0)) + B(\hat{\tau}, -i, 0, -ic(\tau_0))v + C(\hat{\tau}, -i, 0, -ic(\tau_0))r\},$$

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_1(u) &= \exp\{A(\tau_0, u - i, 0, 0) + A(\hat{\tau}, -i, -iB(\tau_0, u - i, 0, 0), -iC(\tau_0, u - i, 0, 0)) \\ &\quad + B(\hat{\tau}, -i, -iB(\tau_0, u - i, 0, 0), -iC(\tau_0, u - i, 0, 0))v \\ &\quad + C(\hat{\tau}, -i, -iB(\tau_0, u - i, 0, 0), -iC(\tau_0, u - i, 0, 0))r\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_2(u) &= \exp\{A(\tau_0, u, 0, 0) - a(\tau_0) + A(\hat{\tau}, -i, -iB(\tau_0, u, 0, 0), -iC(\tau_0, u, 0, 0)) \\ &\quad - A(\hat{\tau}, -i, 0, -ic(\tau_0)) + [B(\hat{\tau}, -i, -iB(\tau_0, u, 0, 0), -iC(\tau_0, u, 0, 0)) \\ &\quad - B(\hat{\tau}, -i, 0, -ic(\tau_0))]v + [C(\hat{\tau}, -i, -iB(\tau_0, u, 0, 0), -iC(\tau_0, u, 0, 0)) \\ &\quad - C(\hat{\tau}, -i, 0, -ic(\tau_0))]r\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_1(u) &= \exp\{A(\tau_0, u - i, 0, 0) + A(\hat{\tau}, 0, -iB(\tau_0, u - i, 0, 0), -iC(\tau_0, u - i, 0, 0)) - a(\hat{\tau}) \\ &\quad + B(\hat{\tau}, 0, -iB(\tau_0, u - i, 0, 0), -iC(\tau_0, u - i, 0, 0))v \\ &\quad + [C(\hat{\tau}, 0, -iB(\tau_0, u - i, 0, 0), -iC(\tau_0, u - i, 0, 0)) - c(\hat{\tau})]r\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_2(u) &= \exp\{A(\tau_0, u, 0, 0) + A(\hat{\tau}, 0, -iB(\tau_0, u, 0, 0), -iC(\tau_0, u, 0, 0)) - a(\tau) \\ &\quad + B(\hat{\tau}, 0, -iB(\tau_0, u, 0, 0), -iC(\tau_0, u, 0, 0))v \\ &\quad + [C(\hat{\tau}, 0, -iB(\tau_0, u, 0, 0), -iC(\tau_0, u, 0, 0)) - c(\tau)]r\},\end{aligned}$$

这里 $\tau_0 = T - T_0$, $\hat{\tau} = T_0 - t$, 函数 A, B, C 的值由 (2.7)–(2.9) 式给出.

证 先证 (3.11) 式. 由于 $t \in [0, T_0]$, 此时 S_{T_0} 不再是一个已知数. 由 (3.3) 式可知

$$\begin{aligned} & C_I(t, x, v, r, T_0, T, k) \\ &= E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} S_T I_{(\ln \frac{S_T}{S_{T_0}} \geq \ln k)} \right] - k E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} S_{T_0} I_{(\ln \frac{S_T}{S_{T_0}} \geq \ln k)} \right] \\ &= S_t E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \frac{S_T}{S_t} I_{(\ln \frac{S_T}{S_{T_0}} \geq \ln k)} \right] - k S_t E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \frac{S_{T_0}}{S_t} I_{(\ln \frac{S_T}{S_{T_0}} \geq \ln k)} \right], \quad (3.13) \end{aligned}$$

其中 I_A 是集合 A 的示性函数. 显然, 由 (3.8) 式中的概率测度变换 Q_1 , 则 (3.13) 式的第一项可改写成

$$S_t E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \frac{S_T}{S_t} I_{(\ln \frac{S_T}{S_{T_0}} \geq \ln k)} \right] = S_t Q_1 \left(\ln \frac{S_T}{S_{T_0}} \geq \ln k \right).$$

由于随机变量的分布函数与其特征函数的唯一确定性关系, 应用 Fourier 反变换法可以由特征函数求出分布函数. 因此 $Q_1(\ln \frac{S_T}{S_{T_0}} \geq \ln k)$ 的计算仅需要计算随机变量 $\ln \frac{S_T}{S_{T_0}}$ 基于 $\mathcal{F}_t$ 的条件特征函数, 即 $\hat{\phi}_1(u) = E_t^{Q_1} [e^{iu \ln \frac{S_T}{S_{T_0}}}]$. 下面计算 $\hat{\phi}_1(u)$. 显然, 由引理 2.1 及条件期望的迭代性质知

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1(u) &= E_t^Q \left[\frac{S_T}{S_t} e^{-\int_t^T r_s ds + iu \ln \frac{S_T}{S_{T_0}}} \right] \\ &= \frac{1}{S_t} E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds + (iu+1)X_T - iuX_{T_0}} \right] \\ &= \frac{1}{S_t} E_t^Q \left[e^{-\int_t^{T_0} r_s ds - iuX_{T_0}} \cdot e^{-\int_{T_0}^T r_s ds + (iu+1)X_T} \right] \\ &= \frac{1}{S_t} E_t^Q \left\{ e^{-\int_t^{T_0} r_s ds - iuX_{T_0}} \cdot E_{T_0}^Q \left[e^{-\int_{T_0}^T r_s ds + (iu+1)X_T} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{S_t} E_t^Q \left\{ e^{-\int_t^{T_0} r_s ds - iuX_{T_0}} \cdot e^{i(u-i)X_{T_0} + A(\tau_0, u-i, 0, 0) + B(\tau_0, u-i, 0, 0)v_{T_0} + C(\tau_0, u-i, 0, 0)r_{T_0}} \right\} \\ &= \frac{\exp\{A(\tau_0, u-i, 0, 0)\}}{S_t} \Phi(t, x, v, r; -i, -iB(\tau_0, u-i, 0, 0), -iC(\tau_0, u-i, 0, 0), T_0). \end{aligned} \quad (3.14)$$

于是

$$Q_1 \left(\ln \frac{S_T}{S_{T_0}} \geq \ln k \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left[\frac{e^{-iu \ln k} \hat{\phi}_1(u)}{iu} \right] du.$$

下证 (3.13) 式的第二项中的条件期望. 由于

$$\begin{aligned} E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \frac{S_{T_0}}{S_t} I_{(\ln \frac{S_T}{S_{T_0}} \geq \ln k)} \right] &= E_t^Q \left\{ e^{-\int_t^{T_0} r_s ds} \frac{S_{T_0}}{S_t} E_{T_0}^Q \left[e^{-\int_{T_0}^T r_s ds} I_{(\ln \frac{S_T}{S_{T_0}} \geq \ln k)} \right] \right\} \\ &= E_t^Q \left\{ e^{-\int_t^{T_0} r_s ds} \frac{S_{T_0}}{S_t} P(T_0, T) Q_2(\ln \frac{S_T}{S_{T_0}} \geq \ln k | \mathcal{F}_{T_0}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

由 Fourier 反变换法可知

$$Q_2(\ln \frac{S_T}{S_{T_0}} \geq \ln k | \mathcal{F}_{T_0}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left[\frac{e^{-iu \ln k} \hat{\phi}(u)}{iu} \right] du, \quad (3.16)$$

其中 $\hat{\phi}(u) = E_{T_0}^{Q_2} [e^{iu \ln \frac{S_T}{S_{T_0}}}]$. 类型 (3.14) 式, 并由引理 2.1, 可得

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(u) &= \frac{\exp\{-iuX_{T_0}\}}{P(T_0, T)} E_{T_0}^Q \left[e^{-\int_{T_0}^T r_s ds + iuX_T} \right] \\ &= \frac{\exp\{A(\tau_0, u, 0, 0) + B(\tau_0, u, 0, 0)v_{T_0} + C(\tau_0, u, 0, 0)r_{T_0}\}}{P(T_0, T)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

又由引理 2.2 知

$$P(T_0, T) = \exp\{a(\tau_0) + c(\tau_0)r_{T_0}\}. \quad (3.18)$$

故

$$\begin{aligned} E_t^Q \left\{ e^{-\int_t^{T_0} r_s ds} \frac{S_{T_0}}{S_t} P(T_0, T) \right\} &= \frac{\exp\{a(\tau_0)\}}{S_t} E_t^Q \left\{ e^{-\int_t^{T_0} r_s ds + X_{T_0} + c(\tau_0)r_{T_0}} \right\} \\ &= \exp\{a(\tau_0) + A(\hat{\tau}, -i, 0, -ic(\tau_0)) + B(\hat{\tau}, -i, 0, -ic(\tau_0))v + C(\hat{\tau}, -i, 0, -ic(\tau_0))r\}, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} &E_t^Q \left\{ e^{-\int_t^{T_0} r_s ds} \frac{S_{T_0}}{S_t} P(T_0, T) \hat{\phi}(u) \right\} \\ &= \frac{\exp\{A(\tau_0, u, 0, 0)\}}{S_t} E_t^Q \left\{ e^{-\int_t^{T_0} r_s ds + X_{T_0}} \times e^{B(\tau_0, u, 0, 0)v_{T_0} + C(\tau_0, u, 0, 0)r_{T_0}} \right\} \\ &= \exp\{A(\tau_0, u, 0, 0) + A(\hat{\tau}, -i, -iB(\tau_0, u, 0, 0), -iC(\tau_0, u, 0, 0))\} \\ &\quad \times \exp\{B(\hat{\tau}, -i, -iB(\tau_0, u, 0, 0), -iC(\tau_0, u, 0, 0))v \\ &\quad + C(\hat{\tau}, -i, -iB(\tau_0, u, 0, 0), -iC(\tau_0, u, 0, 0))r\}. \end{aligned}$$

结合 (3.15), (3.16) 式得证 (3.11) 式.

最后证明 (3.12) 式. 由 (3.3)–(3.5) 式, 以及当 $t \in [0, T_0]$ 时, 可知

$$\begin{aligned} C_{II}(t, x, v, r, T_0, T, K) &= E_t^Q \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \left(\frac{S_T}{S_{T_0}} - K \right)^+ \right] \\ &= E_t^Q \left\{ \frac{1}{S_{T_0}} e^{-\int_t^{T_0} r_s ds} E_{T_0}^Q \left[e^{-\int_{T_0}^T r_s ds} \left(S_T - K S_{T_0} \right)^+ \right] \right\} \\ &= E_t^Q \left\{ e^{-\int_t^{T_0} r_s ds} \left[\Pi_1 - K P(T_0, T) \Pi_2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

显然

$$E_t^Q \left[e^{-\int_t^{T_0} r_s ds} \Pi_1 \right] = \frac{1}{2} P(t, T_0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left[\frac{e^{-iu \ln K} \tilde{\Phi}_1(u)}{iu} \right] du,$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1(u) &= E_t^Q \left[e^{-\int_t^{T_0} r_s ds + A(\tau_0, u - i, 0, 0) + B(\tau_0, u - i, 0, 0)v_{T_0} + C(\tau_0, u - i, 0, 0)r_{T_0}} \right] \\ &= \exp \{ A(\tau_0, u - i, 0, 0) + A(\hat{\tau}, 0, -iB(\tau_0, u - i, 0, 0), -iC(\tau_0, u - i, 0, 0)) \\ &\quad + B(\hat{\tau}, 0, -iB(\tau_0, u - i, 0, 0), -iC(\tau_0, u - i, 0, 0))v \\ &\quad + C(\hat{\tau}, 0, -iB(\tau_0, u - i, 0, 0), -iC(\tau_0, u - i, 0, 0))r \} \end{aligned}$$

以及

$$E_t^Q \left\{ e^{-\int_t^{T_0} r_s ds} P(T_0, T) \Pi_2 \right\} = \frac{1}{2} P(t, T) + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re \left[\frac{e^{-iu \ln K} \tilde{\Phi}_2(u)}{iu} \right] du,$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_2(u) &= E_t^Q \left[e^{-\int_t^{T_0} r_s ds + A(\tau_0, u, 0, 0) + B(\tau_0, u, 0, 0)v_{T_0} + C(\tau_0, u, 0, 0)r_{T_0}} \right] \\ &= \exp \{ A(\tau_0, u, 0, 0) + A(\hat{\tau}, 0, -iB(\tau_0, u, 0, 0), -iC(\tau_0, u, 0, 0)) \\ &\quad + B(\hat{\tau}, 0, -iB(\tau_0, u, 0, 0), -iC(\tau_0, u, 0, 0))v \\ &\quad + C(\hat{\tau}, 0, -iB(\tau_0, u, 0, 0), -iC(\tau_0, u, 0, 0))r \}. \end{aligned}$$

故结合上述式子, 整理得证 (3.12) 式.

期权的 Greek 参数值在管理金融风险过程中扮演重要作用, Greeks 参数值中重要的对冲风险策略是 Δ 值, 它是期权价格关于标的基础资产价格的一阶偏导数, 是描述基础资产变动 1 个单位时期权价格的变化大小, 也是应用期权对冲基础资产的份额.

推论 3.3 设股价 S_t 满足 (2.1)–(2.4) 式, 则第 I 类型的远期生效期权的 Δ 对冲策略为

$$\Delta = \begin{cases} \hat{\Pi}_1 - k\hat{P}(t, T)\hat{\Pi}_2, & t \in [0, T_0], \\ \Pi_1, & t \in [T_0, T]. \end{cases} \quad (3.20)$$

4 数值计算实例

本节应用数值计算实例分析市场 JSVSI 模型下欧式远期生效看涨期权的价格影响因素. 以类型 I 为主要分析对象. 首先, 分析欧式远期生效看涨期权分别在 JSI, JSV 与 JSVSI 三类模型下价格性能的表现. 其次, 在 JSVSI 模型下以 $t \in [0, T_0]$ 情形为重点分析利率或波动率模型中几个重要参数异动对欧式远期生效看涨期权的价格影响. 最后, 讨论利率或波动率与股价之间相关系数的敏感性. 数值计算选用 Mathematica 8.0 和 Matlab2015R 软件编程在 Intel(R) Core(TM) i5-2500 CPU 3.30GHz, 4 GB RAM 联想计算机上实现. JSVSI 模型的参数值设定如下表 1, 其中部分参数选自 Eraker 等人^[26] 实证 S&P 500 指数的估计值.

表 1: JSVSI 模型的基本参数值设定

T_0 (年)	T (年)	κ_1	γ_1	σ_1	κ_2	γ_2	σ_2
1	4	10	0.026	0.5376	8	0.04	0.1
λ_1	λ_2	r_0	v_0	S_{T_0}	k	ρ_1	ρ_2
0.6	0.5	0.04	0.03	100	0.8	-0.4838	0.43
ρ_v	ρ_r	μ_v	μ_r	μ_{xv}	μ_{xr}	σ_{xv}	σ_{xr}
-0.6008	0.4	1.4832	0.01	-1.7533	0.02	2.8864	0.008

4.1 三类模型下期权价格的性能表现

表 2: 三类模型下欧式远期生效看涨期权价格的性能表现

S_t	t (年)	$t \in [T_0, T]$				$t \in [0, T_0]$			
		$t = 1.0$	$t = 1.5$	$t = 2.0$	$t = 3.5$	$t = 0.0$	$t = 0.5$	$t = 0.8$	$t = 1.0$
60	JSI	20.5330	19.9867	17.6027	15.4754	20.5378	20.5377	20.5368	20.5330
	JSV	59.9470	59.8330	59.5400	47.1210	59.9471	59.9470	59.9470	59.9470
	JSVSI	52.1819	53.2250	54.1646	46.2209	50.0711	51.1002	51.7428	52.1819
80	JSI	27.3777	26.9540	24.89648	20.7848	27.3837	27.3836	27.3825	27.3777
	JSV	79.9293	79.7942	79.4336	63.3242	79.9280	79.9297	79.9295	79.9293
	JSVSI	69.5759	70.9805	72.2594	62.1091	66.7615	68.1336	68.9903	69.5759
100	JSI	34.2222	32.2000	30.0342	22.3538	34.2296	34.2295	34.2281	34.2222
	JSV	99.9117	99.7583	99.3353	79.5899	99.9121	99.91209	99.9119	99.9117
	JSVSI	86.9698	88.7384	90.3610	78.0582	83.4518	85.1670	86.2379	86.9698

表 2 考查了远期生效看涨期权在 JSI 模型, JSV 模型与 JSVSI 模型下随着当前时间 t 和当前股价 S 值变化时的价格变化情况. 三类模型的基本参数值见表 1, 选取当前股价 $S_t = 60, 80, 100$, 当前时间 $t = 0.0, 0.5, 0.8, 1.0, 1.5, 2.0, 3.5$. 从表中可以看出, 在 JSI 和 JSV 模型下远期生效看涨期权价格随着当前时间 t 的增大 (从价内期权变化到价外期权) 而减少, 但在 JSVSI 模型下, 期权价格随着当前时间 t 的增大而增大, 在临近到期日时变小. 另外, 在

三类模型下远期生效看涨期权的价格相差较大, 其中 JSV 模型下期权价格最大, JSVSI 模型下次之, JSI 模型下期权价格最小, 这是因为在 JSVSI 模型下同时考虑了利率和股价波动率过程对股价的影响, 且波动率与利率对股价的杠杆作用不同.

图 1 考查了三类模型下生效日 T_0 对远期生效看涨期权价格和 Δ 对冲策略的敏感性. 图 1(a), (b) 分别绘制了期权价格和 Δ 对冲策略随生效日 T_0 的变化情况. 从图示可以看出, 三类模型下的远期生效看涨期权价格和 Δ 对冲策略都是生效日 T_0 的减函数, 但 JSVSI 模型下远期生效看涨期权价格和其 Δ 对冲策略的值介于 JSV 模型和 JSI 模型相应值之间, 这与表 2 分析一致.

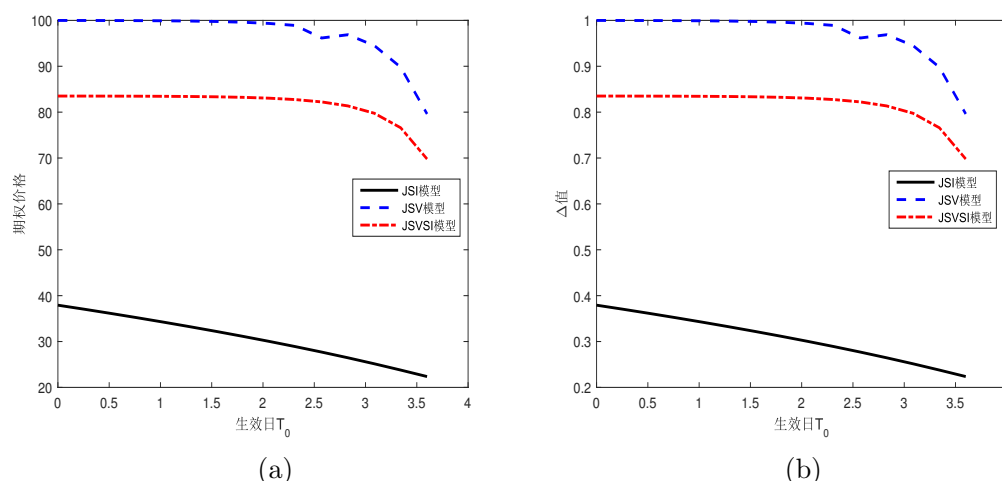


图 1: 三类模型下生效日 T_0 对期权价格和 Δ 对冲策略的影响

4.2 JSVSI 模型下共同跳跃风险参数的作用

下面在 JSVSI 模型下分别讨论利率 r_t , 波动率过程 v_t 中与股价 X_t 共同跳跃风险参数对期权价格及 Δ 对冲策略值的影响.

(1) 考察波动率过程与股价之间共同跳跃风险参数 $\lambda_1, \mu_{x,v}, \rho_v, \sigma_{x,v}$ 异动时对期权价格及 Δ 对冲策略值的作用, 模型中其他参数值选取同表 1, 股价当前值 S_t 设定为 100, 当前时间 $t = 0$. 计算结果见表 3. 从表 3 可以看到, 跳跃强度参数 λ_1 对期权价格及 Δ 对冲策略值的影响是反向的, 但股价的共同跳跃幅度参数 $\mu_{x,v}$ 和 $\sigma_{x,v}$ 对期权价格及 Δ 对冲策略值的影响是正向的. 同样地, 期权价格及 Δ 对冲策略值是基于股价波动率过程跳跃幅度与股价跳跃大小之间的相关系数 ρ_v 的增函数.

(2) 考察利率过程与股价之间共同跳跃风险参数 $\lambda_2, \mu_{x,r}, \rho_r, \sigma_{x,r}$ 异动时对期权价格及 Δ 对冲策略值的作用, 计算结果见表 4. 表 4 表明, 跳跃强度参数 λ_2 对期权价格及 Δ 对冲策略值的影响也是反向的, 且影响是显著的. 但利率对股价的共同跳跃幅度参数 $\mu_{x,r}$ 和 $\sigma_{x,r}$ 影响反映在期权价格及 Δ 对冲策略值的表现是不同的, 其中 $\mu_{x,r}$ 的影响是反向的, 而 $\sigma_{x,r}$ 的影响正向的. 另外, 期权价格及 Δ 对冲策略值是基于利率过程跳跃幅度与股价跳跃大小之间的相关系数 ρ_r 的增函数.

表 3: 波动率过程 v_t 与股价 X_t 共同跳跃风险参数的敏感性

λ_1	0.6	1	1.5	2.0	2.5	3.0
期权价格	83.4518	56.7663	50.9158	50.1239	50.0168	50.0023
Δ 值	0.83452	0.56766	0.50916	0.50124	0.50017	0.50002
ρ_v	-0.6008	-0.3	0	0.3	0.6	1
期权价格	83.4518	83.5059	83.5157	83.5161	83.5269	84.3214
Δ 值	0.83452	0.83506	0.83516	0.83520	0.83527	0.84321
$\mu_{x,v}$	-4	-3.5	-3	-2.5	-1.7533	0
期权价格	69.6120	71.5563	77.8792	81.8974	83.4518	83.5160
Δ 值	0.69612	0.71556	0.77879	0.81897	0.83452	0.83516
$\sigma_{x,v}$	0.5	1	1.5	2	2.8864	3
期权价格	62.6809	62.7949	63.2358	64.5354	83.4518	83.5111
Δ 值	0.62681	0.62795	0.63236	0.64535	0.83452	0.83511

表 4: 利率过程 r_t 与股价 X_t 共同跳跃风险参数的敏感性

λ_2	0.5	0.75	1.0	2.0	3.0	3.5
期权价格	83.4518	62.3009	54.5229	50.0826	50.0015	50.0003
Δ 值	0.83452	0.62301	0.54523	0.50083	0.50002	0.50000
ρ_r	-1	-0.4	0	0.4	0.8	1
期权价格	80.3488	81.8059	82.2164	83.4518	84.7519	85.4522
Δ 值	0.80349	0.81806	0.82216	0.83452	0.84752	0.85452
$\mu_{x,r}$	-4	-3.5	-3	-2.5	0.02	2.0
期权价格	83.4716	83.4707	83.4692	83.4672	83.4518	82.5098
Δ 值	0.83472	0.83471	0.83469	0.83467	0.83452	0.82510
$\sigma_{x,r}$	0.008	0.3	0.6	1.5	2.0	2.5
期权价格	83.4518	83.4529	83.4564	83.4967	83.5154	83.5160
Δ 值	0.83452	0.83453	0.83456	0.83497	0.83515	0.83516

5 结 论

本文在一类瞬时利率, 股价的瞬时波动率和股价均满足随机跳扩散模型且利率, 波动率与股价相关的环境下应用随机分析、Fourier 反变换等方法给出了欧式远期生效看涨期权定价解析式. 这类定价模型能较好地拟合金融实际中利率, 股价的运动行为, 捕捉金融市场中突发事件和波动的聚集性. 最后, 应用数值实例分析了利率, 波动率对期权价格和 Δ 对冲策略值的影响. 结果表明, 利率和波动率因子对期权价格及对冲有显著影响. 这类模型对进一步研究其他奇异期权的定价有非常好的现实意义.

参 考 文 献

- [1] Black K F, Scholes M S. The pricing of options and corporate liabilities [J]. J. Pol. Econ., 1973, 81: 637-654.

- [2] Duffie D, Pan J, Singleton K. Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions [J]. *Econ.*, 2000, 68(6): 1343–1376.
- [3] George J. Testing option pricing models with stochastic volatility, random jump and stochastic interest rate [J]. *Intern. Rev. Fin.*, 2002, 3(3/4): 233–272.
- [4] Jang B G, Yoon J H. Analytic valuation formulas for range notes and an affine term structure model with jump risks [J]. *J. Bank. Fin.*, 2010, 34: 2132–2145.
- [5] Ho H W, Huang H H, Yildirim Y. Affine model of inflation-indexed derivatives and inflation risk premium [J]. *Euro. J. Oper. Res.*, 2014, 235: 159–169.
- [6] 邓国和. 随机波动率跳跃扩散模型下复合期权定价 [J]. *数理统计与管理*, 2015, 34(5): 910–922.
- [7] Hull J 著. 王勇, 索吾林译. 期权, 期货及其他衍生品 (第 8 版) [M]. 北京: 机械工业出版社, 2011.
- [8] Rubinstein M. Pay now, choose later[J]. *Risk*, 1991, 4(2): 44–47.
- [9] Wilmott P. Derivatives: the theory and practice of financial engineering[M]. New York: Wiley Press, 1998.
- [10] Zhang P G 著. 马晓娟译. 奇异期权 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2014.
- [11] Lucić V. Forward-start options in stochastic volatility model[J]. *Wilmott Mag.*, 2003, 5: 72–75.
- [12] Kruse S, Nögel U. On the pricing of forward starting options in Heston model on stochastic volatility[J]. *Finance & Stoch.*, 2005, 9(2): 233–250.
- [13] Amerio E. Forward start options with stochastic volatility: a general framework[J]. 4th Iasted Intern. Conf. Finan. Engin. Appl., ACTA Press, 2007, 44–53.
- [14] 黄国安, 邓国和. 随机波动率下跳扩散模型的远期生效期权定价 [J]. *广西师范大学学报 (自然科学版)*, 2009, 27(3): 35–39.
- [15] Hsieh C H. Pricing and hedging of European forward start option under stochastic interest rate[J]. *J. Finan. Stud.*, 2002, 10(1): 1–22.
- [16] Ahlip R, Rutkowski M. Forward start options under stochastic volatility and stochastic interest rates[J]. *Intern. J. The. Appl. Finan.*, 2009, 12(2): 209–225.
- [17] Van Haastrecht A, Pelsser A. Accounting for stochastic interest rates, stochastic volatility and a general correlation structure in the valuation of forward starting options[J]. *J. Fut. Mark.*, 2011, 31(2): 103–125.
- [18] Romo J M. Pricing forward skew dependent derivatives: multi-factor versus single-factor stochastic volatility models[J]. *J. Fut. Mark.*, 2014, 34(2): 124–144.
- [19] Zhang S, Sun Y. Forward starting options pricing with double stochastic volatility, stochastic interest rates and double jumps[J]. *J. Comput. Appl. Math.*, 2017, 325: 34–41.
- [20] Beyer R, Kienitz J. Pricing forward start options in models based on (time-changed) Levy process[J]. *IUP J. Deriv. Mark.*, 2009, 6(2): 7–23.
- [21] Ramponi A. Fourier transform methods for regime-switching jump-diffusions and the pricing of forward starting options[J]. *Intern. J. The. Appl. Finan.*, 2012, 15(5): 205–209.
- [22] Deng G. Pricing European option in a double exponential jump-diffusion model with two market structure risks and its comparisons[J]. *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B*, 2007, 22(2): 127–137.
- [23] Heston S. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options[J]. *Rev. Finan. Stud.*, 1993, 6: 327–343.
- [24] Bates D. Jumps and stochastic volatility exchange rate processes implicit in deutsche mark option[J]. *Revi. Finan. Stud.*, 1996, 9: 69–107.
- [25] Grzelak L A, Oosterlee C W. On the Heston model with stochastic interest rates[J]. *SIAM J. Finan. Math.*, 2011, 2: 255–286.

- [26] Eraker B, Johannes M, Polson N. The impact of jumps in volatility and returns[J]. J. Finan., 2003, 53(3): 1269–1300.

PRICING FORWARD-START OPTIONS IN A STOCHASTIC INTEREST RATE AND VOLATILITY MODEL WITH JUMP RISKS

XUE Guang-ming¹, DENG Guo-he²

(1. School of Information and Statistics, Guangxi University of Finance and Economics,
Nanning 530003, China)

(2. College of Mathematics and Statistics, Guangxi Normal University, Guilin 541004, China)

Abstract: The pricing of the forward starting options is considered under an multi-factor affine jump diffusion model by introducing jump risks in stochastic interest rate, stochastic volatility and the underlying asset price process. The instantaneous volatility and the instantaneous interest rate are assumed to be correlated and have simultaneous correlated jumps with the underlying asset. Using the Fourier inverse transform method and the forward measure change technique, the closed explicit formulas for price of the European forward starting call options are obtained. Finally, some numerical examples are provided to examine performances of both the volatility and the interest rate on the option prices, and to analyze the impacts of the key parameters in this model on the option prices and the Δ values, respectively. Numerical results show that the volatility, the interest rate, and the jump risks in this proposed model have more remarkable effects on the prices of option, which prove this model having good fits to reality.

Keywords: multifactor affine jump diffusion model; stochastic volatility; stochastic interest rate; forward starting options; Fourier inverse transform

2010 MR Subject Classification: 60G20; 60H30; 90B25