

乘积 G - 空间的 G - 极小性、 G - 混合性和 G - 链回归点

冀占江^{1,2}, 张更容³

(1. 梧州学院大数据与软件工程学院, 广西 梧州 543002)

(2. 梧州学院广西高校图像处理与智能信息系统重点实验室, 广西 梧州 543002)

(3. 湖南第一师范学院数学与计算科学学院, 湖南 长沙 410205)

摘要: 本文研究了拓扑群作用下乘积空间中 G - 极小性、 G - 混合性和 G - 链回归点的动力学问题. 利用乘积映射与分映射之间的方法, 获得如下结果: (1) 乘积映射 $f \times g$ 是 G - 极小映射当且仅当 f 是 G_1 - 极小映射, g 是 G_2 - 极小映射; (2) 乘积映射 $f \times g$ 是 G - 混合映射当且仅当 f 是 G_1 - 混合映射, g 是 G_2 - 混合映射; (3) $CR_G(f \times g) = CR_{G_1}(f) \times CR_{G_2}(g)$. 从而推广了乘积空间中极小性、混合性和链回归点的结果.

关键词: G - 极小性; G - 混合性; G - 链回归点; 乘积 G - 空间

MR(2010) 主题分类号: 37B99

中图分类号: O189.11

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2019)03-0399-06

1 引言

极小性和混合性是拓扑动力系统中重要的概念, 其核心是迭代所产生的系列轨道在拓扑空间中的渐进性和拓扑结构, 近年来许多学者对其进行了研究, 得到了很多有意义的成果(见文献[1–7]). 例如, 文献[1]证明了在紧致度量空间中极小性和拓扑混合可以被强一致收敛所保持; 文献[2]给出了图上交错系统中拓扑混合的等价条件; 文献[3]给出了树映射是拓扑混合的等价条件; 文献[4]证明了乘积映射是极小映射和混合映射相应等价于分映射是极小映射和混合映射. 文献[1–4]是在整数加群 Z 作用下的拓扑空间上研究极小性和拓扑混合, 也就是在经典离散动力系统中研究极小性和拓扑混合, 随着离散系统动力学中理论的成熟, 在一般群作用下的拓扑空间中的动力学性质逐渐受到学者的关注^[8–11]. 文献[8]在 Amenable 群作用下研究了极小性和拓扑混合的等价条件; 文献[9]在拓扑群中证明了拓扑混合可以被强一致收敛所保持. 我们知道整数加群 Z 一定是 Amenable 群和拓扑群, 反之不一定成立, 因此文献[8–11]所研究的空间比离散动力系统更为广泛, 结论更具有实用性和普遍性. 借鉴文献[8–11]的研究思路, 笔者在拓扑群作用下的乘积空间中进行研究, 首先介绍了极小映射和混合映射的概念, 其次证明了 (1) 乘积映射 $f \times g$ 是 G - 极小映射当且仅当 f 是 G_1 - 极小映射, g 是 G_2 - 极小映射; (2) 乘积映射 $f \times g$ 是 G - 混合映射当且仅当 f 是 G_1 - 混合映射, g 是 G_2 - 混合映射. 另外链回归点也是动力系统中十分重要的概念, 近年来

*收稿日期: 2018-12-03

接收日期: 2019-01-14

基金项目: 国家自然科学基金资助(11461002); 湖南自然科学基金资助(2018JJ2074); 广西自然科学基金资助(2016GXNSFAA380317); 广西高校中青年教师科研基础能力提升项目(2019KY0681); 梧州学院校级科研项目资助(2017C001).

作者简介: 冀占江(1985–), 男, 河南驻马店, 讲师, 主要研究方向: 拓扑学动力系统.

通讯作者: 张更容

也取得了有意义的研究成果^[12-14]. 文献 [12] 证明了在紧致度空间中, 若映射 f 具有伪轨跟踪性, 则 $CR(f) = \overline{AP(f)}$; 文献 [13] 证明了在紧致度空间中, 若映射 f 具有周期伪轨跟踪性, 则 $CR(f) = \overline{P(f)}$; 文献 [14] 在拓扑群作用下的逆极限空间中研究了链回归点, 指出移位映射的链回归点集等于自映射在其链回归点集上形成的逆极限空间. 笔者在拓扑群作用下的乘积空间中研究了链回归点的拓扑结构, 证明了 $CR_G(f \times g) = CR_{G_1}(f) \times CR_{G_2}(g)$. 这些结果弥补了拓扑群作用下乘积空间中极小映射、混合映射和链回归点理论的缺失, 为它们在今后的应用中提供了理论依据和科学基础.

2 基本概念及记号

定义 2.1^[15] 设 X 是度量空间, G 是拓扑群. 若映射 $\varphi: G \times X \rightarrow X$ 满足

- (1) 对任意的 $x \in X$, 有 $\varphi(e, x) = x$, 其中 e 为 G 的单位元;
- (2) 对任意的 $x \in X$ 以及 $g_1, g_2 \in G$, 有 $\varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) = \varphi(g_1 g_2, x)$, 则称 (X, G, φ) 是度量 G -空间, 简称 X 是度量 G -空间. 为了书写方便, 通常将 $\varphi(gx)$ 简写为 gx .

下面给出乘积度量 G -空间的概念.

定义 2.2 设 (X, d_1) 是度量 G_1 -空间, (Y, d_2) 是度量 G_2 -空间, 在乘积空间 $X \times Y$ 上定义 $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2)\}$, 则称 d 是乘积空间 $X \times Y$ 上的度量.

设 $f: X \rightarrow X$ 连续, $g: Y \rightarrow Y$ 连续, 定义 $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$, 则称 $f \times g$ 是 f 与 g 的乘积映射.

取 $G = G_1 \times G_2$, 易知 G 是拓扑群, $(X \times Y, d, G)$ 是度量 G -空间, 此时称 $(X \times Y, d, G)$ 是 (X, d_1, G_1) 和 (Y, d_2, G_2) 的乘积度量 G -空间.

定义 2.3^[14] 设 (X, d) 是度量 G -空间, $f: X \rightarrow X$ 连续, $x \in X$, 称 x 是 f 的 G -链回归点, 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists f$ 作用下的 (G, ε) 链 $\{x_i\}_{i=0}^n$, 其中 $x_0 = x_n = x$. f 的 G -链回归点集用 $CR_G(f)$ 表示.

定义 2.4^[9] 设 (X, d) 是度量 G -空间, $f: X \rightarrow X$ 连续, 称 f 是 G -混合映射, 如果对 X 任意非空开集 U 和 V , 存在正整数 m , 存在 $p \in G$, 当 $n > m$ 时, 有 $pf^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

定义 2.5 设 (X, d) 是度量 G -空间, $f: X \rightarrow X$ 连续, $x \in X$, 称 $\text{orb}_G(x, f)$ 为 f 作用下的 G -轨道, 如果记 $\text{orb}_G(x, f) \equiv \{pf^n(x) : p \in G, n \geq 0\}$.

定义 2.6 设 (X, d) 是度量 G -空间, $f: X \rightarrow X$ 连续, 称 f 是 G -极小映射, 如果对任意的 $x \in X$, 有 $\overline{\text{orb}_G(x, f)} = X$.

3 主要定理

定理 3.1 设 (X, d_1) 是度量 G_1 -空间, (Y, d_2) 是度量 G_2 -空间, $f: X \rightarrow X$ 连续, $g: Y \rightarrow Y$ 连续, 则 $f \times g$ 是 G -极小映射当且仅当是 f 是 G_1 -极小映射, g 是 G_2 -极小映射.

证 $\Rightarrow$ 假设 $f \times g$ 是 G -极小映射. $\forall x \in X, \forall y \in Y$, 取 $z = (x, y)$, 则 $z \in X \times Y$. 由 $f \times g$ 是 G -极小映射知

$$\overline{\text{orb}_G(z, f \times g)} = X \times Y.$$

设 U 是 X 上的任意非空开集, V 是 Y 上的任意非空开集, 则 $U \times V$ 是 $X \times Y$ 上的非空开

集, 故

$$\text{orb}_G(z, f \times g) \cap (U \times V) \neq \emptyset.$$

又

$$\begin{aligned} \text{orb}_G(z, f \times g) \cap (U \times V) &= (\text{orb}_{G_1}(x, f) \times \text{orb}_{G_2}(y, g)) \cap (U \times V) \\ &= (\text{orb}_{G_1}(x, f) \cap U) \times (\text{orb}_{G_2}(y, g) \cap V). \end{aligned}$$

故

$$\text{orb}_{G_1}(x, f) \cap U \neq \emptyset, \text{orb}_{G_2}(y, g) \cap V \neq \emptyset.$$

则

$$\overline{\text{orb}_{G_1}(x, f)} = X, \overline{\text{orb}_{G_2}(y, g)} = Y.$$

因此 f 是 G_1 -极小映射, g 是 G_2 -极小映射.

$\Leftarrow$ 假设 f 是 G_1 -极小映射, g 是 G_2 -极小映射. 设 $U' \times V'$ 是 $X \times Y$ 上的任意非空开集, 则 U' 是 X 上的非空开集, V' 是 Y 上的非空开集, $\forall z' = (x', y') \in X \times Y$, 则 $x' \in X$, $y' \in Y$, 由 f 是 G_1 -极小映射和 g 是 G_2 -极小映射知

$$\text{orb}_{G_1}(x', f) \cap U' \neq \emptyset, \text{orb}_{G_2}(y', g) \cap V' \neq \emptyset.$$

又

$$\begin{aligned} \text{orb}_G(z', f \times g) \cap (U' \times V') &= (\text{orb}_{G_1}(x', f) \times \text{orb}_{G_2}(y', g)) \cap (U' \times V') \\ &= (\text{orb}_{G_1}(x', f) \cap U') \times (\text{orb}_{G_2}(y', g) \cap V'). \end{aligned}$$

故

$$\text{orb}_G(z', f \times g) \cap (U' \times V') \neq \emptyset.$$

则

$$\overline{\text{orb}_G(z', f \times g)} = X \times Y.$$

因此 $f \times g$ 是 G -极小映射.

定理 3.2 设 (X, d_1) 是度量 G_1 -空间, (Y, d_2) 是度量 G_2 -空间, $f: X \rightarrow X$ 连续, $g: Y \rightarrow Y$ 连续, 则 $f \times g$ 是 G -混合映射当且仅当是 f 是 G_1 -混合映射, g 是 G_2 -混合映射.

证 $\Rightarrow$ 假设 $f \times g$ 是 G -混合映射. $\forall X$ 上的任意非空开集 U_1 和 V_1 , $\forall Y$ 上的任意非空开集 U_2 和 V_2 , 易知 $U_1 \times U_2, V_1 \times V_2$ 是 $X \times Y$ 上的非空开集. 由 $f \times g$ 是 G -混合映射知, $\exists N_1 \in N_+, \exists (p_1, p_2) \in G$, 当 $n > N_1$ 时, 有

$$p(f \times g)^n(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset.$$

又

$$\begin{aligned} p(f \times g)^n(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) &= (p_1 f^n(U_1) \times p_2 g^n(U_2)) \cap (V_1 \times V_2) \\ &= (p_1 f^n(U_1) \cap V_1) \times (p_2 g^n(U_2) \cap V_2). \end{aligned}$$

则

$$p_1 f^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset, p_2 g^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

故 f 是 G_1 -混合映射, g 是 G_2 -混合映射.

$\Leftarrow$ 假设 f 是 G_1 -混合映射, g 是 G_2 -混合映射. $\forall X \times Y$ 上的任意非空开集 $U'_1 \times U'_2$ 和 $V'_1 \times V'_2$, 易知 U'_1 和 V'_1 是 X 上的非空开集, U'_2 和 V'_2 是 Y 上的非空开集. 由 f 是 G_1 -混合映射知, $\exists N_2 \in N_+$, $\exists t_1 \in G_1$, 当 $n > N_2$ 时, 有

$$t_1 f^n(U'_1) \cap V'_1 \neq \emptyset.$$

由 g 是 G_2 -混合映射知, $\exists N_3 \in N_+$, $\exists t_2 \in G_2$, 当 $n > N_3$ 时, 有

$$t_2 g^n(U'_2) \cap V'_2 \neq \emptyset.$$

取 $N_4 = \max\{N_2, N_3\}$, $t = (t_1, t_2) \in G$, 当 $n > N_4$ 时, 有

$$\begin{aligned} t(f \times g)^n(U'_1 \times U'_2) \cap (V'_1 \times V'_2) &= (t_1 f^n(U'_1) \times t_2 g^n(U'_2)) \cap (V'_1 \times V'_2) \\ &= (t_1 f^n(U'_1) \cap V'_1) \times (t_2 g^n(U'_2) \cap V'_2). \end{aligned}$$

故

$$t(f \times g)^n(U'_1 \times U'_2) \cap (V'_1 \times V'_2) \neq \emptyset.$$

因此 $f \times g$ 是 G -混合映射.

定理 3.3 设 (X, d_1) 是度量 G_1 -空间, (Y, d_2) 是度量 G_2 -空间, $f: X \rightarrow X$ 连续, $g: Y \rightarrow Y$ 连续, 则 $CR_G(f \times g) = CR_{G_1}(f) \times CR_{G_2}(g)$.

证 $\Rightarrow$ 先证 $CR_G(f \times g) \subseteq CR_{G_1}(f) \times CR_{G_2}(g)$. 设 $z = (x, y) \in CR_G(f \times g)$, $\forall \varepsilon > 0$, 则存在 $f \times g$ 作用下的 (G, ε) 链 $\{z_i\}_{i=0}^n$, 其中 $z_i = (x_i, y_i)$, $z_0 = z_n = z$. 故对任意的 $0 \leq i < n$, $\exists p_i = (p_i^1, p_i^2) \in G$ 使

$$d(p_i(f \times g)(z_i), z_{i+1}) < \varepsilon.$$

因此

$$d_1(p_i^1 f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon, d_2(p_i^2 g(y_i), y_{i+1}) < \varepsilon.$$

又 $x_0 = x_n = x$, $y_0 = y_n = y$, 则 $x \in CR_{G_1}(f)$, $y \in CR_{G_2}(g)$, 故 $z \in CR_{G_1}(f) \times CR_{G_2}(g)$.

$\Leftarrow$ 下证 $CR_{G_1}(f) \times CR_{G_2}(g) \subseteq CR_G(f \times g)$. 设 $z = (x, y) \in CR_{G_1}(f) \times CR_{G_2}(g)$, 则 $x \in CR_{G_1}(f)$, $y \in CR_{G_2}(g)$. $\forall \eta > 0$, 则存在 f 作用下的 (G_1, η) 链 $\{x_i\}_{i=0}^m$, 其中 $x_0 = x_m = x$, 存在 g 作用下的 (G_2, η) 链 $\{y_i\}_{i=0}^k$, 其中 $y_0 = y_k = y$. 取

$$x_{m+1} = x_1, x_{m+2} = x_2, x_{m+3} = x_3, \dots, x_{2m-1} = x_{m-1}, x_{2m} = x_m;$$

$$x_{2m+1} = x_1, x_{2m+2} = x_2, x_{2m+3} = x_3, \dots, x_{3m-1} = x_{m-1}, x_{3m} = x_m;$$

$$x_{3m+1} = x_1, x_{3m+2} = x_2, x_{3m+3} = x_3, \dots, x_{4m-1} = x_{m-1}, x_{4m} = x_m;$$

$\vdots$

$$x_{(k-1)m+1} = x_1, x_{(k-1)m+2} = x_2, x_{(k-1)m+3} = x_3, \dots, x_{km-1} = x_{m-1}, x_{km} = x_m.$$

取

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_1, y_{k+2} = y_2, y_{k+3} = y_3, \dots, y_{2k-1} = y_{k-1}, y_{2k} = y_k; \\ y_{2k+1} &= y_1, y_{2k+2} = y_2, y_{2k+3} = y_3, \dots, y_{3k-1} = y_{k-1}, y_{3k} = y_k; \\ y_{3k+1} &= y_1, y_{3k+2} = y_2, y_{3k+3} = y_3, \dots, y_{4k-1} = y_{k-1}, y_{4k} = y_k; \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$y_{(m-1)k+1} = y_1, y_{(m-1)k+2} = y_2, y_{(m-1)k+3} = y_3, \dots, y_{mk-1} = y_{k-1}, y_{mk} = y_k.$$

由以上构造过程知, $\{x_i\}_{i=0}^{mk}$ 是 f 作用下的 (G_1, η) 链, $\{y_i\}_{i=0}^{mk}$ 是 g 作用下的 (G_2, η) 链, 并且 $x_0 = x_{mk} = x$, $y_0 = y_{mk} = y$. 故对任意的 $0 \leq i < mk$, $\exists t_i^1 \in G_1$, $\exists t_i^2 \in G_2$ 使

$$d_1(t_i^1 f(x_i), x_{i+1}) < \eta, \quad d_2(t_i^2 g(y_i), y_{i+1}) < \eta.$$

取 $z_i = (x_i, y_i)$, $t_i = (t_i^1, t_i^2) \in G$, 则有

$$d(t_i(f \times g)(z_i), z_{i+1}) = \max\{d_1(t_i^1 f(x_i), x_{i+1}), d_2(t_i^2 g(y_i), y_{i+1})\} < \eta.$$

又 $z_0 = z_{mk} = z$, 故 $z \in CR_G(f \times g)$.

4 总结

本文受文献 [8] 和文献 [11] 研究思路的启发, 在拓扑群作用下的乘积空间中介绍了 G -极小映射、 G -混合映射和 G -链回归点的概念, 利用乘积映射的性质, 研究了乘积映射 $f \times g$ 与分映射 f 和 g 在这些动力学性质方面的关系, 得到了较好的结果, 推广和改进了整数加群 $\mathbb{Z}$ 作用下拓扑空间中有关极小映射、混合映射和链回归点的结果, 为其在今后实际的应用中提供了理论依据和科学基础.

参 考 文 献

- [1] 曾凡平, 严可颂, 刘新和. 强一致收敛与动力性质 [J]. 广西大学学报 (自然科学版), 2008, 33(3): 306-309.
- [2] 梁海兰. 非自治系统的一些动力学性质 [D]. 南宁: 广西大学, 2013.
- [3] 孙太祥, 刘新和, 徐胜荣. 树映射的拓扑混合 [J]. 数学研究与评论, 2002, 22(4): 674-678.
- [4] 晏炳刚. 可降映射的极小性、拓扑传递性和拓扑混合性 [J]. 长春大学学报, 2007, 17(3): 10-12.
- [5] 尹建东, 周作领. 熵极小动力系统的复杂性 [J]. 数学物理学报, 2015, 35A(1): 29-35.
- [6] 颜其, 尹建东. 一类极小系统的动力性状 [J]. 华侨大学学报 (自然科学版), 2015, 36(2): 237-240.
- [7] 吴新星, 吴建军. 关于 P -极小动力系统的一些记注 [J]. 数学物理学报, 2016, 36A(5): 879-885.
- [8] 王丽娟. Amenable 群作用下的拓扑动力系统 [D]. 重庆: 重庆大学, 2016.
- [9] 冀占江. 度量 G -空间中强一致收敛条件下混合性的研究 [J]. 数学的实践与认识, 2018, 48(11): 237-240.
- [10] Iddo S. Rigid actions of amenable groups [J]. Isr. J. Math., 2009, 173(1): 61-90.

- [11] Bowen L. A measure-conjugacy invariant for tree group actions[J]. Ann. Math., 2010, 171(2): 1387–1400.
- [12] 邱伟, 赵俊玲. 伪轨跟踪性与几乎周期点 [J]. 广西师范大学学报 (自然科学版), 2007, 25(1): 50–53.
- [13] 赵俊玲, 张莉. 周期伪轨跟踪性与伪轨跟踪性的关系 [J]. 浙江大学学报 (理学版), 2010, 37(5): 505–507.
- [14] 冀占江. 群作用下逆极限空间上移位映射的 G -非游荡点与 G -链回归点 [J]. 湖南师范大学学报 (自然科学版), 2018, 41(6): 77–81.
- [15] Ahmadi S A. Invariants of topological G -conjugacy on G -spaces[J]. Math. Morav., 2014, 18(1): 67–75.

G-MINIMALITY, G -MIXING AND G -CHAIN RECURRENT POINT OF THE PRODUCT G -SPACE

JI Zhan-jiang^{1,2}, ZHANG Geng-rong³

(1. School of Data Science and Software Engineering, Wuzhou University, Wuzhou 543002, China)

(2. Guangxi Colleges and Universities Key Laboratory of Image Processing and Intelligent
Information System, Wuzhou University, Wuzhou 543002, China)

(3. Mathematics and Computational Science, Hunnan First Normal University,
Changsha 410205, China)

Abstract: In this paper, the dynamical problem of G -minimality property, G -mixing property and G -chain recurrent point are investigated in the product space under the action of topological group. By using the method between product mapping and sub mapping, the following results are obtained. (1) The product map $f \times g$ is a G -minimality map if and only if the map f is a G_1 -minimality map and the map g is a G_2 -minimality map; (2) The product map $f \times g$ is a G -mixing map if and only if the map f is a G_1 -mixing map and the map g is a G_2 -mixing map; (3) $CR_G(f \times g) = CR_{G_1}(f) \times CR_{G_2}(g)$, which generalize the results of minimality property, mixing property and chain recurrent point in the product space.

Keywords: G -minimality; G -mixing; G -chain recurrent point; product G -space

2010 MR Subject Classification: 37B99