Vol. 39 (2019)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类非局部椭圆方程正解的存在性

陈 林
(伊犁师范学院数学与统计分院, 新疆 伊宁 835000)

摘 要: 本文研究了一类非局部椭圆方程非平凡弱解的存在性问题. 利用 Nehari 流形及纤维环映射, 获得了该问题正解的存在性条件, 推广了该领域的相关结果.

关 键 词: 椭圆型方程; Nehari 流形; 纤维环映射; 正解
MR(2010) **主题分类号**: 35J20; 35J62 **中图分类号**: O175.25
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2019)02-0249-11

1 引言

椭圆型方程是偏微分方程理论的一个重要组成部分, 其解的存在性问题具有很高的学术价值和理论价值, 是偏微分方程领域中一个重要的研究课题. 文献 [1] 研究了如下拟线性椭圆边值问题

$$\begin{cases}-\triangle_p u=f(x)|u|^{q-2}u+g(x)|u|^{p^*-2}u, x\in\Omega,\\ u=0, x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{1.1}$$

多个正解的存在性, 其中 $1<q<p<N$, $p^*=\frac{Np}{N-p}$, $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是边界光滑的有界区域, 函数 $f,g\in C(\bar{\Omega})$ 且满足 $g^+=\max\{g,0\}\not\equiv 0, f^+=\max\{f,0\}\not\equiv 0$. 本文运用 Nehari 流形和极小 - 极大原理证明了当 Ω 是一不可收缩区域且 g 在 $\bar{\Omega}$ 上恒等于 1 而 f 在 $\bar{\Omega}$ 上充分小时, 问题 (1.1) 至少存在三个解, 从而进一步证明了对于一般的区域, 当 f 的正部在 $\bar{\Omega}$ 上足够小时, 问题 (1.1) 至少存在两个正解.

近年来, 对非局部椭圆方程的研究日益受到人们的重视 [2–5]. 本文研究如下一类非局部椭圆方程

$$\begin{cases} & -M(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla u|^p dx)\operatorname{div}(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\\ = & h(x)|u|^{m-2}u+\lambda H(x)|u|^{n-2}u, x\in\mathbb{R}^N,\\ & u(x)>0, x\in\mathbb{R}^N\end{cases}\tag{1.2}$$

非平凡弱解的存在性, 其中 $\lambda>0$ 是实参数, $1<p<N\ (N\geq 3), 1<n<p<m<p^*, 0\leq a<(N-p)/p, p^*=Np/(N-pd), a\leq b<a+1, d=a+1-b>0$, $h(x), H(x)$ 是在 $\mathbb{R}^N$ 上可变号的权函数. 文献 [6] 运用 Nehari 流形及纤维环映射的方法得到当 $a=0$, $p=2$ 时, 问题

*收稿日期: 2017-06-30 接收日期: 2017-11-30
基金项目: 新疆维吾尔自治区自然科学基金资助 (2017D01C420).
作者简介: 陈林 (1978–), 男, 山东成武, 副教授, 主要研究方向: 偏微分方程及其应用.

(1.2) 在有界区域上至少存在两个正解; 文献 [7] 运用山路引理和 Ekeland 变分原理证明了当 $a=0$ 时, 问题 (1.2) 至少存在两个非平凡的弱解. 受文献 [1, 6, 7] 的启发, 我们将运用 Nehari 流形及纤维环映射证明问题 (1.2) 在全空间 $\mathbb{R}^N$ 上至少存在两个非平凡的弱解. 由于所讨论的问题定义区域是全空间 $\mathbb{R}^N$, 从而本文不能得到类似于文献 [1] 中三个弱解的存在性结果.

设 $L^p(\mathbb{R}^N,|x|^{-b})$ 是空间 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 的完备化空间, 其上的范数定义为

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N,|x|^{-b})}=\left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-bp}|u|^p dx\right)^{1/p}.$$

而问题 (1.2) 所使用的函数空间为 $X=W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, 它是空间 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 关于范数

$$\|u\|=\left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla u|^p dx\right)^{1/p}$$

的完备化空间.

由文献 [8] 可知, 存在一常数 $S>0$ 使得

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-bp^*}|u|^{p^*}dx\right)^{1/p^*}\le S\left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla u|^p dx\right)^{1/p}, \tag{1.3}$$

其中 $-\infty<a<(N-p)/p, a\le b<a+1, d=a+1-b, p^*=pN/(N-pd)$. 此不等式被称为 Caffarelli-Kohn-Nirenberg 不等式. 在证明本文的主要结论时, 此不等式将被反复使用.

为研究问题的方便, 做如下假设:

(A1) $M(s)=k+ls^\tau$, 其中 $k>0, l\ge 0, n<p(\tau+1)<m$;

(A2) $h(x)|x|^{bm}\in L^\alpha(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N), \alpha=p^*/(p^*-m)$;

(A3) $H(x)|x|^{bn}\in L^\beta(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N), \beta=p^*/(p^*-n)$.

本文的主要结果为

定理 1.1 若条件 (A1)–(A3) 成立. 则存在正数 λ_1 使当 $\lambda\in(0,\lambda_1)$ 时, 问题 (1.2) 至少具有两个正解.

2 预备知识

定义 2.1 若 $u\in X$ 且对于任意的 $\varphi\in X$ 有

$$\begin{aligned}&M(\|u\|^p)\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi dx-\int_{\mathbb{R}^N}h(x)|u|^{m-2}u\varphi dx \\ &-\int_{\mathbb{R}^N}\lambda H(x)|u|^{n-2}u\varphi dx=0\end{aligned} \tag{2.1}$$

成立, 则称 u 为问题 (1.2) 的一个弱解.

显然问题 (1.2) 具有变分结构. 设 $I_\lambda(u)$ 是问题 (1.2) 所对应的 Euler 泛函, 其具体表达式为

$$I_\lambda(u)=\frac{k}{p}\|u\|^p+\frac{l}{\sigma}\|u\|^\sigma-\frac{1}{m}\int_{\mathbb{R}^N}h(x)|u|^m dx-\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^N}\lambda H(x)|u|^n dx,\forall u\in X, \tag{2.2}$$

其中 $\sigma = p(\tau+1)$. 则 $I_\lambda(u) \in C^1(X, \mathbb{R})$ 且对于任意的 $\varphi \in X$ 有

$$\begin{aligned}\langle I'_\lambda(u), \varphi\rangle =& M(\|u\|^p)\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi dx \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^{m-2}u\varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda H(x)|u|^{n-2}u\varphi dx. \end{aligned} \tag{2.3}$$

特别地,

$$\langle I'_\lambda(u), u\rangle = k\|u\|^p + l\|u\|^\sigma - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^m dx - \int_{\mathbb{R}^N} \lambda H(x)|u|^n dx. \tag{2.4}$$

由于 I_λ 在 X 上无界, 因此引入 Nehari 流形

$$N_\lambda = \{u \in X\backslash\{0\} : \langle I'_\lambda(u), u\rangle = 0\}, \tag{2.5}$$

其中 $\langle , \rangle$ 指的是通常的对偶积. 从而 $u \in N_\lambda$ 当且仅当

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^m dx = k\|u\|^p + l\|u\|^\sigma - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} H(x)|u|^n dx, \tag{2.6}$$

$$\lambda\int_{\mathbb{R}^N} H(x)|u|^n dx = k\|u\|^p + l\|u\|^\sigma - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^m dx. \tag{2.7}$$

从而当 $u \in N_\lambda$ 时, 有

$$I_\lambda(u) = k\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{m}\Big)\|u\|^p + l\Big(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{m}\Big)\|u\|^\sigma + \Big(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\Big)\int_{\mathbb{R}^N} \lambda H(x)|u|^n dx \tag{2.8}$$

$$= k\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\Big)\|u\|^p + l\Big(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{n}\Big)\|u\|^\sigma + \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\Big)\int_{R^N} h(x)|u|^m dx. \tag{2.9}$$

引入纤维环映射 $\phi_u : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto I_\lambda(tu)$, 则

$$\phi_u(t) = \frac{kt^p}{p}\|u\|^p + \frac{l}{\sigma}t^\sigma\|u\|^\sigma - \frac{1}{m}t^m\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^m dx - \frac{1}{n}t^n\int_{\mathbb{R}^N} \lambda H(x)|u|^n dx, \tag{2.10}$$

$$\phi'_u(t) = kt^{p-1}\|u\|^p + lt^{\sigma-1}\|u\|^\sigma - t^{m-1}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^m dx - t^{n-1}\int_{\mathbb{R}^N} \lambda H(x)|u|^n dx, \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\phi''_u(t) =& k(p-1)t^{p-2}\|u\|^p + l(\sigma-1)t^{\sigma-2}\|u\|^\sigma - (m-1)t^{m-2}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^m dx \\ &- (n-1)t^{n-2}\int_{\mathbb{R}^N} \lambda H(x)|u|^n dx. \end{aligned} \tag{2.12}$$

易见, $u \in N_\lambda$ 当且仅当 $\phi'_u(1) = 0$. 更一般地, $\phi'_u(t) = 0$ 当且仅当 $tu \in N_\lambda$. 将 N_λ 分成

$$N_\lambda^+ = \{u \in N_\lambda : \phi''_u(1) > 0\}; \tag{2.13}$$

$$N_\lambda^- = \{u \in N_\lambda : \phi''_u(1) < 0\}; \tag{2.14}$$

$$N_\lambda^0 = \{u \in N_\lambda : \phi''_u(1) = 0\}. \tag{2.15}$$

由于当 $u\in N_\lambda$ 时, $\phi_u'(1)=0$, 从而

$$\phi_u''(1)=k(p-m)\|u\|^p+l(\sigma-m)\|u\|^\sigma+(m-n)\int_{\mathbb{R}^N}\lambda H(x)|u|^n dx \tag{2.16}$$
$$=k(p-n)\|u\|^p+l(\sigma-n)\|u\|^\sigma+(n-m)\int_{\mathbb{R}^N}h(x)|u|^m dx. \tag{2.17}$$

引理 2.2 I_λ 是强制的且在 N_λ 上有下界.

证 由 Hölder 不等式及不等式 (1.3), 得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}H(x)|u|^n dx &\le \Big(\int_{\mathbb{R}^N}(|H(x)||x|^{bn})^\beta dx\Big)^{1/\beta}\Big(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-bp^*}|u|^{p^*}dx\Big)^{n/p^*}\\ &\le S^n\Big(\int_{\mathbb{R}^N}(|H(x)||x|^{bn})^\beta dx\Big)^{1/\beta}\Big(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-ap}|\nabla u|^p dx\Big)^{n/p}\\ &\le H_\beta S^n\|u\|^n,\end{aligned} \tag{2.18}$$

其中 $H_\beta=\Big(\int_{\mathbb{R}^N}(|H(x)||x|^{bn}\Big)^\beta dx)^{1/\beta},\beta=p^*/(p^*-n)$. 同理

$$\int_{\mathbb{R}^N}h(x)|u|^m dx\le h_\alpha S^m\|u\|^m, \tag{2.19}$$

其中 $h_\alpha=\Big(\int_{\mathbb{R}^N}(|h(x)||x|^{bm})^\alpha dx\Big)^{1/\alpha},\alpha=p^*/(p^*-m)$. 从而有

$$I_\lambda(u)\ge k\Big(\frac1p-\frac1m\Big)\|u\|^p+l\Big(\frac1\sigma-\frac1m\Big)\|u\|^\sigma-\lambda\Big(\frac1n-\frac1m\Big)H_\beta S^n\|u\|^n. \tag{2.20}$$

由于 $n<p\le\sigma<m$, 从而 I_λ 在 N_λ 上强制有下界.

引理 2.3 存在 $\lambda_0>0$ 使得当 $\lambda\in(0,\lambda_0)$ 时 $N_\lambda^0=\emptyset$.

证 设 $\lambda_0=\frac{k(m-p)}{(m-n)H_\beta S^n}(\frac{k(p-n)}{(m-n)h_\alpha S^m})^{\frac{p-n}{m-p}}$. 假设结论不真, 则存在 $\lambda\in(0,\lambda_0)$ 使得 $N_\lambda^0\neq\emptyset$. 从而存在 $u\in N_\lambda^0$ 使得

$$0=\phi_u''(1)=k(p-m)\|u\|^p+l(\sigma-m)\|u\|^\sigma+(m-n)\int_{\mathbb{R}^N}\lambda H(x)|u|^n dx$$
$$=k(p-n)\|u\|^p+l(\sigma-n)\|u\|^\sigma+(n-m)\int_{\mathbb{R}^N}h(x)|u|^m dx. \tag{2.21}$$

将 (2.18) 及 (2.19) 式运用于 (2.21) 式得

$$k(m-p)\|u\|^p\le(m-n)\int_{\mathbb{R}^N}\lambda H(x)|u|^n dx\le\lambda(m-n)H_\beta S^n\|u\|^n, \tag{2.22}$$
$$k(p-n)\|u\|^p\le(m-n)\int_{\mathbb{R}^N}h(x)|u|^m dx\le(m-n)h_\alpha S^m\|u\|^m. \tag{2.23}$$

从而

$$\Big(\frac{k(p-n)}{(m-n)h_\alpha S^m}\Big)^{1/(m-p)}\le\|u\|\le\Big(\frac{\lambda(m-n)H_\beta S^n}{k(m-p)}\Big)^{1/(p-n)}. \tag{2.24}$$

由此可得 $\lambda \geq \lambda_0$, 矛盾! 因此, 存在 $\lambda_0 > 0$ 使当 $\lambda \in (0, \lambda_0)$ 时 $N_\lambda^0 = \emptyset$.

引理 2.4 假定 u_0 是 I_λ 在 N_λ 上的一个局部极小值点. 如果 $u_0 \notin N_\lambda^0$, 则 u_0 是 $I_\lambda(u)$ 的一个临界点.

证 设

$$F(u) = k\|u\|^p + l\|u\|^\sigma - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^m dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} H(x)|u|^n dx, u \in X.$$

考虑最优化问题: 在 $F(u) = 0$ 的条件下求 $\min\limits_{u \in N_\lambda} I_\lambda(u)$. 由 Lagrange 乘子原理知存在 $\mu \in \mathbb{R}$ 使得 $I'_\lambda(u_0) = \mu F'(u_0)$. 因此

$$\langle I'_\lambda(u_0), u_0 \rangle = \mu \langle F'(u_0), u_0 \rangle. \tag{2.25}$$

由于 $u_0 \in N_\lambda$, 从而

$$\langle I'_\lambda(u_0), u_0 \rangle = 0. \tag{2.26}$$

然而

$$\begin{aligned}\langle F'(u_0), u_0 \rangle &= kp\|u_0\|^p + l\sigma\|u_0\|^\sigma - n \int_{\mathbb{R}^N} \lambda H(x)|u_0|^n dx - m \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u_0|^m dx \\ &= k(p-n)\|u_0\|^p + l(\sigma - n)\|u_0\|^\sigma + (n-m) \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u_0|^m dx. \end{aligned}\tag{2.27}$$

因此, 如果 $u_0 \notin N_\lambda^0$, 则 $\langle F'(u_0), u_0 \rangle \neq 0$. 进而由 (2.25) 式知 $\mu = 0$. 从而 $I'_\lambda(u_0) = 0$. 证毕.

由引理 2.3, 当 $\lambda \in (0, \lambda_0)$ 时, $N_\lambda = N_\lambda^+ \cup N_\lambda^-$. 定义

$$\delta_\lambda^+ = \inf_{u \in N_\lambda^+} I_\lambda(u),\ \delta_\lambda^- = \inf_{u \in N_\lambda^-} I_\lambda(u).$$

引理 2.5 设 $\lambda_1 = \frac{n}{p}\lambda_0$. 则当 $0 < \lambda < \lambda_1$ 时有

(1)$\delta_\lambda^+ < 0$;

(2) 存在 $k_0 > 0$, 使得 $\delta_\lambda^- \geq k_0$.

证 (1) 设 $u \in N_\lambda^+$, 则由 (2.13) 和 (2.17) 式得

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^m dx < \frac{k(p-n)}{m-n}\|u\|^p + \frac{l(\sigma-n)}{m-n}\|u\|^\sigma. \tag{2.28}$$

从而

$$I_\lambda(u) < \frac{k(m-p)(n-p)}{pmn}\|u\|^p + \frac{l(m-\sigma)(n-\sigma)}{m-n}\|u\|^\sigma < 0. \tag{2.29}$$

从而 $\delta_\lambda^+ < 0$.

(2) 设 $u \in N_\lambda^-$, 则由 (2.14) 和 (2.16) 式得

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &\geq \frac{k(m-p)}{pm}\|u\|^p - \lambda\frac{m-n}{mn}H_\beta S^n\|u\|^n \\ &= \|u\|^n\left(\frac{k(m-p)}{pm}\|u\|^{p-n} - \lambda\frac{m-n}{mn}H_\beta S^n\right) \\ &> \left(\frac{k(p-n)}{(m-n)h_\alpha S^m}\right)^{\frac{n}{m-p}}\left(\frac{k(m-p)}{pm}(\frac{k(p-n)}{(m-n)h_\alpha S^m})^{\frac{p-n}{m-p}} - \frac{m-n}{mn}\lambda H_\beta S^n\right). \end{aligned}\tag{2.30}$$

从而对于任意 $u \in N_\lambda^-$, 当 $0 < \lambda < \lambda_1$ 时, 存在某常数 $k_0 = k_0(m, n, p, h_\alpha, H_\beta, S) > 0$, 使得 $I_\lambda(u) \geq k_0$. 证毕.

设 $u \in X$ 且 $\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^m dx > 0$. 令

$$z(t) = kt^{p-n}\|u\|^p + lt^{\sigma-n}\|u\|^\sigma - t^{m-n}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^m dx. \tag{2.31}$$

则 $z'(t) = t^{p-n-1}E(t)$, 其中

$$\begin{aligned} E(t) &= k(p-n)\|u\|^p + l(\sigma-n)t^{\sigma-p}\|u\|^\sigma - (m-n)t^{m-p}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^m dx \\ &= k(p-n)\|u\|^p + l(\sigma-n)t^{p\tau}\|u\|^\sigma - (m-n)t^{m-p}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^m dx. \end{aligned} \tag{2.32}$$

则

$$E'(t) = lp\tau(\sigma-n)t^{p\tau-1}\|u\|^\sigma - (m-n)(m-p)t^{m-p-1}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^m dx. \tag{2.33}$$

令 $E'(t) = 0$ 得

$$t = t^* = \left(\frac{lp(\sigma-n)\|u\|^\sigma}{(m-p)(m-n)\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^m dx}\right)^{1/(m-\sigma)}. \tag{2.34}$$

则 $E(t)$ 在 $[0, t^*)$ 单调递增, 在 $(t^*, +\infty)$ 单调递减. 从而 $E(t)$ 在 t^* 处取得最大值. 由于 $E(0) = k(p-n)\|u\|^p > 0, E(+\infty) = -\infty$, 因此存在唯一的 $t_l > t^* > 0$, 使得 $E(t_l) = 0$ 且当 $t \in [0, t_l)$ 时函数 $z(t)$ 递增, 当 $t \in (t_l, +\infty)$ 时, 函数 $z(t)$ 递减; 在 t_l 处取得最大值. 特别地, 当 $l = 0$ 时, 有

$$t_0 = \left(\frac{k(p-n)\|u\|^p}{(m-n)\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^m dx}\right)^{1/(m-p)}. \tag{2.35}$$

由 $E(t_0) = E(t_l) = 0$ 可知 $t_0 \leq t_l$. 从而

$$z(t_l) \geq k\frac{m-p}{m-n}t_l^{p-n}\|u\|^p \geq k\frac{m-p}{m-n}t_0^{p-n}\|u\|^p = z(t_0). \tag{2.36}$$

引理 2.6 对于满足 $\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^m dx > 0$ 的 $u \in X$ 及 $0 < \lambda < \lambda_0$, 有

(1) 若 $\int_{\mathbb{R}^N} H(x)|u|^n dx \leq 0$, 则存在唯一的 $t^- > t_l$ 使得 $t^-u \in N_\lambda^-$ 且有 $I_\lambda(t^-u) = \sup\limits_{t\geq 0} I_\lambda(tu)$.

(2) 若 $\int_{\mathbb{R}^N} H(x)|u|^n dx > 0$, 则存在唯一的 $0 < t^+ < t_l < t^-$ 使得 $t^+u \in N_\lambda^+, t^-u \in N_\lambda^-$ 且 $I_\lambda(t^+u) = \inf\limits_{0\leq t\leq t_l} I(tu), I_\lambda(t^-u) = \sup\limits_{t\geq 0} I(tu)$.

证 设

$$\begin{aligned}\Psi_0(t)&=\Phi(tu)=\langle I'_\lambda(tu),tu\rangle\\&=kt^p\|u\|^p+lt^\sigma\|u\|^\sigma-t^m\int_{\mathbb{R}^N}h(x)|u|^mdx-t^n\int_{\mathbb{R}^N}\lambda H(x)|u|^ndx,\\ \Psi_1(t)&=\langle\Phi'(tu),tu\rangle\\&=kpt^p\|u\|^p+l\sigma t^\sigma\|u\|^\sigma-mt^m\int_{\mathbb{R}^N}h(x)|u|^mdx-nt^n\int_{\mathbb{R}^N}\lambda H(x)|u|^ndx,\\ \Psi_2(t)&=I_\lambda(tu)\\&=\frac{k}{p}t^p\|u\|^p+\frac{l}{\sigma}t^\sigma\|u\|^\sigma\frac{1}{m}t^m\int_{\mathbb{R}^N}h(x)|u|^mdx-\frac{1}{n}t^n\int_{\mathbb{R}^N}\lambda H(x)|u|^ndx.\end{aligned}\tag{2.37}$$

则

$$\Psi_0(t)=t^n(z(t)-\int_{\mathbb{R}^N}\lambda H(x)|u|^ndx).\tag{2.38}$$

(1) 若 $\int_{\mathbb{R}^N}H(x)|u|^ndx\le 0$, 则存在唯一的 $t^->t_l$ 使得 $z(t^-)=\lambda\int_{\mathbb{R}^N}H(x)|u|^ndx$ 以及 $z'(t^-)<0$. 从而 $\Psi_0(t^-)=0$ 且有 $t^-u\in N_\lambda$. 又 $\Psi_1(t^-)=(t^-)^{n+1}z'(t^-)<0$, 从而 $t^-u\in N_\lambda^-$. 易见 $\Psi_2'(t)=t^{n-1}\Big(z(t)-\int_{\mathbb{R}^N}\lambda H(x)|u|^ndx\Big)$, 且当 $t\in[0,t^-)$ 时 $\Psi_2'(t)>0$; 当 $t\in[t^-,+\infty)$ 时 $\Psi_2'(t)<0$. 所以 $\Psi_2(t)$ 在 t^- 处取得最大值, 即 $I_\lambda(t^-u)=\sup\limits_{t\ge 0}I_\lambda(tu)$.

(2) 若 $\int_{\mathbb{R}^N}H(x)|u|^ndx>0$. 由 (2.36) 式, 当 $\lambda\in(0,\lambda_0)$ 时有

$$0=z(t)<\int_{\mathbb{R}^N}\lambda H(x)|u|^ndx<\lambda H_\beta S^n\|u_n\|<\lambda_0H_\beta S^n\|u\|^n\le z(t_0)\le z(t_l).\tag{2.39}$$

从而由函数 $z(t)$ 的特性可知存在 $0<t^+<t_l<t^-$ 使得

$$z(t^+)=z(t^-)=\int_{\mathbb{R}^N}\lambda H(x)|u|^ndx$$

以及 $z'(t^+)>0>z'(t^-)$. 由于 $\Psi_1(t)=t^{n+1}z'(t)$, 从而 $t^+u\in N_\lambda^+,t^-u\in N_\lambda^-$. 由于当 $t\in[0,t^+)$ 时, $\Psi_2'<0$; 当 $t\in[t^+,t_l)$ 时, $\Psi_2'(t)>0$, 从而 $I_\lambda(t^+u)=\inf\limits_{0\le t\le t_l}I_\lambda(tu)$. 另外, 易验证当 $t\in[t^+,t^-)$ 时, $\Psi_2'(t)>0$; 当 $t\in[t^-,+\infty)$ 时, $\Psi_2'(t)<0$; 当 $t\in[0,t^+]$ 时, $\Psi_2(t)\le 0$. 又由于 $t^-u\in N_\lambda^-$, 从而由引理 2.5 中的 (2) 可知 $\Psi_2(t^-)>0$. 从而由 $\Psi_2(t)$ 的单调性可知 $I_\lambda(t^-u)=\sup\limits_{t\ge0}I_\lambda(tu)$. 证毕.

对于任意 $u\in X,\int_{\mathbb{R}^N}\lambda H(x)|u|^ndx>0$. 定义函数

$$\eta(t)=kt^{p-m}\|u\|^p+lt^{\sigma-m}\|u\|^\sigma-t^{n-m}\int_{\mathbb{R}^N}\lambda H(x)|u|^ndx,t>0,\tag{2.40}$$

则 $\eta(0^+)=-\infty,\eta(+\infty)=0,\eta(t)$ 在某个 $t=T_l>0$ 处取得最大值.

引理 2.7 对于每一满足 $\int_{\mathbb{R}^N} \lambda H(x)|u|^n dx > 0$ 的 $u \in X$, 当 $0 < \lambda < \lambda_1$ 时, 有

(1) 若 $\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^m dx \leq 0$, 则存在唯一的 $0 < t^+ < T_l$ 使得 $t^+u \in N_\lambda^+$ 且有 $I_\lambda(t^+u) = \inf\limits_{0\leq t\leq T_l} I_\lambda(tu)$.

(2) 若 $\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^m dx > 0$, 则存在唯一的 $0 < t^+ < T_l < t^-$ 使得 $t^+u \in N_\lambda^+, t^-u \in N_\lambda^-$ 且有 $I_\lambda(t^+u) = \inf\limits_{0\leq t\leq T_l} I_\lambda(tu), I_\lambda(t^-u) = \sup\limits_{t\geq 0} I_\lambda(tu)$.

证 由于 $\Psi_2'(t) = t^{m-1}\Big(\eta(t) - \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^m dx\Big)$, 从而可应用引理 2.6 的证明方法得到引理 2.7 的证明, 故在此略去.

引理 2.8 假定 (A1)–(A3) 成立. 若 $\{u_k\}$ 在 X 中收敛于 $u \in X$, 则存在 $\{u_k\}$ 的一个子列 (不妨仍记为 $\{u_k\}$) 满足

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u_k - u|^m dx = 0, \tag{2.41}$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} H(x)|u_k - u|^n dx = 0. \tag{2.42}$$

证 只证明 (2.42), (2.41) 式的证明是类似的, 在此略去. 因为 $H(x)|x|^{bn} \in L^\beta(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, 从而对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $R_0 > 0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|H(x)||x|^{bn})^\beta dx < \varepsilon^\beta, \tag{2.43}$$

其中 $B_r = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq r\}$ 而 $B_r^c = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| > r\}, r > 0$. 由于 $\{u_k\}$ 在 X 中弱收敛于 u, 则 $\{u_k\}$ 在 X 中有界且 $\{u_k\}$ 在空间 $W_a^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中弱收敛于 u. 进而, 由不等式 (2.43) 推出 $\{u_k\}$ 在空间 $L_b^{p^*}$ 中有界. 因此, 存在 $\{u_k\}$ 的子列 (不妨仍记为 $\{u_k\}$) 使得 $\{u_k\}$ 在 $L_{b,\mathrm{loc}}^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ 中弱收敛于 u, 在 $\mathbb{R}^N$ 中几乎处处收敛于 u. 从而对于任意 $k \geq 1$ 存在与 k 无关的常数 M 使得

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp^*}|u_k|^{p^*} dx \leq M^{p^*}, \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bp^*}|u|^{p^*} dx \leq M^{p^*}. \tag{2.44}$$

因此对于足够大的 k 成立,

$$\int_{B_{R_0}} |x|^{-bp^*}|u_k - u|^{p^*} dx < \varepsilon^{p^*}. \tag{2.45}$$

另一方面, 由 Hölder 不等式, 当 k 足够大时, 有

$$\begin{aligned}\int_{B_{R_0}^c} H(x)|u_k - u|^n dx &\leq \Big(\int_{B_{R_0}^c} (|H(x)||x|^{bn})^\beta dx\Big)^{\frac{1}{\beta}} \Big(\int_{B_{R_0}^c} |x|^{-bp^*}|u_k - u|^{p^*} dx\Big)^{\frac{n}{p^*}} \\ &\leq 2^n M^n \varepsilon^n.\end{aligned} \tag{2.46}$$

因此 $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} H(x)|u_k - u|^n dx = 0$. 证毕!

3 正解的存在性

引理 3.1 如果 $0<\lambda<\lambda_1$, 则泛函 I_λ 在 N_λ^+ 上存在一个最小值点且有

(1) $I_\lambda(u_0)=\delta_\lambda^+$;

(2) u_0 是问题 (1.2) 的一个非平凡的非负解.

证 由引理 2.2 知 I_λ 在 N_λ 上有下界 (从而在 N_λ^+ 上有下界), 因此存在一个极小化序列 $\{u_k\}\subseteq N_\lambda^+$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}I_\lambda(u_k)=\inf\limits_{u\in N_\lambda^+}I_\lambda(u)$. 因为泛函 I_λ 是强制的, 所以 $\{u_k\}$ 在 X 中有界. 不失一般性, 可假定 $\{u_k\}$ 在 X 中弱收敛于 u_0. 由引理 2.5 和引理 2.8 可得, 当 $k\to\infty$ 时, 有

$$I_\lambda(u_k)\to\delta_\lambda^+<0,\ \int_{\mathbb{R}^N}H(x)|u_k|^n dx\to\int_{\mathbb{R}^N}H(x)|u_0|^n dx. \tag{3.1}$$

由 (2.8) 式得

$$I_\lambda(u_k)=k\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{m}\Big)\|u_k\|^p+l\Big(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{m}\Big)\|u_k\|^\sigma+\Big(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\Big)\int_{\mathbb{R}^N}\lambda H(x)|u_k|^n dx. \tag{3.2}$$

因此

$$\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\Big)\int_{\mathbb{R}^N}\lambda H(x)|u_k|^n dx=k\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{m}\Big)\|u_k\|^p+l\Big(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{m}\Big)\|u_k\|^\sigma-I_\lambda(u_k). \tag{3.3}$$

在 (3.3) 式的两边取极限 $k\to\infty$, 则有 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}H(x)|u_0|^n dx>0$. 进而由引理 2.7, 存在唯一的 $t_0^+<T_l$ 使得

$$t_0^+u_0^+\in N_\lambda^+,\Psi_0(t_0^+)=\langle I_\lambda'(t_0^+u_0^+),t_0^+u_0^+\rangle=0.$$

接下来证明 $\{u_n\}$ 在 X 中强收敛于 u_0^+.

假若结论不成立, 则有 $\|u_0^+\|<\liminf\limits_{n\to\infty}\|u_n\|$, 则对

$$\begin{aligned}\langle I_\lambda'(t_0^+u_n),t_0^+u_n\rangle=&k(t_0^+)^p\|u_n\|^p+l(t_0^+)^\sigma\|u_n\|^\sigma\\&-(t_0^+)^m\int_{\mathbb{R}^N}h(x)|u|^m dx-(t_0^+)^n\int_{\mathbb{R}^N}\lambda H(x)|u|^n dx.\end{aligned} \tag{3.4}$$

两边当 $n\to\infty$ 取极限, 再由 $\Psi_0(t_0^+)=0$ 可得, 当 n 充分大时,

$$\langle I_\lambda'(t_0^+u_n),t_0^+u_n\rangle>0. \tag{3.5}$$

另一方面, 由 $\{u_n\}\subseteq N_\lambda^+$ 可知 $\langle I_\lambda'(u_n),u_n\rangle=0$, 且当 $0<t<1$ 时, $\langle I_\lambda'(tu_n),tu_n\rangle<0$. 从而由 (3.5) 式知 $t_0^+>1$. 因为 $I_\lambda(tu_0^+)$ 在 $[0,t_0^+)$ 上是递减的, 所以

$$I_\lambda(t_0^+u_0^+)<I_\lambda(u_0^+)<\liminf_{n\to\infty}I_\lambda(u_n)=\delta^+. \tag{3.6}$$

这与下确界的定义矛盾! 故 $\{u_n\}$ 在 X 中强收敛于 u_0^+. 从而

$$I_\lambda(u_0^+)=\lim_{n\to\infty}I_\lambda(u_n)=\delta^+, \tag{3.7}$$

即 u_0^+ 是 I_λ 在 N_λ^+ 上的一个极小值点. 又由于 $I_\lambda(u_0^+) = I_\lambda(|u_0^+|)$ 且 $|u_0^+| \in N_\lambda^+$, 从而由引理 2.4 可知 u_0^+ 是问题 (1.2) 的非负弱解. 再由极值原理 (参见文献 [9]) 知 $u_0^+ > 0, v_0^+ > 0$.

引理 3.2 假定 $\lambda \in (0, \lambda_1)$, 则泛函 I_λ 在 N_λ^- 上有极小值点 u_0^- 使得

(1) $I_\lambda(u_0^-) = \delta^-$;

(2) u_0^- 是问题 (1.2) 的一个非平凡的非负解.

证 由引理 2.2 知 I_λ 在 N_λ^- 上是强制的. 从而存在一极小化序列 $\{u_k\} \subseteq N_\lambda^-$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} I_\lambda(u_k) = \inf_{u\in N_\lambda^-} I_\lambda(u). \tag{3.8}$$

由于 I_λ 强制, 从而 $\{u_k\}$ 在 X 中有界. 因此, 存在 $\{u_k\}$ 的一个子列 (不妨仍记为 $\{u_k\}$) 在 X 中弱收敛于元 u_0^-. 由引理 2.5 可知, 当 $u \in N_\lambda^-$ 时, $I_\lambda(u) > 0$, 因此有

$$\inf_{u\in N_\lambda^-} I_\lambda(u) > 0. \tag{3.9}$$

进而由 (2.9) 式得

$$I_\lambda(u_k) = k\big(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\big)\|u_k\|^p + l(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{n})\|u_k\|^\sigma + \big(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\big)\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u_k|^m dx, \tag{3.10}$$

令 $k \to \infty$, 由引理 2.8 得 $\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u_0^-|^m dx > 0$. 因此由引理 2.6, 存在唯一的 t_0 使得 $t_0u_0 \in N_\lambda^-$.

接下来证明 $\{u_k\}$ 在 X 中强收敛于 u_0^-. 假若不然, 则有

$$\|u_0^-\| < \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|. \tag{3.11}$$

由于 $u_k \in N_\lambda^-$, 从而当 $t \geq 0$ 时, $I_\lambda(u_k) \geq I_\lambda(tu_k)$. 因此有

$$I_\lambda(t_0^-u_0^-) < \liminf_{n\to\infty} I_\lambda(t_0^-u_n) \leq \lim_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) = \delta^-. \tag{3.12}$$

这与 δ^- 的定义矛盾! 从而 $\{u_k\}$ 在 X 中强收敛于 u_0^-. 从而

$$I_\lambda(u_0) = \lim_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) = \delta^-. \tag{3.13}$$

类似于引理 3.1 的讨论可知 u_0^- 是问题 (1.2) 的一个正解. 证毕!

定理 1.1 的证明 由引理 3.1 和引理 3.2 知, 当 $\lambda \in (0, \lambda_1)$ 时, 问题 (1.2) 有两个非平凡的正解 $u_0^+ \in N_\lambda^+$ 和 $u_0^- \in N_\lambda^-$. 又由于 $N_\lambda^+ \cap N_\lambda^- = \emptyset$, 从而 u_0^+ 和 u_0^- 是问题 (1.2) 的两个不同的正解. 定理 1.1 证毕!

参 考 文 献

[1] Fan H N, Liu X C. Multiple positive solutions to a class of quasi-linear elliptic equations involving critical Sobolev exponent[J]. Monatsh Math., 2014, 174: 427–447.

[2] Figueiredo G M, Morales-Rodrigo C, Santos Júnior J R. Study of a nonlinear Kirchhoff equation with non-homogeneous material[J]. J. Math. Anal. Appl., 2014, 416: 597–608.

[3] Aouaoui S. Multiplicity result for some nonlocal anisotropic equation via nonsmooth critical point theory approach[J]. Appl. Math. Compu., 2011, 218: 532–541.

[4] Cheng B. New existence and multiplicity of nontrivial solutions for nonlocal elliptic Kirchhoff type problems[J]. J. Math. Anal. Appl., 2012, 394: 488–495.

[5] Wu Y Z, Huang Y S, Liu Z. On a Kirchhoff type problem in $\mathbb{R}^N$[J]. J. Math. Anal. Appl., 2015, 425: 548–564.

[6] Chen C Y, Kuo Y C, Wu T F. The Nehari manifold for a Kirchhoff type problem involving sign-changing weight functions[J]. J. Diff. Equ., 2011, 250: 1876–1908.

[7] Chen C S, Huang J C, Liu L H. Multiple solutions to the nonhomogeneous p-Kirchhoff elliptic equation with concave-convex nonlinearities[J]. Appl. Math. Lett., 2013, 26: 754–759.

[8] Caffarelli L, Kohn R, Nirenberg L. First order interpolation inequalities with weights[J]. Compos. Math., 1984, 53: 437–477.

[9] Struwe M. Variational methods, applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems (3rd ed.)[M]. New York: Springer-Verlag, 2000.

THE EXISTENCE OF POSITIVE SOLUTIONS FOR A NONLOCAL ELLIPTIC EQUATION

CHEN Lin

(*College of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining 835000, China*)

Abstract: In this paper, we study the existence of nontrivial week solutions for a class of nonlocal elliptic equation. By using Nehari manifold and the fibbering maps, we establish some conditions on the existence of positive solutions, which extends and improves the corresponding results in this area.

Keywords: elliptic equation; Nehari manifold; fibbering map; positive solution

2010 MR Subject Classification: 35J20; 35J62