

大偏差方法在投资组合中的应用

王开宏

(武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

摘要: 本文研究了离散时间下, 风险资产价格增长率独立同分布, 投资决策依赖于前一时刻的风险资产价格变动情况下的最优投资组合. 利用大偏差方法, 证明了这种情形下时均对数收益率的大偏差原理成立, 定理不需要收益率序列有界的假设. 具体给出了最优投资组合的计算方法, 并且利用 MATLAB 进行了实例计算.

关键词: 大偏差; 对数收益率; 投资组合

MR(2010) 主题分类号: 60F10

中图分类号: O211.9

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2019)01-0067-10

1 引言

确定最优投资组合的准则一直是人们关注的热点, 可能最早的理论是由 Bernoulli 提出的期望财富最大化准则, 类似的还有对数财富最大化、财富增长率最大化和 Kelly 投资策略. MacLean 等^[1]指出 Kelly 投资策略从没有提到破产风险, 但通常情况这种策略会使投资者承担失去本金的较大风险. 传统方法还包括期望效用最大化的准则, 在这个准则下, 首先要明确代表投资者偏好的效用函数, 显然这是带有一定主观性并且很难准确估计的. 同时, 面对不同规模的风险选取合适的效用函数类型来计算也是比较困难的.

鉴于之前准则的缺陷, Browne^[2,3]对于连续时间的投资行为, 提出了赤字概率最小化准则, 并且与标准的幂效用函数准则作了对比, 发现幂效用函数最大化和赤字概率最小化是可以同时实现的. Stutzer^[4,5,6]建立了新的投资准则, 提出在相当长的投资期限内, 选取一个投资组合, 使得期望收益率小于目标收益率的概率衰减到 0 的衰减速率达到最大, 以此作为最优投资组合, 这个准则简称衰减速率准则. 并且证明了当不同时刻的投资组合收益率独立同分布时, 这样的最优投资组合对于任何期限 T , 相比其他投资组合, 收益率小于目标收益率的概率都是最小的. Stutzer 开创性地将大偏差方法引入到了最优投资组合的研究中, 通过大偏差方法计算得到衰减速率准则下的最优投资组合. 而 Chu^[7]从另外的角度, 利用大偏差方法研究了证券组合包含的资产种类充分大情况下的最优投资组合, 计算了资产种类为有限个时的赤字概率上界. 并且研究了资产间的非线性相关关系对于最优投资组合和赤字概率上界的影响.

Pham^[8,9]提出了连续时间下客观的最优投资组合准则, 即在时间充分大的条件下, 使得真实收益率大于目标收益率的概率达到最大的投资组合. 将这个问题归结为大偏差控制问题, 证明了在一定条件下可以将大偏差控制问题转化为它的对偶问题进行求解, 而它的对偶问题是一个在对数矩母函数最大值处的遍历风险敏感度控制问题, 具体给出了最优投资组合的确定方法, 并且研究了模型在边界点的最优投资组合.

*收稿日期: 2017-03-07

接收日期: 2017-06-20

作者简介: 王开宏 (1993-), 男, 山西平遥, 硕士, 主要研究方向: 概率论.

关于相依随机序列的大偏差, Schonmann^[10] 证明了弱混合有界平稳序列满足大偏差原理, Yakimavichyus^[11] 证明了一维的一致强混合序列满足大偏差原理, Bryc^[12] 在前人研究的基础上证明了有界 ϕ 混合平稳序列和有界 ψ 混合平稳序列满足大偏差原理. 但这些研究都是基于有界随机变量进行的.

基于前人的研究, 在离散时间下, 投资者将财富投资于两类资产: 风险资产和无风险资产, 风险资产价格的增长率独立同分布, 每个时刻的最优投资组合依赖于前一时刻风险资产价格的变动表现, 在这种情况下, 本文结合引理 3.2, 通过借鉴 Bryc^[12] 的定理 4 的证明思路并且运用分块法思想、Hölder 不等式、函数的凹凸性性质等技巧, 给出了时均对数收益率满足大偏差原理的证明, 定理不需要随机序列有界的假设.

基于投资组合固定不变的假设, 利用 MATLAB 计算了风险资产价格服从两点分布时的最优投资组合; 接着以投资组合是前一时刻风险资产收益率的线性函数为假设, 利用 MATLAB 计算了风险资产价格服从均匀分布时的风险资产最优投资比例函数.

2 大偏差准则

基于投资期限充分长的假设, 利用大偏差方法建立一个最优投资组合的确定准则, 这个准则与个人偏好无关. 假设在离散时间下, 财富只投资于两种资产: 风险资产与无风险资产, 并且假定风险资产价格的增长率是 i.i.d. 的, 即为独立同分布的, 认为每一时刻的投资组合只与前一时刻风险资产价格的增长率有关, 建立模型

风险资产: $S_n = S_{n-1}\xi_n, \xi_n \sim f(x), n = 1, 2, 3, \dots;$

无风险资产: $S_n^0 = S_0^0(1+r)^n, n = 1, 2, 3, \dots,$

其中 S_n 表示 n 时刻风险资产的价格, S_0 表示风险资产的初始价格, ξ_n 表示 n 时刻风险资产价格的增长率, $f(x)$ 为 ξ_n 的概率密度函数, S_n^0 表示 n 时刻无风险资产的价格, r 为无风险利率.

用 $\pi(\xi_{n-1})$ 表示 n 时刻投资于风险资产的比例, 它是前一时刻资产价格增长率的函数, X_n 表示 n 时刻投资者的财富, 于是有

$$\frac{\Delta X_n}{X_{n-1}} = \pi(\xi_{n-1}) \frac{\Delta S_n}{S_{n-1}} + (1 - \pi(\xi_{n-1})) \frac{\Delta S_n^0}{S_{n-1}^0}, n = 1, 2, 3, \dots,$$

其中 X_0, π_0 为常数, 从而有

$$\frac{X_n}{X_{n-1}} - 1 = \pi(\xi_{n-1})(\xi_n - 1) + (1 - \pi(\xi_{n-1}))r, n = 1, 2, 3, \dots. \quad (2.1)$$

对 (2.1) 式两边取对数, 有

$$\log X_n - \log X_{n-1} = \log(1 + \pi(\xi_{n-1})(\xi_n - 1) + (1 - \pi(\xi_{n-1}))r),$$

前 n 项连加, 得到

$$\log X_n - \log X_0 = \sum_{i=1}^n \log(1 + \pi(\xi_{i-1})(\xi_i - 1) + (1 - \pi(\xi_{i-1}))r).$$

定义 n 时刻财富 X_n 的对数增长率

$$L_n^\pi := \log X_n = \sum_{i=1}^n Y_i, n = 1, 2, 3 \cdots,$$

其中

$$Y_i = \log(1 + \pi(\xi_{i-1})(\xi_i - 1) + (1 - \pi(\xi_{i-1}))r) + \frac{1}{n} \log X_0.$$

定义 0 到 n 时刻之间的平均对数增长率

$$\bar{L}_n^\pi := \frac{L_n^\pi}{n}, n = 1, 2, 3 \cdots.$$

考虑投资期限充分长的条件下, 给定一个目标增长率 l , 在投资组合集里寻找能使以下概率达到最大的组合作为最优投资组合 $\lim_{n \rightarrow \infty} P[\bar{L}_n^\pi \geq l]$. 如果 $\bar{L}_n^\pi$ 满足大偏差原理, 则可以建立最优投资组合的大偏差准则

$$\nu(l) := \sup_{\pi} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P[\bar{L}_n^\pi \geq l].$$

可以看出, 这个准则只依赖于客观的概率 P 和目标增长率 l , 与效用函数无关, 并且是在投资期限充分大的情况下确定的.

3 时均对数收益率的大偏差定理

定义 3.1 ^[13] 设 $\mathcal{G}$ 是 $C(E)$ 中一个子集, 称 $\mathcal{G}$ 为一个分离类, 若

- (i) $\mathcal{G}$ 包含所有常值函数;
- (ii) $\mathcal{G}$ 对有限逐点下端运算封闭, 即 $g_1, g_2 \in \mathcal{G} \Rightarrow g_1 \wedge g_2 \in \mathcal{G}$;
- (iii) $\mathcal{G}$ 分离 E 中的点. 即若 $x, y \in E$ 且 $x \neq y$, 则对任意 $a, b \in \mathbb{R}, \exists g \in \mathcal{G}$ 使 $g(x) = a, g(y) = b$,

其中 $C(E)$ 表示 E 上实值连续函数的全体.

引理 3.2 设 $(\mu_\varepsilon, \varepsilon > 0)$ 是 Polish 空间 E 上一族指数胎紧概率测度, 设 $\mathcal{G}$ 是 E 上一个分离类, 假若对任意 $g \in \mathcal{G}$,

$$\Lambda(g) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda(\varepsilon) \log \int_E \exp\left[\frac{g}{\lambda(\varepsilon)}\right] d\mu_\varepsilon$$

存在, 则对任意 $\phi \in C_b(E)$, $\Lambda(\phi)$ 存在, 令

$$I(x) = \sup_{\phi \in C_b(E)} \{\phi(x) - \Lambda(\phi)\},$$

则 $\{\mu_\varepsilon, I, \lambda(\varepsilon)\}$ 满足 LDP, I 下紧, 其中 $C_b(E)$ 表示 E 上有界实值连续函数的全体.

定理 3.3 $\forall \theta$, 假定 $E(e^{\theta \xi_i}) < \infty$, 则

$$\Gamma(\theta, \pi) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log E[e^{\theta n \bar{L}_n^\pi}]$$

存在, 且对任何闭集 F ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{L}_n^\pi \in F) \leq - \inf_{x \in F} I^\pi(x),$$

对任何开集 G ,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P(\bar{L}_n^\pi \in G) \geq - \inf_{x \in G} I^\pi(x),$$

其中 $I^\pi(x) = \sup[\theta x - \Gamma(\theta, \pi)]$. 即在风险资产价格增长率独立同分布, 投资决策只依赖于前一时刻风险资产价格的变动表现的情况下, 时均对数收益率满足大偏差原理.

证 令

$$\mathcal{G} = \{\theta, \theta(x) = \min_{1 \leq j \leq d} \{\lambda_j(x) + c_j\}, d \geq 1, c_j \in \mathbb{R}, \lambda_j \in \mathbb{R}^*\},$$

其中 $\mathbb{R}^*$ 表示 $\mathbb{R}$ 上线性有界泛函的全体.

证明对于任意 $\theta \in \mathcal{G}$, 极限

$$\Gamma'(\theta, \pi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log E[e^{n\theta(\bar{L}_n^\pi)}]$$

存在, 令 $Z_n = \bar{L}_n^\pi$, 则 $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$. 现证明

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log E[\exp(n\theta(Z_n))] \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log E[\exp(n\theta(Z_n))].$$

考虑分块法, 对 $n \geq 1$, 有 $n = k(M+1) + l$, $0 \leq l \leq M+1$, $k = k(n) = [n/(M+1)]$, $l = n - k(M+1)$, 有

$$\sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^M Y_{j(M+1)+i} + \sum_{j=1}^k Y_{j(M+1)} + \sum_{i=k(M+1)+1}^n Y_i,$$

从而 Z_n 可以表示为凸组合

$$Z_n = \frac{k(M+1)}{n} Z_{k(M+1)} + \frac{l}{n} \left(\frac{1}{l} \sum_{i=k(M+1)+1}^n Y_i \right),$$

由 $\theta(x)$ 的凹性

$$\theta(Z_n) \geq \frac{k(M+1)}{n} \theta(Z_{k(M+1)}) + \frac{l}{n} \theta(Z'_l),$$

令 $U_n = Z_n/p$, $U_{k(M+1)} = Z_{k(M+1)}/p$, $U'_l = Z'_l/p$, $p > 1$, 由 Hölder 不等式, 有

$$(Ee^{pn\theta(U_n)})^{\frac{1}{p}} \geq Ee^{k(M+1)\theta(U_{k(M+1)})} \times (Ee^{-ql\theta(U'_l)})^{-\frac{1}{q}}, p > 1, q > 1. \quad (3.1)$$

由 $\theta(x)$ 的定义, $\forall a > 0$, 有 $|\theta(ax) - a\theta(x)| \leq \max_{1 \leq j \leq d} |c_j - ac_j|$, 从而有

$$\begin{aligned} Ee^{pn\theta(U_n)} &\leq e^{pn \max_{1 \leq j \leq d} |c_j - \frac{1}{p}c_j|} Ee^{n\theta(Z_n)}, \\ Ee^{k(M+1)\theta(U_{k(M+1)})} &\geq e^{-k(M+1) \max_{1 \leq j \leq d} |c_j - \frac{1}{p}c_j|} Ee^{\frac{1}{p}k(M+1)\theta(Z_{k(M+1)})}, \\ Ee^{-lq\theta(U'_l)} &\leq e^{lq \max_{1 \leq j \leq d} |c_j - \frac{1}{p}c_j|} Ee^{-\frac{lq}{p}\theta(Z'_l)}. \end{aligned}$$

结合 (3.1) 式, 因此有

$$\begin{aligned} Ee^{n\theta(Z_n)} &\geq (Ee^{\frac{1}{p}k(M+1)\theta(Z_{k(M+1)})})^p e^{-pk(M+1)\max_j |c_j - \frac{1}{p}c_j|} \\ &\quad (Ee^{-\frac{lq}{p}\theta(Z'_l)})^{-\frac{p}{q}} e^{-pl\max_j |c_j - \frac{1}{p}c_j|} e^{-pn\max_j |c_j - \frac{1}{p}c_j|}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

另一方面, $Z_{k(M+1)}$ 可以表示为凸组合

$$Z_{k(M+1)} = \frac{1}{k} \frac{Mk}{M+1} \left[\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M Y_{j(M+1)+i} \right) \right] + \frac{1}{k} \frac{k}{M+1} \left[\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k Y_{j(M+1)} \right].$$

令

$$Z'_{kM} = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M Y_{j(M+1)+i} \right), Z'_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k Y_{j(M+1)}.$$

令

$$V_{k(M+1)} = \frac{1}{ap} Z_{k(M+1)}, V_{kM} = \frac{1}{ap} Z'_{kM}, V_k = \frac{1}{ap} Z'_k, a > 1.$$

由 $\theta(x)$ 的凹性有

$$\theta(V_{k(M+1)}) \geq \frac{M}{M+1} \theta(V_{kM}) + \frac{1}{M+1} \theta(V_k),$$

由 Hölder 不等式, 有

$$(Ee^{ak(M+1)\theta(V_{k(M+1)})})^{\frac{1}{a}} \geq Ee^{kM\theta(V_{kM})} (Ee^{-bk\theta(V_k)})^{-\frac{1}{b}}, a > 1, b > 1. \quad (3.3)$$

同理利用 $\theta(x)$ 的定义, 有

$$\begin{aligned} Ee^{ak(M+1)\theta(V_{k(M+1)})} &\leq Ee^{\frac{1}{p}k(M+1)\theta(Z_{k(M+1)})} e^{ak(M+1)\max_j |c_j - \frac{1}{ap}c_j|}, \\ Ee^{kM\theta(V_{kM})} &\geq Ee^{\frac{1}{ap}kM\theta(Z'_{kM})} e^{-kM\max_j |c_j - \frac{1}{ap}c_j|}, \\ Ee^{-bk\theta(V_k)} &\leq Ee^{-bk\frac{1}{ap}\theta(Z'_k)} e^{bk\max_j |c_j - \frac{1}{ap}c_j|}. \end{aligned}$$

结合 (3.3) 式, 可以推出

$$\begin{aligned} (Ee^{\frac{1}{p}k(M+1)\theta(Z_{k(M+1)})})^p &\geq (Ee^{\frac{1}{ap}kM\theta(Z'_{kM})})^{ap} e^{-apkM\max_j |c_j - \frac{1}{ap}c_j|} (Ee^{-bk\frac{1}{ap}\theta(Z'_k)})^{-\frac{ap}{b}} \\ &\quad \times e^{-apk\max_j |c_j - \frac{1}{ap}c_j|} e^{-ak(M+1)\max_j |c_j - \frac{1}{ap}c_j|}. \end{aligned}$$

结合 (3.2) 式, 有

$$\frac{1}{n} \log Ee^{n\theta(Z_n)} \geq \frac{ap}{n} \log Ee^{\frac{kM}{ap}\theta(Z'_{kM})} - \frac{ap}{nb} \log Ee^{-\frac{bk}{ap}\theta(Z'_k)} - \frac{p}{nq} \log Ee^{-\frac{lq}{p}\theta(Z'_l)} + A, \quad (3.4)$$

其中

$$A = -\left(\frac{pk(M+1)}{n} + \frac{pl}{n} + p\right) \max_j |c_j - \frac{1}{p}c_j| - \left(\frac{apkM}{n} + \frac{ak(M+1)}{n} + \frac{apk}{n}\right) \max_j |c_j - \frac{1}{ap}c_j|.$$

由于风险资产的投资比例 $\pi(\xi_{i-1})$ 有界, 所以有 $Ee^{\theta(Y_i)} < \infty, l \leq M+1$, 所以

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{nq} \log Ee^{-\frac{la}{p}\theta(Z'_l)} = 0. \quad (3.5)$$

由于

$$\theta(Z'_k) = \theta\left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k Y_{j(M+1)}\right) \geq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \theta(Y_{j(M+1)}),$$

对于 $\theta(Y_{j(M+1)})$, 总能找到常数 c_j 和常数 d_j , 使得 $|\theta(Y_{j(M+1)})| \leq c_j|Y_{j(M+1)}| + d_j$, 所以有

$$\begin{aligned} \frac{ap}{nb} \log Ee^{-\frac{bk}{ap}\theta(Z'_k)} &\leq \frac{ap}{nb} \log Ee^{\frac{b}{ap} \sum_{j=1}^k (c_j|Y_{j(M+1)}| + d_j)} \\ &= \frac{apk}{nb} \log Ee^{\frac{b}{ap}(c_j|Y_{j(M+1)}| + d_j)}, \end{aligned}$$

因此有

$$\overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{apk}{nb} \log Ee^{\frac{b}{ap}(c_j|Y_{j(M+1)}| + d_j)} = 0. \quad (3.6)$$

结合 (3.4)–(3.6) 式, 得到

$$\frac{1}{n} \log Ee^{n\theta(Z_n)} \geq \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{ap}{n} \log Ee^{\frac{kM}{ap}\theta(Z'_{kM})} + A.$$

由于

$$\theta(Z'_{kM}) \geq \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \theta\left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M Y_{j(M+1)+i}\right),$$

故有

$$Ee^{\frac{kM}{ap}\theta(Z'_{kM})} \geq Ee^{\frac{M}{ap} \sum_{j=0}^{k-1} \theta\left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M Y_{j(M+1)+i}\right)} = \left(Ee^{\frac{M}{ap} \theta\left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M Y_{j(M+1)+i}\right)}\right)^k,$$

因此有

$$\begin{aligned} \underline{\Lambda}(\theta) &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log Ee^{n\theta(Z_n)} \geq \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{ap}{n} k \log Ee^{\frac{M}{ap}\theta(Z_M)} + A \\ &= \overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} ap \frac{1}{M} \log Ee^{\frac{M}{ap}\theta(Z_M)} + A = ap \overline{\Lambda}\left(\frac{1}{ap}\theta\right) + A, \end{aligned}$$

$\overline{\Lambda}(\theta)$ 是一个凸函数, 故在其有效域 $\{\theta : \overline{\Lambda}(\theta) < \infty\}$ 中连续, 当 $a \rightarrow 1, p \rightarrow 1$ 时, $A \rightarrow 0$, 有 $\underline{\Lambda}(\theta) \geq \overline{\Lambda}(\theta)$ 得证, 因此 $\Gamma'(\theta, \pi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log E[e^{n\theta(\bar{L}_n^\pi)}]$ 在 $\mathcal{G} = \{\theta, \theta(x) = \min_{1 \leq j \leq d} \{\lambda_j(x) + c_j\}, d \geq 1, c_j \in R, \lambda_j \in R^*\}$ 上存在.

再证 $\{\mu_n, n > 0\}$ 指数胎紧. 其中对集合 A , $\mu_n(A) = P(\bar{L}_n^\pi \in A)$. $\forall M \in [0, \infty), \forall \alpha > 0$, 有

$$P\left(\frac{1}{n} L_n^\pi \geq M\right) \leq e^{-\alpha M n} E(e^{\alpha L_n^\pi}), \quad L_n^\pi = \sum_{i=1}^n Y_i = L_n^1 + L_n^2,$$

其中 $L_n^1 = \sum_{i \in A1} Y_i, L_n^2 = \sum_{i \in A2} Y_i$, $A1$ 是 1 到 n 的奇数集合, $A2$ 是偶数集合, 可知 L_n^1 和 L_n^2 均为独立和, 由 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned} e^{-\alpha M n} E(e^{\alpha L_n^\pi}) &\leq e^{-\alpha M n} (Ee^{2\alpha L_n^1})^{\frac{1}{2}} (Ee^{2\alpha L_n^2})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq e^{-\alpha M n} (Ee^{2\alpha Y_i})^{\frac{n}{2}} = e^{-n(\alpha M - \frac{1}{2} \log Ee^{2\alpha Y_i})}, \end{aligned}$$

所以 $\frac{1}{n} \log P(\bar{L}_n^\pi \geq M) \leq -(\alpha M - \frac{1}{2} \log Ee^{2\alpha Y_i})$. 令 $\alpha \rightarrow \infty$, $\frac{1}{n} \log P(\bar{L}_n^\pi \geq M) \leq -\infty$. 同理可证 $\frac{1}{n} \log P(\bar{L}_n^\pi \leq -M) \leq -\infty$. 综上, $\forall l \in [0, \infty)$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} P(|\bar{L}_n^\pi| \geq M) \leq -l$. 最后验证 $\mathcal{G}$ 是一个分离类.

- 1) 显然, $\mathcal{G} \subset C(\mathbb{R})$ 且包含所有常值函数;
- 2) 假设 $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{G}$,

$$\begin{aligned} \theta_1(x) &= \min_{1 \leq j \leq d_1} \{\lambda_j^{(1)}(x) + c_j^{(1)}\}, \lambda_j^{(1)} \in \mathbb{R}^*, c_j^{(1)} \in \mathbb{R}, \\ \theta_2(x) &= \min_{1 \leq i \leq d_2} \{\lambda_i^{(2)}(x) + c_i^{(2)}\}, \lambda_i^{(2)} \in \mathbb{R}^*, c_i^{(2)} \in \mathbb{R}, \\ (\theta_1 \wedge \theta_2)(x) &= \theta_1(x) \wedge \theta_2(x) \\ &= \min\{\lambda_j^{(1)}(x) + c_j^{(1)}, 1 \leq j \leq d_1, \lambda_i^{(2)}(x) + c_i^{(2)}, 1 \leq i \leq d_2\} \\ &= \min_{1 \leq k \leq d} \{\lambda_k(x) + c_k\} \in \mathcal{G}, \end{aligned}$$

其中 $d = d_1 + d_2$,

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda_k^{(1)}, & 1 \leq k \leq d_1, \\ \lambda_{k-d}^{(2)}, & d_1 + 1 \leq k \leq d, \end{cases} \quad c_k = \begin{cases} c_k^{(1)}, & 1 \leq k \leq d_1, \\ c_{k-d}^{(2)}, & d_1 + 1 \leq k \leq d, \end{cases}$$

因此 $\mathcal{G}$ 对有限逐点下端运算封闭得证;

- 3) $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, 取

$$g(z) = \frac{a-b}{x-y}(z-x) + a = \frac{a-b}{x-y}z + (a - \frac{(a-b)x}{x-y}).$$

令 $c_1 = a - \frac{(a-b)x}{x-y} \in \mathbb{R}$. 考虑 $\lambda_1 : z \mapsto \frac{a-b}{x-y}z$, 是连续的, 接下来证线性性质,

$$\lambda_1(A_1 z_1 + A_2 z_2) = A_1 \cdot \frac{a-b}{x-y} \cdot z_1 + A_2 \cdot \frac{a-b}{x-y} \cdot z_2 = A_1 \lambda_1(z_1) + A_2 \lambda_1(z_2),$$

得到 $\lambda_1 \in \mathbb{R}^*$, 因此 $\mathcal{G}$ 分离 $\mathbb{R}$ 中的点得证. 由引理 3.2, $\bar{L}_n^\pi := \frac{L_n^\pi}{n}$ 的大偏差原理成立.

4 最优投资组合的确定

给定 π , 给定一个目标收益率 l , 要求 $l \geq E(\bar{L}_n^\pi)$, 平均增长率 $\bar{L}_n^\pi$ 的速率函数 $I^\pi(*)$ 是 $\Gamma(*, \pi)$ 的 Legendre 变换 $I^\pi(l) = I(l, \pi) = \sup_\theta [\theta l - \Gamma(\theta, \pi)]$. 由定理 3.3 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P[\bar{L}_n^\pi \geq l] = -\inf_{l' \geq l} [I(l', \pi)] = -I(l, \pi),$$

因此有

$$\begin{aligned} \nu(l) &= \sup_\pi \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P[\bar{L}_n^\pi \geq l] = \sup_\pi [-I(l, \pi)] \\ &= \sup_\pi [-\sup_\theta [\theta l - \Gamma(\theta, \pi)]] = \sup_\pi \inf_\theta [\Gamma(\theta, \pi) - \theta l]. \end{aligned}$$

定义

$$\Lambda_+(\theta) := \sup_{\pi} \Gamma(\theta, \pi) = \sup_{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log E[e^{\theta n \bar{L}_n^\pi}], \theta \geq 0.$$

引理 4.1 ^[9] 假定 Λ_+ 在 $(0, \bar{\theta})$ 上是有限且可微的, 其中 $\bar{\theta}$ 是区间 $(0, \infty]$ 中的某个实数, $\forall \theta \in (0, \bar{\theta})$, 存在 $\Lambda_+(\theta)$ 的解 $\hat{\pi}(\theta)$, 则对于所有的 $l < \Lambda'_+(\bar{\theta})$, 有 $\nu(l) = \inf_{\theta \in [0, \bar{\theta})} [\Lambda_+(\theta) - \theta l]$, 并且当 $l \in (\Lambda'_+(0), \Lambda'_+(\bar{\theta}))$ 时, $\nu(l)$ 的最优控制为 $\pi^{+, l} = \hat{\pi}(\theta(l))$, $\Lambda'_+(\theta(l)) = l$, 当 $l \leq \Lambda'_+(0)$ 时, $\nu(l) = 0$ 的近似最优控制为

$$\pi^{+(m)} = \hat{\pi}(\theta_m), \Lambda'_+(\theta_m) = \Lambda'_+(0) + \frac{1}{m}, \lim_{m \rightarrow \infty} \theta_m = 0,$$

此时有

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log P[\bar{L}_n^{\pi^{+(m)}} \geq l] = \nu(l).$$

引理 4.1 说明了收益率高于目标收益率的概率最大化的大偏差控制问题, 在一定条件下可以通过它的对偶控制问题予以求解. 可以看到, 当目标收益率 l 小于 $\Lambda'_+(0)$ 时, 此时 $\nu_+(l) = 0$, 也就是说, 在投资期限充分长的情况下, 投资者的实际收益率高于目标收益率的概率几乎为 1, 这时的近似最优投资组合与目标收益率无关. 而当目标收益率 l 介于 $\Lambda'_+(0)$ 和 $\Lambda'_+(\bar{\theta})$ 之间时, 最优投资组合由目标收益率决定. 当 $\Lambda'_+(\bar{\theta}) = \infty$ 时, 对于所有的 l 都可以得到准确的最优投资组合; 而当 $\Lambda'_+(\bar{\theta}) < \infty$ 时, 若 $l > \Lambda'_+(\bar{\theta})$, 这时无法确定最优投资组合.

以风险资产价格增长率 ξ 服从二点分布, 投资组合固定不变为例进行计算, 假定无风险利率 $r = 0.02$, ξ 的概率分布为

$$P = \begin{cases} 0.5, & \xi = 1.07, \\ 0.5, & \xi = 0.971, \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} \Gamma(\theta, \pi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log E e^{n \theta \bar{L}_n^\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\theta \log X_0 + n \log E[1 + \pi(\xi - 1) + (1 - \pi)r]^\theta) \\ &= \log E[1 + r + \pi(\xi - 1 - r)]^\theta \\ &= \log 0.5 + \log[(1.02 + 0.05\pi)^\theta + (1.02 - 0.049\pi)^\theta]. \end{aligned}$$

令 $\frac{\partial \Gamma(\theta, \pi)}{\partial \pi} = 0$, 解得 $\hat{\pi}(\theta) = \frac{1.02[1 - (\frac{50}{49})^{\frac{1}{\theta-1}}]}{0.049 + 0.05(\frac{50}{49})^{\frac{1}{\theta-1}}}$, 可以验证 $\hat{\pi}(\theta)$ 在 $\theta \in [0, 1)$ 时是 $\Gamma(\theta, \pi)$ 的极大值点, 因此

$$\Lambda_+(\theta) = \sup_{\pi} \Gamma(\theta, \pi) = \Gamma(\theta, \hat{\pi}(\theta)), 0 \leq \theta < 1.$$

$\Lambda_+(\theta)$ 在 $[0, 1)$ 上是可导的, $\Lambda'_+(0) = 0.0199$, $\Lambda'_+(1) = 0.723$, 根据引理 4.1,

$$\nu(l) = \inf_{\theta \in [0, 1)} [\Lambda_+(\theta) - \theta l] = \begin{cases} 0, & l \leq \Lambda'_+(0), \\ \Gamma(\theta, \hat{\pi}(\theta(l))) - \theta(l)l, & \Lambda'_+(0) < l < \Lambda'_+(1). \end{cases}$$

可以看到, 当 $l \leq \Lambda'_+(0)$ 时, θ 取 0 时 $\nu(l)$ 取到下确界, 此时最优投资组合为: 风险资产比例 0.2081, 无风险资产比例 0.7919, 与目标收益率无关. 而 $\Lambda'_+(0) < l < \Lambda'_+(1)$ 时, 利用

MATLAB 绘制目标收益率 l 与最优风险资产投资比例 π 的曲线如图 1, 发现风险资产的最优投资比重随 l 的增长而增长, 这与实际情况是相符的, 目标收益率越高, 为使实际收益率高于目标收益率, 高收益的风险资产的投资比例就需要越高. 为说明计算方法, 本文选取了二点分布并且假定投资组合不变, 计算结果与实际情况会有偏差.

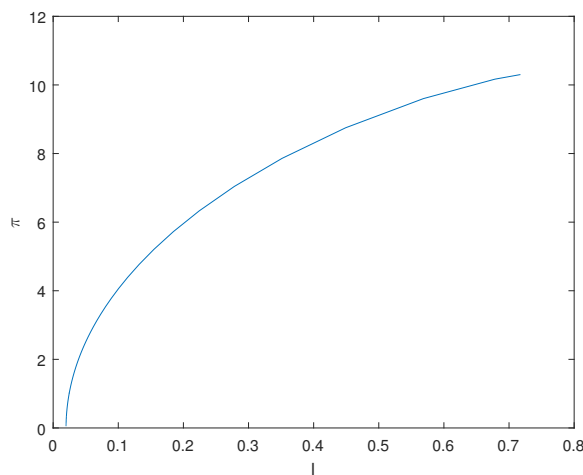


图 1: 风险资产最优投资比例曲线

接着以每一时刻的投资组合依赖于前一时刻的资产价格变动表现为假设, 做模拟计算, 假设风险资产的投资比例 π 是前一时刻风险资产收益率的线性函数, 即

$$\pi_i = \pi(\xi_{i-1}) = a + b\xi_{i-1}, i = 2, 3, \dots,$$

令初始时刻风险资产的投资比例 $\pi_1 = 0.3$, 对

$$\Gamma(\theta, \pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log E[\exp(\theta \sum_{i=1}^n \log(1 + \pi_i(\xi_i - 1) + (1 - \pi_i)r))]$$

进行数值计算.

假设 ξ_i 服从区间 $[0.9, 1.1]$ 的均匀分布. 根据引理 4.1, 对于收益率高于目标收益率的概率最大化投资准则, $\theta \in [0, 1]$, 在每一个 θ 下, 关于 a, b 取 $\Gamma(\theta, \pi)$ 的最大值, 在这些最大值中, 再关于 θ 取 $[\sup_{\pi} \Gamma(\theta, \pi) - \theta l]$ 的最小值, 其对应的线性函数即为最优投资组合的确定方法. 选取无风险利率 $r = 0.02$, 设定目标收益率 $l = 0.07$, 对 a 以 0.02 为步长在区间 $[-4.5, -3.6]$ 选取 46 个值, 对 b 以 0.02 为步长在区间 $[3.6, 4.5]$ 选取 46 个值, 对 θ 以 0.02 为步长在区间 $[0.05, 0.95]$ 选取 46 个值, 计算得到风险资产的最优投资比例函数为

$$\pi_i = \pi(\xi_{i-1}) = -4.14 + 4.48\xi_{i-1}, i = 2, 3, \dots$$

参 考 文 献

- [1] MacLean L C, Ziemba W T, Blazenko G. Growth versus security in dynamic investment analysis[J]. Mgt. Sci., 1992, 38: 1562-1585.

- [2] Browne S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin[J]. Math. Oper. Res., 1995, 20: 937–958.
- [3] Browne S. Beating a moving target: optimal portfolio strategies for outperforming a stochastic benchmark[J]. Finance Stoch., 1999, 3: 275–294.
- [4] Stutzer M. A portfolio performance index[J]. Financial Anal. J., 2000, 56: 52–61.
- [5] Stutzer M. Portfolio choice with endogeneous utility: a large deviation approach[J]. J. Econ., 2003, 116: 365–386.
- [6] Stutzer M. Asset allocation without unobservable parameters[J]. Financial Anal. J., 2004, 60(5): 38–51.
- [7] Ba Chu, John Knight, Stephen Satchell. Large deviations theorems for optimal investment problems with large portfolios[J]. Euro. J. Oper. Res., 2011, 211: 533–555.
- [8] Pham H. A large deviations approach to optimal long term investment[J]. Finance Stoch., 2003, 7: 169–195.
- [9] Pham H. Long time asymptotics for optimal investment[J]. Math. Stat., 2015, 110: 507–528.
- [10] Schonamann R H. Exponential convergence under mixing[J]. Prob. The. Rel. Fields, 1989, 81: 235–238.
- [11] Yakimavichyus D A. On large deviation theorems for dependent random variables[J]. Soviet Math. Doklady, 1989, 39: 35–37.
- [12] Bryc W. On large deviations for uniformly strong mixing sequences[J]. Stoch. Proc. Appl., 1992, 41: 191–202.
- [13] Bryc W. Large deviations by the asymptotic value method[J]. Proc. Conf. Diff. Proc., 1990: 447–472.
- [14] Dembo A, Zeitouni O. Large deviations techniques and applications (2nd ed.)[M]. New York: Springer, 1998.

APPLICATION OF LARGE DEVIATIONS METHOD IN THE PORTFOLIO

WANG Kai-hong

(*School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China*)

Abstract: In this paper, we study the discrete-time optimal portfolio when the risky asset price growth rates are i.i.d., and the investment decision depends on the previous changes of the risky asset price. Large deviations method is used to prove that the average logarithmic yield satisfies the large deviations principle without the bounded hypothesis of the yield series in this case. It gives the calculation method of the optimal portfolio, and calculations of the specific examples are carried out by MATLAB.

Keywords: large deviations; logarithmic yield; optimal portfolio

2010 MR Subject Classification: 60F10