

p - 进域上的谱和 tiling 集的一个刻画

买买提艾力·喀迪尔

(喀什大学数学与统计学院, 新疆 喀什 844006)

摘 要: 本文研究了 $\mathbb{Q}_p^d$ 上的 tiling 集和谱的一个刻画. 利用函数 tiling, 正交性与填充之间的关系, 得到: 如果 $\Lambda_n \subset \mathbb{Q}_p^d$ 是弱收敛于集合 Λ 的一个一致离散集合序列, 并且对任意 n , 集合序列 Λ_n 是一个 tiling 集 (或谱), 那么 Λ 也是一个 tiling 集 (或谱).

关键词: p - 进域; 弱收敛; 谱; tile

MR(2010) 主题分类号: 43A99; 05B45

中图分类号: O174.2

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2019)01-0060-07

1 引言

设 G 是一个局部紧的 Abel 群, $\widehat{G}$ 是其共轭群. 假设 $\Omega \subset G$ 具有正有限 Haar 测度的 Borel 可测集合, 称 Ω 是一个谱集如果存在 G 的一个连续特征的集合 $\Lambda \subset \widehat{G}$, 使得组成平方 Haar - 可积可积函数空间 $L^2(\Omega)$ 的一个正交基. 集合 Λ 称为 Ω 的一个谱, (Ω, Λ) 称为谱对. 我们说一个集合 Ω 平移地 tile G , 如果存在一个集合 $T \subset G$ 使得集族 $\{\Omega + t\}_{t \in T}$ 构成 G 的一个划分 (除了零测集外). 该集合 T 称为 Ω 的一个 tiling 集或者一个平移集, (Ω, T) 称为一个 tiling 对.

当 $G = \mathbb{R}^d$ 时, 关于谱集和 tile 的关系 Fuglede^[1] 提出如下的猜想.

谱集猜想 一个具有正有限 Lebesgue 测度的 Borel 集 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个谱集当且仅当它是一个平移 tile. 即存在一个集合 Λ 使得 (Ω, Λ) 是一个谱对当且仅当存在一个集合 T 使得 (Ω, T) 是一个 tiling 对.

在任何局部紧的 Able 群 G 上可以考虑广义 Fuglede 猜想: 一个正有限 Haar 测度的 Borel 集 $\Omega \subset G$ 是谱集当且仅当它是一个平移 tile. 甚至在有限群上也可以讨论该猜想^[2].

我们可以考虑如下的对偶谱集猜想: 设 $\Lambda \subset G$, 则 Λ 是一个谱当且仅当 Λ 一个 tiling 集. 即存在一个集合 Ω 使得 (Ω, Λ) 是一个谱对当且仅当存在一个集合 Ω' 使得 (Ω', Λ) 是一个 tiling 对.

在欧式空间 $\mathbb{R}^d$ 对于这一谱集猜想的研究取得了一些局部性的结果 (见文献 [1, 3, 4]). 谱集猜想提出来 30 年以后, 直到 2004 年菲尔兹奖得主陶哲轩^[5] 在维数大于等于 5 的时候构造了一个反例说明谱集未必是 tile. 现在这些反例的维数降低到 $d \geq 3$ ^[6, 7]. 至今, 谱集猜想在 一维或者二维空间上是否成立仍然是一个公开问题.

另一方面, 文献 [8] 研究了 $\mathbb{R}^d$ 上的单位正方形的所有谱的结构, 文献 [9, 10] 证明了 $\mathbb{R}$ 上的谱集的谱一定是周期的.

*收稿日期: 2018-02-26

接收日期: 2018-07-06

基金项目: 喀什大学博士专项基金资助项目 ((15)2545).

作者简介: 买买提艾力·喀迪尔 (1984-), 男, 维吾尔族, 新疆喀什, 讲师, 主要研究方向: Fourier 分析, 分形几何, 谱测度.

最近, 范爱华^[11] 考虑局部域上的谱集和谱测度问题; 本文作者^[12] 证得当谱或者 tiling 集是拟格的时候谱集猜想在局部域上的向量空间上成立. 谱集猜想在 p -进域 $\mathbb{Q}_p$ 上完全被解决了. 其实, 他们^[13, 14] 证得一个有界集 $\Omega \subset \mathbb{Q}_p$ 是谱集 $\Leftrightarrow \Omega$ 是一个 tile $\Leftrightarrow \Omega$ 是几乎紧开“ p -齐次”. 同时, 他们也证明了 $\mathbb{Q}_p$ 上的谱或者 tiling 集在等距同构的意义下是惟一的. 不过, 该猜想在 $\mathbb{Q}_p^d$ ($d \geq 2$) 上仍然是个公开问题.

在这篇文章中, 考虑 $\mathbb{Q}_p^d$ 上谱或者 tiling 集的性质.

2 预备知识

这一部分介绍 p -进数域 $\mathbb{Q}_p$ 的有关知识, 可积函数空间 $L^1(\mathbb{Q}_p^d)$ 上的 Fourier 变换, $\mathbb{Q}_p^d$ 上的谱集准则等相关内容.

2.1 p -进数域 $\mathbb{Q}_p$

我们首先回顾一下 p -进数域. 设 $p \geq 2$ 是一个素数, $\mathbb{Q}$ 是有理数域. 任何一个非零数 $x \in \mathbb{Q}$ 可以写成 $x = p^v \frac{a}{b}$, 其中 $v, a, b \in \mathbb{Z}$, $(p, a) = 1$ 和 $(p, b) = 1$ (这里 (x, y) 表示两个整数 x 和 y 的最大公因数). 根据 $\mathbb{Z}$ 上的唯一分解定理, 这个数 v 只依赖于 x . 对于 $x \neq 0$ 定义 $v_p(x) = v$, $v_p(0) = +\infty$ 并且 $|x|_p = p^{-v_p(x)}$, 那么 $|\cdot|_p$ 是一个非阿基米德绝对值. 即

(i) $|x|_p \geq 0$, 等于零仅当 $x = 0$;

(ii) $|xy|_p = |x|_p |y|_p$;

(iii) $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$.

p -进数域 $\mathbb{Q}_p$ 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 在 p -进绝对值 $|\cdot|_p$ 之下的完备化. 事实上, $\mathbb{Q}_p$ 的任何一个元素 x 都可以写成

$$x = \sum_{n=v}^{\infty} a_n p^n \quad (v \in \mathbb{Z}, a_n \in \{0, 1, \dots, p-1\} \text{ 且 } a_v \neq 0), \quad (2.1)$$

这里 $v(x) := v$ 称为 x 的 p -赋值, 并且 $|x|_p = p^{-v}$. 记 $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n\}$ p -进整数环, 其实它是以 0 为圆心的单位圆.

取一个特征 $\chi \in \widehat{\mathbb{Q}_p} : \chi(x) = e^{2\pi i \{x\}}$, 其中 $\{x\} = \sum_{n=N}^{-1} a_n p^n$ 表示 x 在展开式 (2.1) 中的分数部分. 从这个特征得到 $\mathbb{Q}_p$ 的所有特征. 对于任意 $y \in \mathbb{Q}_p$, 定义 $\chi_y(x) = \chi(yx)$. 那么映射 $y \mapsto \chi_y$ 是从 $\mathbb{Q}_p$ 到 $\widehat{\mathbb{Q}_p}$ 上的一个同构映射. 注意 $\mathbb{Z}_p$ 上 $\chi(x) \equiv 1$, 但是在 $p^{-1}\mathbb{Z}_p$ 非常数.

设 $\mathbb{Q}_p^d$ 是 $\mathbb{Q}_p$ 上的 d -维向量空间. 将 $\mathbb{Q}_p^d$ 赋予范数

$$|x| = \max_{1 \leq j \leq d} |x_j|, \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Q}_p^d.$$

空间 $\mathbb{Q}_p^d$ 上的 Haar 测度是乘积测度 $dx_1 \cdots dx_d$, 还是记为 dx 或者 $\mathbf{m}_d$, 如果需要指出维数. 对于 $x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{Q}_p^d$, 定义 $\mathbb{Q}_p^d$ 的内积为

$$x \cdot y := x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d.$$

空间 $\mathbb{Q}_p^d$ 的对偶空间 $\widehat{\mathbb{Q}_p^d}$ 由 $\chi_y(\cdot)$ 所组成的, 其中 $y \in \mathbb{Q}_p^d, \chi_y(x) = \chi(x \cdot y) = e^{2\pi i \{x \cdot y\}}$.

设 $\Omega \subset \mathbb{Q}_p^d$ 是具有正有限 Haar 测度的 Borel 集合. 设 $L^2(\Omega)$ 是 Ω 上的平方 Haar - 可积函数所构成的 Hilbert 空间, 其上定义内积

$$\langle f, g \rangle_\Omega = \int_\Omega f(x) \overline{g(x)} dx.$$

2.2 Fourier 变换

函数 $f \in L^1(\mathbb{Q}_p^d)$ 的 Fourier 变换定义为

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p^d} f(x) \overline{\chi_\xi(x)} dx \quad (\xi \in \mathbb{Q}_p^d).$$

注意

$$\widehat{\widehat{f}}(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p^d} f(x) \overline{\chi(\xi \cdot x)} dx = \int_{\mathbb{Q}_p^d} f(x) \chi(-\xi \cdot x) dx.$$

Fourier 变换具有如下性质

1. 映射 $f \rightarrow \widehat{f}$ 是从 $L^1(\mathbb{Q}_p^d)$ 到 $L^\infty(\mathbb{Q}_p^d)$ 的有界线性算子, 并且 $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.
2. 如果 $f \in L^1(\mathbb{Q}_p^d)$, 那么 $\widehat{f}$ 一致连续.
3. 如果 $f \in L^1(\mathbb{Q}_p^d) \cap L^2(\mathbb{Q}_p^d)$, 那么 $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

定义 2.1 定义在 $\mathbb{Q}_p^d$ 上的一个复值函数 f 称为一致局部常值函数, 若存在 $n \in \mathbb{Z}$ 使得

$$f(x+y) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{Q}_p^d, \quad \forall y \in B(0, p^n).$$

显然一致局部常值函数是连续的.

用 $|\Omega|$ 表示集合 Ω 的 Haar 测度. 对于一个 Borel 集 $\Omega \subset \mathbb{Q}_p^d$ 使得 $0 < |\Omega| < \infty$, 有下面的谱集准则^[11].

引理 2.2 ^[11] 一个 Borel 集 $\Omega \subset \mathbb{Q}_p^d$ 使得 $0 < |\Omega| < \infty$ 是一个以 Λ 为谱的谱集当且仅当

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\widehat{1}_\Omega(\xi - \lambda)|^2 = |\Omega|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{Q}_p^d. \quad (2.2)$$

对于一个离散集合 $\Lambda \subset \mathbb{Q}_p^d$, 取 $\chi_\lambda(x) = e^{2\pi i \{\lambda \cdot x\}}, \forall x \in \mathbb{Q}_p^d$ 和 $\mathcal{E}(\Lambda) = \{\chi_\lambda(x) : \lambda \in \Lambda\}$, 这些特征 $\chi_\lambda(x)$ 被称为指数函数. 说 $\mathcal{E}(\Lambda)$ 是一个正交集, 若集合 $\mathcal{E}(\Lambda)$ 中的指数函数系 $\chi_\lambda(x)$ 组成空间 $L^2(\Omega)$ 内的正交集. 对于一个连续函数 $f : \mathbb{Q}_p^d \rightarrow \mathbb{C}$, 写

$$\mathcal{Z}(f) = \{x \in \mathbb{Q}_p^d : f(x) = 0\}.$$

下面的引理确定一个正交集 $\mathcal{E}(\Lambda)$ 中的点应该满足的条件.

引理 2.3 如果 $\Omega \subset \mathbb{Q}_p^d$ 是一个 Borel 集并且 $0 < |\Omega| < \infty$, 那么集合 $\mathcal{E}(\Lambda)$ 在 $L^2(\Omega)$ 内正交当且仅当

$$\Lambda - \Lambda \subset \mathcal{Z}(\widehat{1}_\Omega) \cup \{0\}. \quad (2.3)$$

证 对于任意两个 $\lambda \neq \lambda' \in \Lambda$, 有

$$\widehat{1}_\Omega(\lambda - \lambda') = \int_{\mathbb{Q}_p^d} e^{-2\pi i \{\langle \lambda - \lambda', x \rangle\}} 1_\Omega(x) dx = \int_{\mathbb{Q}_p^d} e^{-2\pi i \{\langle \lambda, x \rangle\}} e^{2\pi i \{\langle \lambda', x \rangle\}} dx = \langle \chi_\lambda, \chi_{\lambda'} \rangle_\Omega. \quad (2.4)$$

若式 (2.3) 成立, 则对任意 $\lambda \neq \lambda' \in \Lambda$, 有 $\langle \chi_\lambda, \chi_{\lambda'} \rangle_\Omega = 0$, 说明 $\mathcal{E}(\Lambda)$ 是一个正交集. 反过来, 若 $\mathcal{E}(\Lambda)$ 在空间 $L^2(\Omega)$ 内的一个正交集, 则对任意 $\lambda \neq \lambda' \in \Lambda$, 有 $\langle \chi_\lambda, \chi_{\lambda'} \rangle_\Omega = 0$, 这个等价于式 (2.3).

一个集合 $A \subset \mathbb{Q}_p^d$ 称为一致离散, 如果 A 是可数集并且存在一个 $\delta \in \mathbb{Z}$ 使得对于任意互异的 $x, y \in A$ 有 $|x - y|_p \geq p^\delta$, 这里 $|\cdot|_p$ 表示 $\mathbb{Q}_p^d$ 上的 p -进绝对值. 满足上述条件的最大常数 δ 称为集合 A 的分离常数, 并记为 $\delta(A)$. 有引理 2.3, 很容易得到下面的引理.

引理 2.4 ^[14] 假设 $\Omega \subset \mathbb{Q}_p^d$ 是一个 Borel 集使得 $0 < |\Omega| < \infty$.

- (1) 若 (Ω, Λ) 是一个谱对, 则 Λ 是一致离散集合.
- (2) 若 (Ω, T) 是一个 tiling 对, 则 T 是一致离散集合.

取

$$\gamma_0 := \min \left\{ \gamma : \xi \in B(0, p^\gamma), \quad \widehat{1}_\Omega(\xi) = 0 \right\}. \quad (2.5)$$

那么引理 2.4 表示, 如果 Λ 是集合 Ω 的一个谱则它是一致离散的并且其分离常数 $\delta(\Lambda) \geq \gamma_0$.

3 主要定理及其证明

这一节将介绍主要定理及其证明.

3.1 集合序列的弱收敛

定义 3.1 设 $\Lambda_n \subset \mathbb{Q}_p^d$ 是一个一致离散集合序列, 其分裂常数是 $\delta(\Lambda_n) \geq \delta_0$. 集合序列 Λ_n 若收敛于一个集合 Λ , 若对任意 $\eta \in \mathbb{N}$ 和任意 $\gamma \in \mathbb{Z}$, 存在一个自然数 N 使得对任意 $n \geq N$, 有

$$\Lambda_n \cap B_\gamma \subset \Lambda + B_{-\eta} \quad \text{和} \quad \Lambda \cap B_\gamma \subset \Lambda_n + B_{-\eta},$$

其中 B_γ 是以原点为球心, 以 p^γ 为半径的开球. 这个时候极限 Λ 也是一致离散, 并且 $\delta(\Lambda) \geq \delta_0$.

下面的定理是本文的主要结果.

定理 3.2 设 $\Lambda_n \subset \mathbb{Q}_p^d$ 是一个一致离散集合序列, 分裂常数是 $\delta(\Lambda_n) \geq \delta_0$, 并且弱收敛于一个集合 Λ . 假设 $\Omega \subset \mathbb{Q}_p^d$ 是一个有界可测集合, 并且对任意 n , Λ_n 是 Ω 的一个谱 (或 tiling 集), 那么 Λ 也是 Ω 的一个谱 (或 tiling 集).

下面介绍这个定理的证明所需要的一系列引理.

3.2 函数 tiling

假设 $f \in L^1(\mathbb{Q}_p^d)$ 是非负可积函数. 我们说函数 f 经过一个离散集合 $\Lambda \subset \mathbb{Q}_p^d$ 平移地 tile $\mathbb{Q}_p^d$, 如果有

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} f(x - \lambda) = 1 \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{Q}_p^d. \quad (3.1)$$

这种情况下, 写 $f + \Lambda$ 是一个 tiling.

如果 $f = 1_\Omega$ 是一个有界可测集合 $\Omega \subset \mathbb{Q}_p^d$ 的示性函数, 那么条件 (3.1) 表示集族 $\{\Omega + \lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 构成 $\mathbb{Q}_p^d$ 的一个划分 (除零测集外). 这个时候函数 tiling 就是集合 tiling, 并且我们说 (Ω, Λ) 是一个 tiling 对.

下面的引理给出通过 tiling 条件来刻画集合 Ω 的谱的一个方法.

引理 3.3 假设 $\Omega \subset \mathbb{Q}_p^d$ 是一个有界可测集合, 定义

$$f(x) := |\widehat{1}_\Omega(x)|^2/|\Omega|^2, \quad x \in \mathbb{Q}_p^d,$$

则一个集合 $\Lambda \subset \mathbb{Q}_p^d$ 是 Ω 的一个谱当且仅当 $f + \Lambda$ 是一个 tiling.

证 由于引理 2.2, 我们有 (Ω, Λ) 是谱对当且仅当对任意 $x \in \mathbb{Q}_p^d$, 有

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} f(x - \lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} |\widehat{1}_\Omega(x - \lambda)|^2/|\Omega|^2 = 1. \quad (3.2)$$

方程 (3.2) 成立当且仅当 $f + \Lambda$ 是一个 tiling.

3.3 正交性与填充

假设 $f \in L^1(\mathbb{Q}_p^d)$ 是非负可积函数. 我们说函数 f 经过一个离散集合 $\Lambda \subset \mathbb{Q}_p^d$ 填充 $\mathbb{Q}_p^d$, 如果有

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} f(x - \lambda) \leq 1 \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{Q}_p^d. \quad (3.3)$$

这种情况下, 写 $f + \Lambda$ 是一个填充. 注意如果 $f = 1_\Omega$, 那么这个表明集族 $\{\Omega + \lambda : \lambda \in \Lambda\}$ 是两两测度不交. 这个时候, 我们说 (Ω, Λ) 是一个填充对.

假设 E, F 是 $\mathbb{Q}_p^d$ 上的两个离散集合, τ 是 $\mathbb{Q}_p^d$ 的一个向量. 设三个集合 $F, F + \tau, F - \tau$ 的每一个与集合集合 E 不交, 并且定义

$$\Lambda := E \cup F, \quad \Lambda_1 := E \cup (F + \tau), \quad \Lambda_2 := E \cup (F - \tau). \quad (3.4)$$

引理 3.4 令 $f \geq 0$ 是 $\mathbb{Q}_p^d$ 上的一个可测函数. 假设 $f + \Lambda$ 是一个 tiling, $f + \Lambda_1$ 和 $f + \Lambda_2$ 是填充, 那么 $f + \Lambda_1$ 和 $f + \Lambda_2$ 也是 tilings.

证 定义

$$f_E(x) := \sum_{\lambda \in E} f(x - \lambda), \quad f_F(x) := \sum_{\lambda \in F} f(x - \lambda).$$

则根据引理假设, 对几乎处处 $x \in \mathbb{Q}_p^d$ 有

- (1) $f_E(x) + f_F(x) = 1$.
- (2) $f_E(x) + f_F(x - \tau) \leq 1$.
- (3) $f_E(x) + f_F(x + \tau) \leq 1$.

分别从 (2) 和 (3) 减去 (1) 得到

$$f_F(x - \tau) \leq f_F(x), \quad f_F(x + \tau) \leq f_F(x) \quad \text{a.e.} \quad (3.5)$$

通过向量 τ 平移可知, 式 (3.5) 成立等价于 $f_F(x - \tau) = f_F(x) = f_F(x + \tau)$. 这个隐含着引理成立.

假设 $\Omega \subset \mathbb{Q}_p^d$ 是一个有界可测集合. 下面的引理给出一个指数函数系在空间 $L^2(\Omega)$ 内正交的一个准则.

引理 3.5 一个指数函数系 $\mathcal{E}(\Lambda)$ 在空间 $L^2(\Omega)$ 内正交当且仅当 $f + \Lambda$ 是一个填充, 其中 $f(x) := |\widehat{1}_\Omega(x)|^2/|\Omega|^2$.

这个引理的证明完全类似于引理 3.3 的证明.

运用引理 3.3, 引理 3.4 和引理 3.5 得到

推论 3.6 假设 $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2$ 是定义在式 (3.4), 若集合 Λ 是 Ω 的一个谱, 集族 $\mathcal{E}(\Lambda_1)$ 和 $\mathcal{E}(\Lambda_2)$ 在空间 $L^2(\Omega)$ 内正交, 则集合 Λ_1 和 Λ_2 也是 Ω 的谱.

定理 3.7 设 $\Lambda_n \subset \mathbb{Q}_p^d$ 是一个一致离散集合序列, 分裂常数是 $\delta(\Lambda_n) \geq \delta_0$, 并且弱收敛于一个集合 Λ . 假设 $f \in L^1(\mathbb{Q}_p^d)$, $f \geq 0$, 并且对任意 n , $f + \Lambda_n$ 是一个 tiling, 那么 $f + \Lambda$ 也是一个 tiling.

证 假设函数 $\psi \geq 0$ 是 $\mathbb{Q}_p^d$ 上的具有紧支撑的局部常值函数并且满足 $\int \psi(x)dx = 1$. 那么证明对于这种函数 ψ 如下等式

$$\int_{\mathbb{Q}_p^d} \psi(x) \sum_{\lambda \in \Lambda} f(x - \lambda) dx = 1 \quad (3.6)$$

成立就可以了.

固定一个满足上述条件的函数 ψ , 定义

$$\Psi_n(x) := \sum_{\lambda \in \Lambda_n} \psi(x + \lambda). \quad (3.7)$$

由于 Λ_n 弱收敛于 Λ , 所以对任何 $\mathbb{Q}_p^d$ 上的具有紧支撑的局部常值函数 φ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{Q}_p^d} \varphi(x) \Psi_n(x) dx = \int_{\mathbb{Q}_p^d} \varphi(x) \Psi(x) dx, \quad (3.8)$$

这里 $\Psi(x) := \sum_{\lambda \in \Lambda} \psi(x + \lambda)$. 进一步, 有 $\|\Psi_n\|_{\infty} \leq C(\psi, \delta)$, 这里的常数 $C(\psi, \delta)$ 不依赖于 n . 所以函数 $\Psi_n(x)$ 在 $L^\infty(\mathbb{Q}_p^d)$ 意义下弱收敛于函数 $\Psi(x)$. 根据文献 [15] 中的命题 6.2, 具有紧支撑的局部常值函数在 L^1 -函数中稠密. 因此等式 (3.8) 当 $\varphi = f$ 的时候也成立, 这里 $f \in L^1(\mathbb{Q}_p^d)$. 由于 $f + \Lambda_n$ 是一个 tiling, 等式 (3.8) 的左边等于 1. 所以等式 (3.8) 的右边也必须等于 1. 这个说明等式 (3.6) 成立.

下面给予定理 3.2 的证明.

定理 3.2 的证明 设 $\Omega \subset \mathbb{Q}_p^d$ 是一个有界可测集合. 令 $f(x) := 1_\Omega(x)$, 则 $f \in L^1(\mathbb{Q}_p^d)$, $f \geq 0$. 根据定理 3.7, 若对于任意 n , $\Omega + \Lambda_n$ 是一个 tiling, 并且 Λ_n 弱收敛于 Λ , 则 $\Omega + \Lambda$ 也是一个 tiling.

根据引理 3.3, 一个集合 $\Lambda \subset \mathbb{Q}_p^d$ 是 Ω 的一个谱当且仅当 $f + \Lambda$ 是一个 tiling, 其中 $f(x) := |\widehat{1}_\Omega(x)|^2 / |\Omega|^2$. 所以对于任意 n , 集合 Λ_n 是 Ω 的一个谱当且仅当 $f + \Lambda_n$ 是一个 tiling, 由前半部分的证明可知, 若 Λ_n 弱收敛于 Λ , 则 $f + \Lambda$ 也是一个 tiling, 从而根据引理 3.3, (Ω, Λ) 是一个谱对.

参 考 文 献

- [1] Fuglede B. Commuting self-adjoint partial differential operators and a group theoretic problem[J]. J. Funct. Anal., 1974, 16: 101–121.

- [2] Ayachi C B, Bau E, FitzPatrick D, Iosevich A, et al. Tiling sets and spectral sets over finite fields[J]. J. Funct. Anal., 2017, 273: 2547–2577.
- [3] Fuglede B. Orthogonal exponentials on the ball[J]. Expo. Math., 2001, 19: 267–272.
- [4] Iosevich A, Katz N, Tao T. The Fuglede spectral conjecture holds for convex planar domains[J]. Math. Res. Lett., 2003, 10: 559–569.
- [5] Tao T. Fuglede’s conjecture is false in 5 and higher dimensions[J]. Math. Research Letters., 2004, 11: 251–258.
- [6] Kolountzakis M N, Matolcsi M. Tiles with no spectra[J]. Forum Math., 2006, 18: 519–528.
- [7] Matolcsi M. Fuglede’s conjecture fails in dimension 4[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2005, 133: 3021–3026.
- [8] Iosevich A, Pedersen S. Spectral and tiling properties of the unit cube[J]. Int. Math. Res. Not., 1998, 16: 819–828.
- [9] Iosevich A, Kolountzakis M. Periodicity of the spectrum in dimension one[J]. Anal. PDE, 2013, 6: 819–827.
- [10] Kolountzakis M. Periodicity of the spectrum of a finite union of intervals[J]. J. Fourier Anal. Appl., 2012, 18: 21–26.
- [11] Fan A H. Difference equations, discrete dynamical systems and applications[A]. Bohner M et al.. Spectral measures on local fields[C]. Switzerland: Springer, 2015: 15–25.
- [12] Kadir M. Spectral sets and tiles on vector space over local fields[J]. J. Math. Anal. Appl., 2016, 440: 240–249.
- [13] Fan A H, Fan S L, Shi R X. Compact open spectral sets in $\mathbb{Q}_p$ [J]. J. Funct. Anal., 2016, 271: 3628–3661.
- [14] Fan A H, Fan S L, Liao L M, Shi R X. Fuglede’s conjecture holds in $\mathbb{Q}_p$ [J]. arXiv:1512.08904.
- [15] Vladimirov V, Volovich I, Zelenov E. p -adic analysis and mathematical physics[M]. Singapor: World Scientific, 1994.

A CHARACTERIZATION OF SPECTRA AND TILING SETS ON THE p -ADIC FIELDS

MAMATELI Kadir

(*School of Mathematics and Statistics, Kashgar University, Kashgar 844006, China*)

Abstract: In this paper, we study a characterization of spectra and tiling sets on $\mathbb{Q}_p^d$. By using the tiling by functions and the relationship between orthogonality and packing, we obtain that for a sequence of uniformly discrete sets $\Lambda_n \subset \mathbb{Q}_p^d$, which converge weakly to a set Λ , if Λ_n is a tiling set (or a spectrum) for every n , then Λ is also a tiling set (or a spectrum).

Keywords: p -adic number field; weak convergence; spectral set; tile

2010 MR Subject Classification: 43A99; 05B45