Vol. 38 (2018)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类半线性分数 Laplacian 方程多解的存在性问题

乔花玲, 吴玉梅
(西安财经学院统计学院, 陕西 西安 710061)

摘 要: 本文研究了一类半线性分数 Laplacian 方程 $\begin{cases} (-\Delta)^s u = f(x,u), & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in R^n\setminus\Omega \end{cases}$ 在原点附近无穷多解的存在性问题. 利用改进的 Clark's 定理, 获得了方程对应的泛函有收敛于零的临界点序列的结果, 推广了关于整数阶半线性方程多解的存在性结果.

关键词: 分数 Laplacian 算子; 临界点; 无穷多解; Clark's 定理
MR(2010) **主题分类号**: 35A01; 35J61; 35B38 **中图分类号**: O175.29
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2018)05-0943-08

1 引言

分数 Laplacian 算子 $(-\Delta)^s$ 的定义如下:

$$\widehat{(-\Delta)^s} u(\xi) = |\xi|^{2s}\hat{u}(\xi),$$

其中 ˆ表示 u 的 Fourier 变换. 如果 u 充分光滑, 它也可以是下面的奇异积分

$$(-\Delta)^s u(x) = C_{n,s}\, P.V. \int_{R^n} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}}\, dy = C_{n,s} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{R^n\setminus B_\varepsilon(x)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}}\, dy,$$

其中 $s\in(0,1), P.V.$ 表示主值, $C_{n,s} = \dfrac{\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{\pi^{2s+\frac{n}{2}}\cdot\Gamma(-s)}$. 有关分数 Laplacian 算子 $(-\Delta)^s$ 的更详细的内容可以看参考文献 [1].

分数 Laplacian 算子 $(-\Delta)^s$ 及更一般的拟微分算子已经有经典的泛函分析方法研究成果, 该算子在连续介质力学、相变现象、种群动态、对策论的研究中常出现, 它是 Lévy 过程的随机稳定的无穷小生成元 [2−4]. 由于分数空间和非局部方程在很多科学领域有着重要应用, 在过去的几年里对涉及分数算子问题的研究兴趣仍不断高涨, 如障碍问题 [5]、优化与金融 [6,7]、共形几何与极小曲面 [8−10]、材料学 [11]、反常扩散 [12−14] 等方面应用.

设 $n\geq 2, s\in(0,1)$, 方程

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u = f(x,u), & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in R^n\setminus\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

*收稿日期: 2017-09-18 接收日期: 2017-11-29
基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (11571268); 陕西省自然科学基础研究计划项目 (2017JQ1022).
作者简介: 乔花玲 (1978–), 女, 陕西铜川, 讲师, 从事微分方程的研究.

已经得到广泛的关注. Rox-Oton 和 Serra [15] 建立与 (1.1) 式相联系的 Pohozaev 恒等式, 并证明了在有界光滑的星型域上, 若非线性项 $f(u)$ 是局部的 Lipschitz 函数, 有不等式

$$\frac{n-2s}{2n}\,u\,f(u) \geq \int_0^u f(t)dt, \quad \forall\, u \in R$$

成立, 则问题 (1.1) 没有有界正解, 当不等式严格成立时, 问题 (1.1) 没有非平凡的有界解; 若在 $\bar{\Omega} \times R$ 的任意紧子集上 $f(x,u)$ 是 Lipschitz 函数, 有不等式

$$\frac{n-2s}{2}\,u\,f(x,t) \geq n\,F(x,t) + F_x(x,t), \quad \forall\, x \in \Omega, t \in R$$

成立, 则问题 (1.1) 没有有界正解, 当不等式严格成立时, 问题 (1.1) 没有非平凡的有界解. Fall 和 Weth [16] 给出了在有界星型域 Ω $(0 \in \bar{\Omega})$ 上, 非线性项 $f(x,t) : \bar{\Omega} \setminus \{0\} \times [0,\infty) \to R$ 在 $\bar{\Omega} \setminus \{0\}$ 上的每一个子集上关于 t 是一致局部 Lipschitz 且在某种意义下是超临界的, 则问题 (1.1) 没有正解, 参见文献 [16, 定理 1.1]. 在无界的星型域上, 当 $f(x,u) = u^p$ $(1 \leq p \leq \frac{n+2s}{n-2s})$ 时, 问题 (1.1) 没有非平凡解. 如果 $f(x,u) = |u|^{\frac{4s}{n-2s}}u$, Fang [17] 研究了带有纯临界非线性项的 Laplacian 问题, 在空间 $D^{s,2}(R^n)$ 上, 得出问题 (1.1) 有无穷多非径向变号解; Gonzalez[18] 等讨论了该方程在双曲空间上层解的存在性、对称性; Servadei[19] 等发现具有齐次 Dirichlet 边界条件非局部微积分算子对应的方程有变分结构, 利用山路定理证明了其非平凡解的存在性, 此结果对一般的分数微积分算子也成立, 作为其特殊情形证明了半线性椭圆问题 (1.1) 非线性项 $f : \Omega \times R \to R$ 是 Carathéodory 函数时, 非平凡解的存在性; 当 $s = \frac{1}{2}$ 时, Cabré[20] 等研究了光滑有界域上正解的存在性, 对问题 (1.1) 非平凡解研究已经有比较完善的结果了, 关于问题 (1.1) 解的存在性等其它问题的许多结果请参考文献 [21–26]. 对于其是否有无穷解的研究结果为数不多. 最近, Liu 等 [27] 研究了如果 $f(x,u)$ 是关于 u 的奇函数且满足一定的增长条件, 则经典的 Dirichlet 边界值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.2}$$

有无穷多解 u_k, 当 $k \to \infty$ 时, 有 $\|u_k\|_{L^\infty} \to 0$. 受此启发, 本文将研究半线性椭圆问题 (1.1) 多解的存在性.

设 $\Omega \subset R^n$ 是具有光滑边界的有界域, 记

$$H^s(R^n) = \left\{ u \in L^2(R^n) : \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{n+2s}{2}}} \in L^2(R^n \times R^n) \right\},$$

$$\|u\|_{H^s(R^n)} = \left(\int_{R^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,dxdy + \int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

定义 1.1 若对任意 $\varphi \in C^\infty(R^n)$, 有

$$\int_{R^{2n}} \frac{(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{n+2s}} dxdy = \int_\Omega f(x,u)\varphi(x)dx \quad u(x) \in H^s(R^n)$$

成立, 则称 $u(x)$ 是问题 (1.1) 的弱解.

定义 1.2 设 $\Phi \in C^1(H^s(R^n))$, 称 Φ 满足 PS 条件是指: 若任意序列 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \in H^s(R^n)$ 满足下列条件

(1) $\{\Phi(u_k)\}_{k=1}^{\infty}$ 有界,

(2) 在 $H^s(R^n)$ 上 $\Phi^{'}(u_k) \to 0$ 有收敛序列.

主要结果是

定理 1.1 若存在 $\delta > 0$, 使得 $f \in C(\bar{\Omega} \times (-\delta, \delta), R), f(x,0) = 0, f$ 关于 u 是奇函数, 而且存在一个球域 $B_r(x_0) \subset \Omega$ 使得对 $x \in B_r(x_0)$, 有

$$\lim_{|u| \to 0} \frac{F(x,u)}{|u|^2} = +\infty \tag{1.3}$$

一致成立, 则问题 (1.1) 有无穷多解 u_k, 且当 $k \to \infty$ 时, $\|u_k\|_{L^\infty} \to 0$, 其中

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,t)dt, \quad B_r(x_0) = \{x_0 \in R^n | \, |x - x_0| < r\}, r > 0.$$

本文安排如下: 第 2 部分, 验证 PS 条件; 第 3 部分, 利用 Clark's 定理证明定理 1.1, 并作为推广, 给出方程组多解的存在性.

2 验证 PS 条件

为了证明主要结果, 考虑问题

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u(x) = \hat{f}(x,u), & x \in \Omega \subset R^n, \\ u = 0, & x \in R^n \setminus \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $s \in (0,1), \hat{f} \in C(\bar{\Omega} \times R, R)$, $\hat{f}$ 关于 u 是奇函数,

$$\hat{f}(x,u) = \begin{cases} f(x,u), & x \in \bar{\Omega}, \ |u| < \frac{\delta}{2}, \\ 0, & x \in \bar{\Omega}, \ |u| > \delta. \end{cases}$$

(2.1) 式相应的泛函为

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{R^{2n}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy - \int_\Omega \hat{F}(x,u) \, dx, \quad u \in H^s(R^n),$$

其中 $\hat{F}(x,u) = \displaystyle\int_0^u \hat{f}(x,t)dt$.

引理 2.1 $\Phi(u) \in C^1(H^s(R^n))$ 是偶的, 强制的且下有界.

证 由假设 $\hat{f} \in C(\bar{\Omega} \times R, R), \hat{f}$ 关于 u 是奇函数, $\hat{F}(x,u) = \displaystyle\int_0^u \hat{f}(x,t)dt$, 所以 $\hat{F}(x,u) \in C^1(\bar{\Omega} \times R, R)$, $\hat{F}(x,u)$ 关于 u 是偶函数, 从而 $\Phi(u) \in C^1(H^s(R^n))$ 是偶的.

由 (1.3) 式可得存在常数 C_1, 使得 $\displaystyle\int_\Omega \hat{F}(x,u)dx \le C_1 \int_\Omega |u|^2 dx$, 根据空间 $H^s(R^n)$ 上范数的定义有

$$\int_{R^{2n}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} \, dxdy = \|u\|^2_{H^s(R^n)} - \int_\Omega |u|^2 dx,$$

因此有

$$\begin{aligned}\Phi(u) &\geq \frac{1}{2}\left(\|u\|^2_{H^s(R^n)}-\int_\Omega|u|^2dx\right)-C_1\int_\Omega|u|^2dx\\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^s(R^n)}-C_2\int_\Omega|u|^2dx=\frac{1}{2}\|u\|^2_{H^s(R^n)}-C_2\|u\|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

则 Φ 是强制的且下有界, 其中 $C_2=C_1+\frac{1}{2}$ 是适当的常数.

引理 2.2 若 $\{u_n\}$ 在 $H^s(R^n)$ 上弱收敛到 u, 则在 $L^q(R^n)$ 上 $\{u_n\}$ 满足 PS 条件, 其中 $2\leq q\leq 2^*_s=\dfrac{2n}{n-2s}$.

证 由 $\Phi^{'}$ 的定义有

$$\langle\Phi^{'}(u_n),u_n-u\rangle = \langle\Phi^{'}(u_n)-\Phi^{'}(u),u_n-u\rangle=o(1),\quad n\to\infty, \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\langle\Phi^{'}(u_n)-\Phi^{'}(u),u_n-u\rangle &= \int_{R^{2n}}\frac{|u_n(x)-u(x)-u_n(y)+u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy\\ &\quad -\int_\Omega\left[f(x,u_n(x))-f(x,u(x))\right]\left(u_n(x)-u(x)\right)dx.\end{aligned} \tag{2.3}$$

由 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega|\left[f(x,u_n(x))-f(x,u(x))\right]\left(u_n(x)-u(x)\right)|dx\\ \leq&\left[\int_\Omega|f(x,u_n(x))-f(x,u(x))|^2dx\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\int_\Omega|u_n(x)-u(x)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

在 $L^q(R^n)$ 上 $u_n(x)\to u(x)$, 映射 $t\mid\to f(x,t)$ 关于 t 连续, $t\in R$, 所以

$$f(x,u_n(x))\to f(x,u(x))\quad(n\to\infty),$$

在 Ω 上 a.e. 成立.

由假设 $f(x,u(x))$ 有界及控制收敛定理知

$$\int_\Omega|f(x,u_n(x))|dx\to\int_\Omega|f(x,u(x))|dx.$$

再由引理 2.1 知 $\Phi(u)$ 是强制的, 故序列 $\{u_n\}$ 是有界的, 因此有

$$\int_\Omega\left[f(x,u_n(x))-f(x,u(x))\right]\left(u_n(x)-u(x)\right)dx\to 0. \tag{2.4}$$

联立 (2.2)–(2.4) 式可得

$$\begin{aligned}&\int_{R^{2n}}\frac{|u_n(x)-u(x)-u_n(y)+u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,dxdy=o(1),\\ &\|u_n(x)-u(x)\|^2_{H^s(R^n)}\\ =&\int_{R^{2n}}\frac{|u_n(x)-u(x)-u_n(y)+u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy+\int_\Omega|u_n(x)-u(x)|^2\,dx=o(1).\end{aligned}$$

因此 $\Phi(u)$ 满足 PS 条件.

3 定理 1.1 的证明

为了证明定理 1.1, 需要如下关键定理.

定理 3.1 (见文献 [27]) 设 X 是 Banach 空间, $\Phi \in C^1(X, R)$, Φ 是偶泛函, 下有界且 $\Phi(0) = 0$, 满足 PS 条件. 如果对任意 $k \in N$, 存在 X 的 k - 维子空间 X^k 及 $\rho_k > 0$ 使得 $\sup\limits_{X^k \cap S_{\rho_k}} \Phi < 0$, 其中 $S_\rho = \{u \in X | \, \|u\| = \rho\}$, 那么下面的结论至少有一个成立:

1) 存在临界点序列 $\{u_k\}$ 满足对任意的 k, 当 $k \to \infty$ 时, $\|u_k\| \to 0, \Phi(u_k) < 0$;

2) 存在 $r > 0$ 使得对任意 $0 < a < r$, 存在临界点 u 使得 $\|u\| = a, \Phi(u) = 0$.

定理 1.1 的证明 由引理 2.1 和引理 2.2 可知 $\Phi(u) \in C^1(H^s(R^n))$ 是偶泛函, 下有界, 满足 PS 条件. 由定理 1 的假设 $f(x, 0) = 0$ 及 $\hat{F}(x, u)$ 的定义, 有 $\Phi(0) = 0$. $\forall K > 0, \exists \delta = \delta(K) > 0$, 使得如果 $u \in C_0^\infty(B_r(x_0)), |u|_\infty < \delta$, 则

$$\begin{aligned}
\hat{F}(x, u(x)) &\geq K|u(x)|^2, \\
\Phi(u) &= \frac{1}{2}\int_{R^{2n}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}}\, dxdy - \int_\Omega \hat{F}(x, u(x))dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{R^{2n}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}}\, dxdy - K\int_\Omega |u(x)|^2 dx \\
&\leq \|u(x)\|^2_{H^s(R^n)} - K\|u(x)\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

这表明 $\forall k \in N$, 如果 X^k 是 $C_0^\infty(B_r(x_0))$ 的 k - 维子空间, $\rho_k > 0$ 充分小, 则有 $\sup\limits_{X^k \cap S_{\rho_k}} \Phi < 0$, $S_{\rho_k} = \{u(x) \in H^s(R^n) | \, \|u(x)\| = \rho_k\}$, 由定理 3.1 知 Φ 有非平凡临界点列 $\{u_k(x)\}$ 满足 $\forall k$ 有 $\Phi(u_k(x)) < 0$, 当 $k \to \infty$ 时, $\|u_k(x)\| \to 0$.

最后, 来证明当 $k \to \infty$ 时, 有 $\|u_k(x)\|_{L^\infty} \to 0$, 即当 k 充分大时, $u_k(x)$ 也是问题 (1.1) 的解. 记 $2_s^* = \dfrac{2n}{n - 2s}$, 假设 $1 < p < n$, 当 $p \geq n$ 时, 可以类似证明结论成立. 若 u 是 (1.1) 式的解, $\alpha > 0$, 设 $M > 0$, 记 $u^M(x) = \max\{-M, \min\{u(x), M\}\}$. 给 (2.1) 式两边同乘以 $|u^M|^\alpha u^M$ 可以得到

$$\frac{2^2}{(\alpha + 2)^2}\int_{R^n} |\nabla |u^M|^{\frac{\alpha}{2}+1}|^2 \leq C\int_{R^n} |u^M|^{\alpha+1}.$$

再由分数 Sobolev-Hardy 不等式 [28], 则有

$$\|u^M\|_{L^{\frac{(\alpha+2)n}{n-2s}}(R^n)} \leq C_1(\alpha + 2)^{\frac{2}{\alpha+2}} \|u^M\|^{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}_{L^{\alpha+1}(R^n)}, \tag{3.1}$$

其中 $C_1 > 1$ 是常数, 且与 u 和 α 无关. 令 $\alpha_0 = 2_s^* - 1, \alpha_k = \dfrac{(\alpha_{k-1} + 2)n}{n - 2s} - 1$, 即 $\alpha_k = \dfrac{(2_s^*/2)^{k+1} - 1}{(2_s^*/2) - 1}\alpha_0, k = 1, 2, 3, \cdots$, 对 α_k 重复利用不等式 (3.1) 可得

$$\|u^M\|_{L^{\alpha_{k+1}+1}(R^n)} \leq \exp\Big(\sum_{i=0}^k \frac{2\ln(C_1(\alpha_i + 2))}{\alpha_i + 2}\Big)\|u^M\|^{\nu_k}_{L^{2_s^*}(R^n)},$$

其中 $\nu_k=\prod\limits_{i=0}^{k}\frac{\alpha_i+1}{\alpha_i+2}$. 令 $M\to+\infty$, 则 $k\to\infty$, 因此有下面的不等式成立

$$\|u^M\|_{L^\infty(R^n)}\le\exp(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2\ln(C_1(\alpha_i+2))}{\alpha_i+2})\|u^M\|^{\nu}_{L^{2^*_s}(R^n)},$$

其中 $\nu=\prod\limits_{i=0}^{\infty}\frac{\alpha_i+1}{\alpha_i+2}\in(0,1),\exp(\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{2\ln(C_1(\alpha_i+2))}{\alpha_i+2})$ 是正数, 因此当 $k\to\infty$ 时, $\|u_k(x)\|_{L^\infty}\to0$, 结论得证.

推论 3.1 若存在 $\delta>0$, 使得 $F\in C^1(\bar\Omega\times B_\delta(0),R),F(x,0)=0,F$ 关于 u 是偶函数, 而且存在一个球域 $B_r(x_0)\subset\Omega$, 使得对 $x\in B_r(x_0)$, 有

$$\lim_{|u|\to0}\frac{F(x,u)}{|u|^2}=+\infty \tag{3.2}$$

一致成立, 则方程组

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u=F_u(x,u), & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in R^n\setminus\Omega\end{cases} \tag{3.3}$$

有无穷多解 u_k, 且当 $k\to\infty$ 时, $\|u_k\|_{L^\infty}\to0$, 其中 $\Omega\subset R^n$ 是有光滑边界的有界域,

$$B_r(x_0)=\{x\in R^n||x-x_0|<r\},\ r>0,\quad B_\delta(0)=\{x\in R^m||x|<\delta\},\ \delta>0,$$

$u=(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ 是 m 维向量函数, $(-\Delta)^s u=((-\Delta)^s u_1,(-\Delta)^s u_2,\cdots,(-\Delta)^s u_m)$.

证 考虑方程组

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u=\hat F_u(x,u), & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in R^n\setminus\Omega,\end{cases} \tag{3.4}$$

其中 $s\in(0,1),\hat F\in C^1(\bar\Omega\times R^m,R)$ 使得 $\hat F$ 关于 u 是偶函数,

$$\hat F(x,u)=\begin{cases}F(x,u), & x\in\bar\Omega, & |u|<\frac{\delta}{2},\\ 0, & x\in\bar\Omega, & |u|>\delta.\end{cases}$$

(3.4) 式相应的泛函为

$$\Phi(u)=\frac12\int_{R^{2n}}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy-\int_\Omega\hat F(x,u)dx,\quad u\in H^s(R^n,R^m),$$

则 $\Phi(u)\in C^1(H^s(R^n,R^m)$ 是偶的, 强制的, 下有界, 且满足 PS 条件. $\forall k\in N$, 如果 X^k 是 $C_0^\infty(B_r(x_0),R^m)$ 的 k - 维子空间, $\rho_k>0$ 充分小, 则有 $\sup\limits_{X^k\cap S_{\rho_k}}\Phi<0$, $S_\rho=\{u(x)\in H^s(R^n,R^m)|\|u(x)\|=\rho\}$, 由定理 3.1 知 Φ 有非平凡临界点列 $\{u_k(x)\}$ 满足对任意 k 有 $\Phi(u_k)<0$, 当 $k\to\infty$ 时, $\|u_k(x)\|\to0$.

与定理 1.1 的证明类似, 可以证明当 $k\to\infty$ 时, 有 $\|u_k(x)\|_{L^\infty}\to0$, 即对于 k 充分大时, $u_k(x)$ 仍然是方程组 (3.3) 的解.

参 考 文 献

[1] Di Nezza E, Palatucci G, Valdinoci E. Hitchhiker's guide to the fractional sobolev spaces[J]. Bull. Sci. Math., 2012, 136: 521–573.

[2] Caffarelli L. Nonlacal equations, drifts and games, nonlinear partial differential equtions [J]. Abel Symposia, 2012, 7(1): 37–52.

[3] Laskin N. Fractional quantum mechamics and Lévy path integrals [J]. Phys. Lett. A, 2000, 268(1): 298–305.

[4] Metzler R, Klafter J. The restaurant at the random walk:rencent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics [J]. J. Phys. A, 2004, 37(1): 161–208.

[5] Silvestre L. Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator Commun [J]. Pure Appl. Math., 2006, 60: 67–112.

[6] Cont R, Tankov P. Financial modeling with jump processes [M]. Boca Raton: A CRC Press Company, 2004.

[7] Duvaut G, Lions J L. Inequalities in mechanics and physics [M]. Berlin: Springer-verlag, 1976.

[8] Caffarelli L, Roquejoffre J M, Savin O. Nonlical minimal surfaces [J]. Comm. Pure Apple. Math., 2012, 63(2): 1111–1144.

[9] Caffarelli L, Valdinoci E. Uniform estimates and limiting arguments for nonlocal minimal surfaces [J]. Calc. Var. Partial Diff. Equ., 2007, 32(2): 1245–1260.

[10] Chang S-Y A, del Mar Gonzalez M. Fractional Laplacian in conformal geometry [J] Adv. Math., 2011, 226(2): 1410–1432.

[11] Bates P W. On some nonlocal evolution equations arising in materials science, nonlinear dynamics and evolution equations [J]. Amer. Math. Soc., 2006, 48(2): 13–52.

[12] del Mar Gonzalez M, Monneau R. Slow motion of particle system as a limit of a reactiondiffusion equation with half-Laplacian in dimension one[J]. Disc. Contin. Dyn. Syst., 2012, 32(2): 1255–1286.

[13] Metzler R, Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamic approach[J]. Phys. Rep., 2000, 339 (2): 77.

[14] Metzler R, Klafter J. The restaurant at the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics [J]. J. Phys. A, 2004, 37(2): 161–208.

[15] Ros-Oton X, Serra J. The Pohozaev identity for the fractional Laplacian [J]. Arch. Rat. Mech. Anal., 2014, 213: 587–628.

[16] Fall M M, Weth T. Nonexistence results for a class of fractional elliptic boundary value problems [J]. J. Funct. Anal., 2012, 263: 2205–2227.

[17] Fei Fang. Infinitely many non-radial sign-changing solutions for a fractional Laplacian equation with critical nonlinearity[J]. arXiv:1408.3187v1 [math.AP], 2014.

[18] Gonzalez M, Saez M, Sire Y. Layer solutions for the fractional Laplacian on hyperbolic space: existence, uniqueness and qualitative properties [J]. Annali di Matematica, 2014, 193: 1823–1850.

[19] Servadei R, Valdinoci E. Mountain pass solutions for non-local elliptic operators [J]. J. Math. Anal. Appl., 2012, 389(1): 887–898.

[20] Cabré X, Tan J. Positive solutions of nonlinear problems involving the square root of the Laplacian [J]. Adv. Math., 2009, 224(5): 2052–2093.

[21] Ros-Oton, Serra J. The Dirichlet problem for the fractional laplacian: regularity up to the boundary [J]. J. Math. Pures Appl., 2014, 101(3): 275–302.

[22] Ros-Oton X, Serra J. Nonexistence results for non-local equations with critical and supercritical nonlinearities[J]. Comm. P. D. E., 2015, 40(1): 115–133.

[23] Servadei R, Valdinoci E. The Brezis-Nirenberg result for the fractional laplacian [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 2015, 367(1): 67–102.

[24] Cabré X, Sire Y. Nonlinear equations for fractional laplacian I: regularity, maximum principles, and Hamiltonian estimates [J]. Ann. Inst. Henri Poincare Nonl. Anal., 2014, 31(1): 23–53.

[25] Cabré X, Sire Y. Nonlinear equations for fractional laplacian II: existence, uniqueness, and qualitative properties of solutions [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 2011, 367(2): 911–941.

[26] Brändle C, Colorado E, Pablo A de. A concave-convex elliptic problem involving the fractional Laplacian[J]. arXiv:1006.4510v1 [math.AP], 2010.

[27] Liu Zhaoli, Wang ZhiQiang. On Clark's theorem and its applications to partially sublinear problems [J]. Ann. Inst. Henri. Poincare Nonl. Anal., 2015, 32(5): 1015–1037.

[28] Yang Jianfu. Fractional Sobolev-Hardy inequality in R^n [J]. Nonl. Anal., 2015, 119: 179–185.

THE EXSITENCE OF MULTIPLE SOLUTIONS FOR A CLASS OF SEMILINEAR FRACTIONAL LAPLACIAN EQUATIONS

QIAO Hua-ling, WU Yu-mei

(*School of Statistics, Xi'an University of Finance and Economics, Xi'an 710061,China*)

Abstract: In this paper,we study the existence of infinitely many solutions near the origin for a class semilinear fractional Laplacian equtions $\begin{cases} (-\Delta)^s u = f(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in R^n \setminus \Omega. \end{cases}$ By improved Clark's theorem, we obtain the result that the corresponding functional of the equation has a critical sequence that converges to zero. The results of the existence of multiple solutions for integral order semilinear equations are generalized.

Keywords: fractional Laplacian; critical; infinitely many solutions; Clark's theorem

2010 MR Subject Classification: 35A01; 35J61; 35B38