

类似于 VNL 环的环

王 尧¹, 杨 圳¹, 任艳丽²

(1. 南京信息工程大学数学与统计学院, 江苏 南京 210044)

(2. 南京晓庄学院信息工程学院, 江苏 南京 211171)

摘要: 本文研究类似于 VNL 环的环的性质. 称一个环 R 是几乎弱正则环 (几乎 π -正则环, 几乎强 π -正则环), 如果对任意的 $a \in R$, 都有 a 或 $1-a$ 是弱正则 (π -正则, 强 π -正则) 元. 本文讨论这些新环的扩张, 给出相关环之间的关系图, 拓广了局部环和 VNL 环的研究.

关键词: 几乎弱正则环; 几乎 π -正则环; 几乎强 π -正则环; 环扩张

MR(2010) 主题分类号: 16E50; 16S50

中图分类号: O153.3

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2018)05-0903-09

1 引言

本文所研究的环 R 都是有单位元 1 的结合环, 环同态都是保持单位元不变的. 设 $a \in R$ 是环 R 中一个元素, 称 a 是 (von Neumann) 正则的, 如果存在 $b \in R$, 使得 $a = aba$. 如果还满足 $ab = ba$, 则称 a 为强正则的. 称 a 是弱正则的, 如果存在 $r', r'' \in R$, 使得 $a = ar'ar''$. 称 a 是 π -正则的 (强 π -正则的), 如果存在 $b \in R$ 和正整数 n 使得 $a^n = a^nba^n$ ($a^n = a^{n+1}b$). 称 a 是单式正则的, 如果存在一个可逆元 $u \in R$ 使得 $a = auu$. 称一个环 R 是正则 (强正则, 弱正则, π -正则, 强 π -正则, 单式正则) 环, 如果 R 中所有元素都是正则 (强正则, 弱正则, π -正则, 强 π -正则, 单式正则) 元. 显然正则环是弱正则环. 众所周知, 一个环为局部环当且仅当对任意 $a \in R$, a 或 $1-a$ 是可逆的. 局部环是环理论中一类极其重要的环, 有大量的研究. Contessa^[1] 拓展局部环的概念, 称一个环 R 是 VNL (Von Neumann Local) 环, 如果对任意 $a \in R$, 都有 a 或 $1-a$ 是正则的. VNL 环是近年来环论研究的热点之一 (参见文献 [2-5]). 此外, Chen^[6] 称一个环 R 是几乎单式正则环, 如果对任意 $a \in R$, 都有 a 或 $1-a$ 是单式正则的; 称一个环 R 是几乎强正则环, 如果对任意 $a \in R$, a 或 $1-a$ 是强正则的.

本文进一步拓展局部环的概念, 在弱正则环、 π -正则环、强 π -正则环的基础上, 分别定义和研究几乎弱正则环、几乎 π -正则环、几乎强 π -正则环的性质.

2 定义及相关环之间的关系

定义 2.1 称一个环是几乎弱正则环 (几乎 π -正则环, 几乎强 π -正则环), 如果对任意 $a \in R$, a 或 $1-a$ 是弱正则 (π -正则, 强 π -正则) 的.

由定义知, 弱正则环是几乎弱正则环, 局部环、几乎强正则环和 VNL 环都是几乎弱正则环. 因此存在以下关系: $\{\text{局部环}\} \subseteq \{\text{几乎强正则环}\} \subseteq \{\text{VNL 环}\} \subseteq \{\text{几乎弱正则环}\}.$

*收稿日期: 2017-03-23

接收日期: 2017-10-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11101217); 江苏省自然科学基金资助项目 (BK20141476).

作者简介: 王尧 (1962-), 男, 黑龙江海伦人, 教授, 主要研究方向: 结合环与结合代数.

另一方面, VNL 环和 π -正则环都是几乎 π -正则环, 几乎强正则环和强 π -正则环都是几乎强 π -正则环, 几乎强 π -正则环是几乎 π -正则环. 在文献 [7] 中, 几乎 π -正则环和几乎强 π -正则环被称作局部 π -正则环和局部强 π -正则环, 其中的命题 3.2.16 证明: 在 Abel 环条件下, 几乎强 π -正则环与几乎 π -正则环是等价的.

下面的例子说明, 几乎弱正则环是弱正则环概念的真推广.

例 2.2 设 $Z_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ 是整数环模理想 (4) 的商环, 它是几乎弱正则环但不是弱正则环. 事实上, $\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}$ 都是正则元, $\bar{1} - \bar{2}$ 是正则元, 因此 Z_4 是几乎弱正则环. 但 $\bar{2}$ 不是弱正则的, 因此 Z_4 不是弱正则环.

称一个环 R 是双正则的, 如果 R 的每个主理想都是由一个中心幂等元生成的. 由文献 [8] 中结论, 双正则环是弱正则环. 下面的例子说明几乎弱正则环是 VNL 环概念的真推广, 几乎强 π -正则环是强 π -正则环的真推广.

例 2.3 (1) ^[9] 设 R 是 VNL 环但不是双正则环, S 是双正则环但不是 VNL 环, 则 $R \oplus S$ 是几乎弱正则环, 但它既不是 VNL 环也不是双正则环.

(2) ^[7] 设 p 是任一素数, $R = Z_p = \{m/n; m, n \in Z, (n, p) = 1\}$ 是 Z 在 P 处的局部化, 则 R 是局部环, 因此也是几乎强 π -正则环. 但因为 $p \in R$ 不是 R 的 π -正则元素, 所以 R 不是强 π -正则环.

下面的例子说明, 几乎 π -正则环是 π -正则环与 VNL 环概念的真推广.

例 2.4 设 $Z_4 \oplus Z_4$. 易证 $(\bar{3}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{1}) - (\bar{3}, \bar{2})$ 都不是正则的, 因此 R 不是 VNL 环. 因为 R 是 π -正则环, 因此也是几乎 π -正则环.

例 2.5 令 $R = R_1 \times R_2$, 其中 R_1 是 π -正则环但不是 VNL 环, R_2 是 VNL 环但不是 π -正则环. 显然 R 既不是 π -正则环也不是 VNL 环. 但 R 是几乎 π -正则环.

证 因为对任意的 $(a, b) \in R$, 其中 $a \in R_1, b \in R_2$, 由 R_2 是 VNL 环, 则 b 或 $1 - b$ 是正则的. 如果 b 正则的, 则 b 是 π -正则的, 所以 (a, b) 是 π -正则元素. 如果 $1 - b$ 正则的, 则 $1 - b$ 是 π -正则的, 所以 $(1 - a, 1 - b)$ 是 π -正则元素. 所以 (a, b) 或 $(1 - a, 1 - b)$ 是 π -正则的. 所以 R 是几乎 π -正则环, 但显然 R 既不是 π -正则环也不是 VNL 环.

下面举例说明几乎强 π -正则环是局部环和强 π -正则环的真推广.

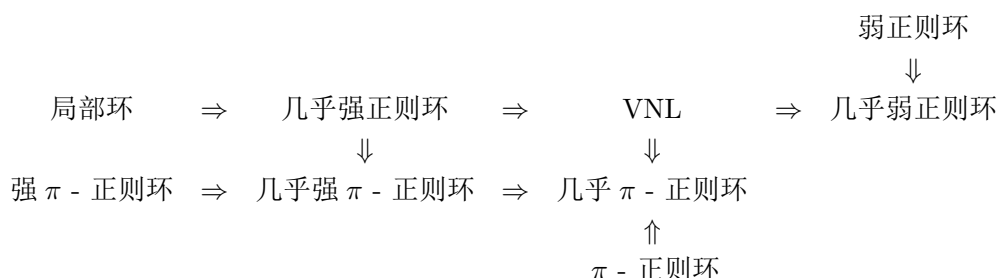
例 2.6 $R = Z_4 \times Z_4$ 是强 π -正则环, 因此也是几乎强 π -正则环. 但 $(0, 1)^2 = (0, 1)$ 不是平凡的幂等元, 所以 R 不是局部环.

例 2.7 令 $R = C \times D$, 其中 C 是强 π -正则环但不是几乎强正则环, D 是几乎强正则环但不是强 π -正则环. 显然 R 既不是强 π -正则环也不是几乎强正则环. 但 R 是几乎强 π -正则环. 证明类似例 2.5.

下面的例子说明几乎 π -正则环是几乎强 π -正则环的真推广.

例 2.8 设 $Z_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ 是整数环模理想 (6) 的商环, 它是正则环. 由文献 [4, 定理 2.3] 知 R 是正则环当且仅当 $M_n(R)$ 是 VNL 环, 对于 $n \geq 2$. 因此 $M_2(Z_6)$ 是 VNL 环. 因此也是几乎 π -正则环. 经过计算可以验证, 在 $M_2(Z_6)$ 中, 矩阵 $\begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix}$ 都不是强 π -正则的. 因此 $M_2(Z_6)$ 不是几乎强 π -正则环.

综上, 得到相关环的如下关系图.



命题 2.9 对任意的交换环 R , 以下命题等价:

- (1) R 是 VNL 环;
- (2) R 是几乎强正则环;
- (3) R 是几乎弱正则环.

证 显然.

命题 2.10 (1) 几乎弱正则环 R 的中心 $C(R)$ 是 VNL 环;

(2) 几乎 π -正则环 R 的中心 $C(R)$ 是几乎强 π -正则环.

证 (1) 对任意 $x \in C(R)$, x 或 $1-x$ 是 R 中弱正则元, 如果 x 在 R 中弱正则, 则存在 $r', r'' \in R$ 使得 $x = xr'xr'' = x^2r'r'' \in x^2R$. 由文献 [9] 命题 12, 可以推出 $x = x(x^ky)x$, 其中 $y \in R$, $k \geq 1$. 而且, 对任意 $r \in R$,

$$r(x^ky) = x^{k-1}(xr)y = x^{k-1}(x^{k+1}yx)ry = x^{k-1}(yr)(x^{k+1}yx) = x^{k-1}yrx = x^kyr,$$

即 $x^ky \in C(R)$. 所以 x 是 $C(R)$ 中正则元. 同理, 如果 $1-x$ 是 R 中弱正则元, 可以推出 $1-x$ 也是 $C(R)$ 中正则元. 所以 R 的中心 $C(R)$ 是 VNL 环.

(2) 证明见文献 [7] 命题 3.2.17.

一个环 R 称为 Abel 环, 如果 R 中幂等元都是中心幂等元. 文献 [7] 的命题 3.2.12 和文献 [10] 的推论 3 证明: 如果 R 是几乎 π -正则环 (几乎强 π -正则环), 则对任意 $e = e^2 \in R$, eRe 也是几乎 π -正则环 (几乎强 π -正则环).

命题 2.11 如果 R 是 Abel 几乎弱正则环, 则对任意 $e = e^2 \in R$, eRe 也是几乎弱正则环.

证 对于 $a \in eRe$, 存在 $r \in R$ 使得 $a = ere$, 于是有 $ea = ae = eae = a$. 因为 R 是几乎弱正则环, 所以 a 或 $1-a$ 是 R 中弱正则元. 若 a 是弱正则的, 则存在 $b', b'' \in R$, 使得 $a = ab'ab'' = (ae)b'(eae^2)b'' = a(eb'e)a(eb''e)$, 其中 $eb'e, eb''e \in eRe$, 所以 a 在 eRe 中弱正则. 若 $1-a$ 在 R 中弱正则, 则存在 $c', c'' \in R$ 使得 $1-a = (1-a)c'(1-a)c''$. 由此可得 $e-a = e(1-a)e = e(1-a)c'(1-a)c''e = (e-a)ec'e(e-a)ec''e$, 其中 $ec'e, ec''e \in eRe$. 所以 $1-a$ 在 eRe 中弱正则. 这证明了 eRe 是几乎弱正则环.

引理 2.12 设 $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 是主对角线元素为 a_i , 其余位置都是 0 的 $n \times n$ 阶矩阵. 在 $M_n(R)$ 中, $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 弱正则当且仅当 $a_1, \dots, a_n$ 都在 R 中弱正则.

定理 2.13 设 R 是一个环, 以下命题等价:

- (1) R 是弱正则环;

(2) 对于每一自然数 n , $M_n(R)$ 是几乎弱正则环.

证 (1) $\Rightarrow$ (2). 由文献 [11] 引理 1.1, R 是弱正则环可以得到 $M_n(R)$ 是弱正则环, 因此也是几乎弱正则环.

(2) $\Rightarrow$ (1). 对任意 $a \in R$, 取 $A = \text{diag}\{a, 1-a, 1, \dots, 1\} \in M_n(R)$, I_n 是 $M_n(R)$ 中单位矩阵. 从而 $I_n - A = \text{diag}\{1-a, a, 0, \dots, 0\}$ 因为 $M_n(R)$ 是几乎弱正则环, 所以 A 或 $I_n - A$ 在 $M_n(R)$ 中是弱正则的. 由引理 2.12 知无论 A 或 $I_n - A$ 是弱正则的, 均可以得到 a 在 R 中弱正则. 因此 R 是弱正则环.

命题 2.14 (1) 单环都是几乎弱正则环;

(2) 如果环 R 的每个右理想都是由幂等元生成的, 则 R 是几乎弱正则环.

证 由文献 [8, 命题 4.7] 知单环是弱正则环; 如果环 R 的每个右理想都是由幂等元生成的, 则 R 是弱正则环. 因此, 它们都是几乎弱正则环.

文献 [12] 中称一个环 R 是 ELT 环, 如果 R 中每个本质左理想都是理想.

命题 2.15 设 R 是 ELT 环, 以下命题等价:

(1) R 是几乎弱正则环;

(2) R 是 VNL 环.

证 (2) $\Rightarrow$ (1) 显然成立.

(1) $\Rightarrow$ (2). 构造这样一个本质左理想 $I = (a) \oplus \sum L_i$, 其中 (a) 是 R 中由 a 生成的主左理想, L_i 是 R 中所有不含 a 的左理想. 由 R 是 ELT 环知 I 是 R 的理想. 因为 R 是几乎弱正则环, 对任意 $a \in R$, 有 a 或 $1-a$ 弱正则. 如果 a 是弱正则的, 则存在 $x', x'' \in R$ 使得 $a = ax'ax'' \in aRaR \subseteq aI$. 于是存在 $b \in R, l \in \sum L_i$ 使得 $a = a(ba + l)$, $a - aba = (1-ab)a \in (a)$. 另一方面, $a - aba = al \in \sum L_i$, 而 $(a) \cap \sum L_i = 0$, 这推出 $a = aba$, 所以 a 在 R 中是正则的. 如果 $1-a$ 是弱正则的, 类似可证 $1-a$ 是正则的. 综上, R 是 VNL 环.

引理 2.16 [8] 对于一个约化环 R 以及 $a \in R$, 有

$$r_R(a) = l_R(a) = r_R(RaR) = l_R(RaR) = \{b \in R | RaR \cap RbR = 0\}$$

是 R 的一个理想 I , 且 $I \cap RaR = 0$, 其中 $l_R(a)$, $r_R(a)$ 分别表示环 R 中 a 的左、右零化子集合.

定义 2.17 称一个环是几乎双正则环, 如果对任意 $x \in R$, RxR 或 $R(1-x)R$ 是由中心幂等元生成的.

命题 2.18 设 R 是约化环, 则以下命题等价:

(1) R 是几乎弱正则环;

(2) R 是几乎双正则环.

证 (2) $\Rightarrow$ (1). 对于 $a \in R$, RaR 或 $R(1-a)R$ 是由中心幂等元生成的. 如果 RaR 是由中心幂等元生成的, 则存在一个中心幂等元 $e \in R$ 使得 $RaR = (e)$, 从而 $aR = aRe \subseteq aR(RaR) = (aR)^2 \subseteq aR$, 因此 a 在 R 中是弱正则的. 如果 $R(1-a)R$ 是由中心幂等元生成的, 同理可以得到 $1-a$ 在 R 中是弱正则的.

(1) $\Rightarrow$ (2). 对于 $a \in R$, 由假设知 a 或 $1-a$ 是弱正则的. 如果 a 在 R 中弱正则, 记 $r_R(a) = B$, 由引理 2.16 知 $B = r_R(a) = r_R(RaR) = l_R(RaR)$ 且 $B \cap RaR = 0$. 因为 a 是弱正则的, 所以存在 $b \in RaR$ 使得 $a = ab$, 因此有 $a - ab = 0$, $a(1-b) = 0$, $1-b \in r_R(a)$, 因此

$RaR + B = R$. 又因为 $B \cap RaR = 0$, 从而有 $RaR \oplus B = R$. 由文献 [13] 引理 4 知, RaR 是由中心幂等元生成的. 如果 $1 - a$ 在 R 中弱正则, 同理可得 $R(1 - a)R$ 是由中心幂等元生成的.

命题 2.19 约化的几乎强 π -正则环是 VNL 环.

证 任取 $x \in R$, 因为 R 是几乎强 π -正则环, 则 x 或 $1 - x$ 是强 π -正则的. 假定 x 是强 π -正则的, 则存在 $z \in R$ 和正整数 n 使得 $x^n = x^{n+1}z$, $xz = zx$. 设 $e = x^n z^n$. 因为 $x^n = x^{n+1}z = x^{n+2}z^2 = \cdots = x^{2n}z^n = x^n z^n x^n$. 因此 $e^2 = e$, x 与 $1 - e$ 可交换,

$$[x(1 - e)]^n = x^n(1 - e) = x^n - x^{2n}z^n = x^n - x^n = 0.$$

又因为 R 是约化环, 从而有

$$x(1 - e) = 0, x = xe = x^{n+1}z^n = x(x^{n-1}z^n)x,$$

即 x 是正则的. 假定 $1 - x$ 是强 π -正则的, 类似可得 $1 - x$ 也是正则的. 所以 R 是 VNL 环.

命题 2.20 设环 $T = S + K$, 其中 S 是 T 的子环, K 是 T 的幂零理想, 则 T 是几乎强 π -正则环当且仅当 S 是几乎强 π -正则环.

证 假定 $K^n = 0$, 对于特定的 $n \geq 1$.

($\Leftarrow$) 任取 $t \in T$, $t = s + x$ 其中 $s \in S$, $x \in K$. 因为 S 是几乎强 π -正则的, 有 s 或 $1 - s$ 是强 π -正则的. 如果 s 是强 π -正则的, 则存在 $k \geq 1$ 使得 $s^k S = s^{k+1} S = \cdots$, 因此存在 $s_0 \in S$ 使得 $s^k = s^{nk+1} s_0$. 于是有 $t^k = (s + x)^k = s^k + x_0 = s^{nk+1} s_0 + x_0$, $t^{nk+1} = (s + x)^{nk+1} = s^{nk+1} + x_1$, 其中 $x_0, x_1 \in K$. 这样, $t^k - t^{nk+1} s_0 = x_0 - x_1 s_0 \in K$. 因为 $K^n = 0$, $(t^k - t^{nk+1} s_0)^n = 0$, 从而得到 $t^{nk} \in t^{nk+1} T$, 所以 t 在 T 中是强 π -正则的. 如果 $1 - s$ 是强 π -正则的, 同理可证 $1 - t$ 是强 π -正则的. 所以 T 是几乎强 π -正则环.

($\Rightarrow$) 任取 $s \in S$. 因为 T 是几乎强 π -正则的, 有 s 或 $1 - s$ 在 T 中是强 π -正则的. 如果 s 是强 π -正则的, 则存在 $k \geq 1$ 使得 $s^k T = s^{k+1} T = \cdots$, 因此存在 $t \in T$, $s^k = s^{nk+1} t$. 令 $t = a + x$, 其中 $a \in S$, $x \in K$. 这样就有 $s^k - s^{nk+1} a = s^{nk+1} x \in K$, $K^n = 0$, $(s^k - s^{nk+1} a)^n = 0$, 从而有 $s^{nk} \in s^{nk+1} S$, 所以 s 在 S 中是强 π -正则的. 如果 $1 - s$ 在 T 中是强 π -正则的, 同理可证 $1 - s$ 在 S 中也是强 π -正则的, 即 S 是几乎强 π -正则环.

文献 [12] 中称环 R 的右理想 I 为广义弱理想 (GW 理想), 如果对任意 $a \in I$, 存在一个正整数 n , 使得 $Ra^n \subseteq I$.

命题 2.21 设环 R 中的极大右理想都是 GW 理想, 则以下命题等价:

- (1) R 是几乎强正则环;
- (2) R 是几乎弱正则环.

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 由定义可得.

(2) $\Rightarrow$ (1). 因为 R 是几乎弱正则环, 对于任意 $a \in R$, 有 a 或 $1 - a$ 弱正则. 如果 a 是弱正则的, 则存在 $s, t \in R$ 使得 $a = asat$. 假设 $r(a) + aR \neq R$ 且 M 是 R 中包含 $r(a) + aR$ 的极大右理想, 则由 $a(1 - sat) = 0$ 知 $1 - sat \in r(a) \subseteq M$. 如果 $sat \notin M$, 则有 $M + satR = R$, 且存在 $x \in M$, $r \in R$ 使得 $x + satr = 1$. 因为 M 是 GW 理想且 $atrs \in M$, 故存在一个正整数 n 使得 $s(atrs)^n \in M$, 于是有 $(1 - x)^{n+1} = (satr)^{n+1} = s(atrs)^n atr \in M$. 又因为 $x \in M$, 从而有 $1 \in M$, 这与 $M \neq R$ 矛盾. 因此必有 $sat \in M$, 从而得到 $1 \in M$, 此为矛盾. 所以假定

不成立, 有 $r(a) + aR = R$, 因此 a 在 R 中是强正则的. 如果 $1 - a$ 在 R 中是弱正则的, 利用上述方法可以得到 $1 - a$ 在 R 中是强正则的. 综上, R 是几乎强正则环.

3 更多的例子

命题 3.1 几乎弱正则环 (几乎 π -正则环, 几乎强 π -正则环) 的同态像还是几乎弱正则环 (几乎 π -正则环, 几乎强 π -正则环).

证 设 R 是几乎弱正则环, $\sigma: R \rightarrow R'$ 是一个环同态. 对任意 $a \in R$, 有 a 或 $1 - a$ 是弱正则的. 如果 a 是弱正则的, 则存在 $r', r'' \in R$ 使得 $a = ar'ar''$. 于是有 $\sigma(a) = \sigma(ar'ar'') = \sigma(a)\sigma(r')\sigma(a)\sigma(r'')$, 所以 $\sigma(a)$ 是 R' 中弱正则元. 同理可证, 如果 $1 - a$ 是 R 中弱正则元, 则 $1 - \sigma(a)$ 是 R' 中弱正则元. 因此 R' 也是几乎弱正则环. 对于几乎 π -正则环与几乎强 π -正则环的情况, 类似可证.

定理 3.2 (1) 一族环的直积 $\prod\{R_\alpha: \alpha \in I\}$ 是几乎弱正则环当且仅当存在 $\alpha_0 \in I$ 使得 R_{α_0} 是几乎弱正则环, 其余 $\alpha \in I - \alpha_0, R_\alpha$ 均为弱正则环.

(2) 一族环的直积 $\prod\{R_\alpha: \alpha \in I\}$ 是几乎 π -正则环当且仅当存在 $\alpha_0 \in I$ 使得 R_{α_0} 是几乎 π -正则环, 其余 $\alpha \in I - \alpha_0, R_\alpha$ 均为 π -正则环.

(3) 一族环的直积 $\prod\{R_\alpha: \alpha \in I\}$ 是几乎强 π -正则环当且仅当存在 $\alpha_0 \in I$ 使得 R_{α_0} 是几乎强 π -正则环, 其余 $\alpha \in I - \alpha_0, R_\alpha$ 均为强 π -正则环.

证 (1) 充分性. 显然成立.

必要性. 假定 $\prod\{R_\alpha: \alpha \in I\}$ 是几乎弱正则环. 因为 R_α 是 $\prod R_\alpha$ 的同态像, 由命题 2.1 知每个 R_α 都是几乎弱正则环. 任取一 $\alpha_0 \in I$, 记 $\prod\{R_\alpha: \alpha \in I\} = R_{\alpha_0} \times S$, 其中 $S = \prod\{R_\alpha: \alpha \in I - \alpha_0\}$. 如果 R_{α_0} 与 S 都不是弱正则环, 则存在非弱正则元 $r \in R_{\alpha_0}, s \in S$. 取 $a = (r, I_S - s)$, 则在 $\prod\{R_\alpha: \alpha \in I\}$ 中, a 或 $1 - a$ 都不是弱正则的, 得到矛盾. 因此, R_{α_0} 或 S 必有之一是弱正则的. 如果 S 是弱正则的, 则定理得证. 如果 S 是几乎弱正则环, 则重复以上讨论, 可得结论.

(2) 和 (3) 的证明与 (1) 类似.

推论 3.3 如果 $R = S \times T$ 是几乎弱正则环 (几乎 π -正则环, 几乎强 π -正则环), 则 S 和 T 一个是几乎弱正则环 (几乎 π -正则环, 几乎强 π -正则环), 另一个是弱正则环 (π -正则环, 强 π -正则环).

两个几乎弱正则环的直积未必是几乎弱正则环. 由例 2.2, $\mathbb{Z}_4$ 是几乎弱正则环, 但 $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ 不是几乎弱正则环. 这是因为, 取 $a = (\bar{2}, \bar{3}), 1 - a = (\bar{3}, \bar{2})$, 则在 $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ 中, a 或者 $1 - a$ 都不是弱正则的.

设 D 是环 C 的一个子环, 且 $1_c \in D$, 则

$$R[C, D] = \{(a_1, a_2, \dots, a_n, b, b, \dots) | a_i \in C, b \in D, n \geq 1\}$$

在普通的加法和乘法定义下构成一个环.

定理 3.4 下面两个命题等价:

(1) $R[C, D]$ 是几乎弱正则环 (几乎 π -正则环, 几乎强 π -正则环);

(2) C 是弱正则环 (π -正则环, 强 π -正则环) 且 D 是几乎弱正则环 (几乎 π -正则环, 几乎强 π -正则环).

证 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 $\varphi: R[C, D] \rightarrow D$, $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n, b, b, \dots) = b$. 易见 φ 是一个环同态. 由命题 3.1 知 D 是几乎弱正则环. 假定 C 不是弱正则环, 则存在 $x \in C$ 不是弱正则元. 取 $a = (x, 1-x, 1, 1, \dots) \in R[C, D]$, 有 $1-a = (1-x, x, 0, 0, \dots)$. 由于 $R[C, D]$ 是几乎弱正则环, 则 a 或 $1-a$ 在 $R[C, D]$ 中是弱正则的. 如果 a 是弱正则的, 则 $x \in C$ 是弱正则的, 矛盾. 若 $1-a$ 是弱正则的, 则也有 $x \in C$ 是弱正则的, 矛盾. 所以假设不成立, C 是弱正则环.

(2) $\Rightarrow$ (1). 对任意 $(a_1, a_2, \dots, a_n, b, b, \dots) \in R[C, D]$, 其中 $a_i \in C$, $b \in D$. 因为 C 是弱正则环, 所以存在 $x'_i, x''_i \in C$ 使 $a_i = a_i x'_i a_i x''_i$. 因为 D 是几乎弱正则环, 则 b 或 $1-b$ 是 D 中弱正则元. 如果 b 是弱正则元, 则存在 $y', y'' \in D$ 使得 $b = by'by''$. 因此有

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots, a_n, b, b, \dots) &= (a_1, a_2, \dots, a_n, b, b, \dots)(x'_1, x'_2, \dots, x'_n, y', y', \dots) \\ &\quad (a_1, a_2, \dots, a_n, b, b, \dots)(x''_1, x''_2, \dots, x''_n, y'', y'', \dots), \end{aligned}$$

这表明 $(a_1, a_2, \dots, a_n, b, b, \dots)$ 是 $R[C, D]$ 中弱正则元. 如果 $1-b$ 是 D 中弱正则元. 同理可证 $1-(a_1, a_2, \dots, a_n, b, b, \dots)$ 是 $R[C, D]$ 中弱正则元. 综上知 $R[C, D]$ 是一个几乎弱正则环.

对于几乎 π -正则环和几乎强 π -正则环的情况, 类似可以证明.

设 R 是一个环, ${}_R V_R$ 是一个双模, 且 V 是一个一般环 (未必有 1). 称环 $I(R; V) = R \oplus V$ 是环 R 关于 V 的理想扩张, 其中加法是通常的加法, 乘法运算定义为 $(r, v)(s, w) = (rs, rw + vs + vw)$.

命题 3.5 如果环 R 关于 V 的理想扩张 $S = I(R; V)$ 是几乎弱正则环 (几乎 π -正则环, 几乎强 π -正则环), 则 R 是几乎弱正则环 (几乎 π -正则环, 几乎强 π -正则环).

证 因为 $S = I(R; V)$ 是几乎弱正则环, 所以对任意 $(r, v) \in I(R; V)$, (r, v) 或 $(1, 0) - (r, v)$ 是弱正则的. 若 (r, v) 是弱正则元, 则存在 $(x', y'), (x'', y'') \in I(R; V)$ 使得 $(r, v) = (r, v)(x', y')(r, v)(x'', y'')$. 这推出 $r = rx'rx''$, r 在 R 中是弱正则的. 若 $(1, 0) - (r, v)$ 是弱正则的, 则存在 $(x', y'), (x'', y'') \in I(R; V)$ 使得 $(1-r, -v) = (1-r, -v)(x', y')(1-r, -v)(x'', y'')$, 于是有 $1-r = (1-r)x'(1-r)x''$. 所以 $1-r$ 在 R 中是弱正则的. 综上知 R 是几乎弱正则环.

命题 3.5 的逆命题不成立. 例如, 环 $R = \mathbb{Z}_4$ 是几乎弱正则环, 取 $V = \mathbb{Z}_4$, 则 $S = I(\mathbb{Z}_4; \mathbb{Z}_4)$ 不是几乎弱正则环. 这是因为在 $I(\mathbb{Z}_4; \mathbb{Z}_4)$ 中, $(\bar{2}, \bar{1})$ 不是弱正则的, $(\bar{1}, \bar{0}) - (\bar{2}, \bar{1})$ 也不是弱正则的. 假设 $(\bar{2}, \bar{1})$ 是弱正则的, 则存在 $(x', y'), (x'', y'') \in I(\mathbb{Z}_4; \mathbb{Z}_4)$ 使得 $(\bar{2}, \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{1})(x', y')(\bar{2}, \bar{1})(x'', y'')$, 于是有 $\bar{2} = \bar{2}x'\bar{2}x''$, 这不可能. 所以假设不成立. 另一方面, 对于 $(\bar{1}, \bar{0}) - (\bar{2}, \bar{1}) = (\bar{3}, \bar{3})$, 假设存在 $(x, y), (m, n) \in I(\mathbb{Z}_4; \mathbb{Z}_4)$ 使得 $(\bar{3}, \bar{3}) = (\bar{3}, \bar{3})(x, y)(\bar{3}, \bar{3})(m, n)$. 则有 $(\bar{3}, \bar{3}) = (\bar{3}\bar{x}, \bar{3}\bar{y} + \bar{3}\bar{x} + \bar{3}\bar{y})(\bar{3}, \bar{3})(m, n) = (9\bar{x}, 2\bar{7}\bar{x} + 3\bar{6}\bar{y})(m, n) = (\bar{x}, \bar{3}\bar{x})(m, n) = (\bar{x}\bar{m}, \bar{4}\bar{x}\bar{n} + \bar{3}\bar{x}\bar{m})$, 要满足等式成立, 则需取 $\bar{x}\bar{m} = \bar{3}$, 此时 $\bar{3}\bar{x}\bar{m} = \bar{1} \neq \bar{3}$ 矛盾. 因此 $(\bar{1}, \bar{0}) - (\bar{2}, \bar{1})$ 也不是弱正则的. 所以 $S = I(\mathbb{Z}_4; \mathbb{Z}_4)$ 不是几乎弱正则环. 几乎 π -正则环, 几乎强 π -正则环的情况类似可以证明.

命题 3.6 (1) 如果 R 是弱正则环, S 是局部环, 设 ${}_R M_S$ 是一个双模, 则 $\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ 是几乎弱正则环.

(2) 如果 R 是 π -正则环 (强 π -正则环), S 是局部环, 则 $\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ 是 π -正则环 (强 π -正则环).

证 (1) R 是弱正则环, 对任意 $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$, 其中 s 或者 $1-s$ 在 S 中可逆. 如果 s 是可逆元, 因为 R 是弱正则环, 对任意 $r \in R$, 都存在 $a', a'' \in R$ 使得 $r = ra'ra''$, 则有

$$\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -a'ms^{-1} \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

这表明 $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix}$ 是弱正则的. 如果 $1-s$ 是可逆元, 因为 $1-r \in R$ 是弱正则的, 类似可证 $I_2 - \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix}$ 也是弱正则的. 因此 $\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ 是几乎弱正则环.

(2) R 是 π -正则环, 对任意 $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$, 其中 s 或者 $1-s$ 在 S 中可逆. 如果 s 是可逆元, 由 R 是 π -正则环知对任意 $r \in R$, 都存在 $x \in R$ 使得 $r^n = r^n x r^n$, 于是有

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & (s^{-1})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}^n.$$

这表明 $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$ 是 π -正则的. 如果 $1-s$ 是可逆元, 因为 $1-r \in R$ 是 π -正则的, 类似可证 $I_2 - \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$ 也是 π -正则的. 因此 $\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ 是几乎 π -正则环.

R 是强 π -正则环的情况类似可证.

命题 3.7 几乎弱正则环 (几乎 π -正则环, 几乎强 π -正则环) 的直极限仍是几乎弱正则环 (几乎 π -正则环, 几乎强 π -正则环).

证 设 $\{R_\alpha, \varphi_{\alpha\beta} | \alpha, \beta \in I\}$ 是几乎弱正则环上的直系统, R 为 R_α 的直极限, $\eta_\alpha: R_\alpha \rightarrow R, \alpha \in I$ 是环单同态, $R = \bigcup_{\alpha \in I} \text{Im}(\eta_\alpha)$, 其中 $\text{Im}(\eta_\alpha)$ 表示单同态 η_α 的像. 下证 R 是几乎弱正则的. 任取 $r \in R$, 存在 $\alpha \in I$, 使得 $r \in \text{Im}(\eta_\alpha)$, 即存在 $r_\alpha \in R_\alpha$, 使得 $\eta_\alpha(r_\alpha) = r$, 同时有 $\eta_\alpha(1_{R_\alpha} - r_\alpha) = 1_R - r$. 由于 R_α 是几乎弱正则环, 所以 r_α 或 $1_{R_\alpha} - r_\alpha$ 弱正则. 如果 r_α 是弱正则的, 则存在 $x'_\alpha, x''_\alpha \in R_\alpha$ 使得 $r_\alpha = r_\alpha x'_\alpha r_\alpha x''_\alpha$, 从而有 $r = \eta_\alpha(r_\alpha x'_\alpha r_\alpha x''_\alpha) = r \eta_\alpha(x'_\alpha) r \eta_\alpha(x''_\alpha)$, 其中 $\eta_\alpha(x'_\alpha), \eta_\alpha(x''_\alpha) \in R$, 即 r 在 R 中是弱正则的. 同理, 如果 $1_{R_\alpha} - r_\alpha$ 是弱正则的, 可以得到 $1_R - r$ 在 R 中是弱正则的. 综上知 R 是几乎弱正则环.

几乎 π -正则环, 几乎强 π -正则环的情况类似可以证明.

参 考 文 献

- [1] Contessa M. On certain classes of pe-rings[J]. Comm. Alg., 1984, 12(12): 1447-1469.
- [2] Grover H K, Khurana D. Some characterizations of VNL rings[J]. Comm. Alg., 2009, 37(9): 3288-3305.
- [3] Chen W, Tong W. On noncommutative VNL-rings and GVNL-rings[J]. Glasgow Math. J., 2006, 48(1): 11-17.

- [4] Chen J, Ying Z. On VNL-rings and n -VNL-rings[J]. Inter. Elec. J. Alg., 2008, 4: 1–8.
- [5] Cui S Y, Chen W X. Notes on Noncommutative VNL-rings and GVNL-rings[J]. Northeast Math. J., 2007, 23(4): 344–350.
- [6] Chen H. On almost unit-regular rings[J]. Comm. Alg., 2012, 40(9): 3494–3506.
- [7] 廖芳芳. 半正则环和强 π -正则环的推广 [D]. 南京: 东南大学, 2006.
- [8] Tuganbaev A A. Semiregular, weakly regular, and π -regular rings[J]. J. Math. Sci., 2002, 109(3): 1509–1588.
- [9] Ramamurthi V S. Weakly regular rings[J]. Canad. Math. Bull., 1973, 16(3): 317–321.
- [10] Ying Z L. Some characterizations of GVNL rings[J]. J. Nanjing Univ. Posts Telecom. (Natural), 2011, 31(5): 121–123.
- [11] 萧宇飞. 关于弱正则环的一些结果 [J]. 数学年刊: A 辑, 1990, 11(1): 64–68.
- [12] Subedi T, Buhphang A M. On weakly regular rings and generalizations of V-rings[J]. Inter. Elec. J. Alg., 2011, 10: 162–173.
- [13] Camillo V, Xiao Y. Weakly regular rings[J]. Comm. Alg., 1994, 22(10): 4095–4112.

SOME RINGS SIMILAR TO THE VNL RINGS

WANG Yao¹, YANG Zhen¹, REN Yan-li²

(1.School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology,
Nanjing 210044, China)

(2.School of Information Engineering, Nanjing Xiaozhuang University, Nanjing 211171, China)

Abstract: In this paper, we investigate the properties of rings similar to the VNL rings. A ring R is said to be a almost weakly regular ring (almost π -regular ring, almost strongly π -regular ring), provided that for any $a \in R$, either a or $1-a$ is weakly regular (π -regular, strongly π -regular). We discuss extensions of these new rings and give the relationship between relevant rings, which extend the study of local rings and VNL rings.

Keywords: almost weakly regular ring; almost π -regular ring; almost strongly π -regular ring; ring extension

2010 MR Subject Classification: 16E50; 16S50