

## 基于媒体报道下的一类 SIRS 传染病模型研究

张 林<sup>1</sup>, 李存林<sup>2</sup>, 郭文娟<sup>1</sup>

(1. 北方民族大学数学与信息科学学院, 宁夏 银川 750021)

(2. 北方民族大学管理学院, 宁夏 银川 750021)

**摘要:** 本文主要研究了基于媒体报道下的一类 SIRS 传染病模型的持久与灭绝问题. 利用一个控制疾病持久与灭绝的临界值  $\mathcal{R}_0$ , 求得了该模型存在两个平衡点: 无病平衡点和地方病平衡点. 结果表明当  $\mathcal{R}_0 \leq 1$  时, 无病平衡点呈全局渐进稳定, 这表示疾病是灭绝的; 而当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时, 地方病平衡点呈全局渐进稳定, 这说明疾病是持久的. 最后通过数值分析验证了该结论.

**关键词:** SIRS 模型; 媒体报道; 基本再生数; 全局渐进稳定性

MR(2010) 主题分类号: 34D20; 34D23

中图分类号: O175.13

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2018)05-0887-09

### 1 引言

随着社会经济的快速发展, 传染病和流行病给人们的生活、社会发展等带来了很大的危害. 越来越引起了许多生物数学和疾病预防等工作者的重视, 并取得了一些研究成果<sup>[1-5]</sup>. 考虑如下经典的 SIRS 传染病模型<sup>[6]</sup>:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \mu S - \frac{\beta SI}{1 + \alpha I^2} + \gamma R, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1 + \alpha I^2} - (\mu + \nu + \delta)I, \\ \frac{dR}{dt} = \nu I - (\mu + \gamma)R, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中符号皆为正的常数, 意义表示如表 1.

表 1: 符号及其含义

| 符号        | 含义             | 符号       | 含义       |
|-----------|----------------|----------|----------|
| $t$       | 时间             | $\mu$    | 人口的自然死亡率 |
| $S(t)$    | $t$ 时刻易感者的人口数量 | $\delta$ | 疾病的致死率   |
| $I(t)$    | $t$ 时刻感染者的人口数量 | $\beta$  | 传染率      |
| $R(t)$    | $t$ 时刻恢复着的人口数量 | $\nu$    | 感染者的恢复率  |
| $\Lambda$ | 易感者的补充率        | $\gamma$ | 免疫的失去率   |

\*收稿日期: 2017-09-16

接收日期: 2017-11-29

基金项目: 国家自然科学基金资助 (71561001); 北方民族大学研究生创新项目资助 (YCX1779).

作者简介: 张林 (1991-), 男, 苗族, 贵州遵义, 硕士, 主要研究方向: 不确定理论与方法.

通讯作者: 李存林.

众所周知, 通过媒体报道可以降低人与人之间的接触率, 这在 2003 年的非典 [4, 7, 8] 和 2013 年的 H7N9 [9] 传染病中已经得到了证实. 作为一种新型的传染病 H7N9 于 2013 年首次出现在上海, 它和非典一样, 短时间内在人类迅速传播开. 后来人们通过电视的报道了解到 H7N9 是通过人与人之间的接触传播的, 于是大部分人采取尽量少出门, 少参加一些社会活动来降低人与人之间的接触率, 这确实一定程度上减少了疾病的传播.

然而, 模型 (1.1) 中并没有考虑媒体报道对传染病的影响. 事实上, 由于媒体报道的因素, 传染率  $\beta$  是会减小的 [4]. 因此将传染率  $\beta$  表示为媒体报道的函数, 即  $\beta = \beta_1 - \beta_2 f(I)$ , 那么模型 (1.1) 转换为

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \mu S - (\beta_1 - \beta_2 f(I)) \frac{SI}{1 + \alpha I^2} + \gamma R, \\ \frac{dI}{dt} = (\beta_1 - \beta_2 f(I)) \frac{SI}{1 + \alpha I^2} - (\mu + \nu + \delta) I, \\ \frac{dR}{dt} = \nu I - (\mu + \gamma) R, \end{cases} \quad (1.2)$$

其中  $\beta_1$  是不考虑感染者的一般接触率,  $\beta_2$  是因感染者的存在而减少的最大接触率. 因为每个人与他人的接触不可避免, 故而假设  $\beta_1 > \beta_2$ . 函数  $f(I)$  满足

(H1)  $f(0) = 0$ ,  $f'(I) \geq 0$  且  $\lim_{I \rightarrow \infty} f(I) = 1$ .

模型 (1.2) 是在模型 (1.1) 的基础上考虑了媒体报道对疾病的影响, 并且证明了  $\mathcal{R}_0 = 1$  的情形, 即当  $\mathcal{R}_0 = 1$  时, 无病平衡点  $E_0 = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0)$  仍然是全局渐进稳定的. 本文第二节首先给出了模型 (1.2) 的基本再生数, 并讨论了模型 (1.2) 平衡点的存在性; 第三节在平衡点存在的情况下讨论其无病平衡点和地方病平衡点的全局渐进稳定性, 从而得知疾病的灭绝与持久是由基本再生数控制的. 最后通过数值模拟对得出的结果进行了验证.

## 2 基本再生数和平衡点的存在性

首先给出模型 (1.2) 的一个控制疾病持久与灭绝的临界值 [10]—基本再生数 [11]

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\Lambda \beta_1}{\mu(\mu + \nu + \delta)}. \quad (2.1)$$

设  $N_t = S_t + I_t + R_t$ , 将模型 (1.2) 中的三个方程相加可得

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \Lambda - \mu(S + R + I) - \delta I = \Lambda - \mu N - \delta I, \\ \Lambda - (\mu + \delta)N &\leq \frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N - \delta I \leq \Lambda - \mu N, \end{aligned}$$

两边同时对  $t$  积分

$$\frac{\Lambda}{\mu + \delta} + \left( N(0) - \frac{\Lambda}{\mu + \delta} \right) e^{-(\mu + \delta)t} \leq N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} + \left( N(0) - \frac{\Lambda}{\mu} \right) e^{-\mu t}.$$

因此

$$\frac{\Lambda}{\mu + \delta} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}.$$

根据上述推理现在定义一个有界集  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \left\{ (S, I, R) \in \mathbb{X} : \frac{\Lambda}{\mu + \delta} < S + I + R \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\} \subset \mathbb{X}, \quad (2.2)$$

其中  $\mathbb{X} \equiv \mathbb{R}_+^3 = \{(S, I, R) : S > 0, I \geq 0, R \geq 0\}$  为模型 (1.2) 的状态空间. 通过计算, 很容易得到模型 (1.2) 的无病平衡点  $E_0 = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0)$  是恒存在的.

下面继续讨论地方病平衡点  $E^* = (S^*, I^*, R^*)$  的存在性. 设  $E^* = (S^*, I^*, R^*)$  是下列方程组的一个解

$$\begin{cases} \Lambda - \mu S^* - (\beta_1 - \beta_2 f(I^*)) \frac{S^* I^*}{1 + \alpha I^{*2}} + \gamma R^* = 0, \\ (\beta_1 - \beta_2 f(I^*)) \frac{S^* I^*}{1 + \alpha I^{*2}} - (\mu + \nu + \delta) I^* = 0, \\ \nu I^* - (\mu + \gamma) R^* = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

对方程组 (2.3) 求解可得

$$S^* = \frac{(\mu + \nu + \delta)(1 + \alpha I^{*2})}{\beta_1 - \beta_2 f(I^*)}, \quad R^* = \frac{\nu}{\mu + \gamma} I^*,$$

且

$$\Lambda - \frac{\mu(\mu + \nu + \delta)(1 + \alpha I^{*2})}{\beta_1 - \beta_2 f(I^*)} - (\mu + \nu + \delta) I^* + \frac{\gamma \nu}{\mu + \gamma} I^* = 0.$$

令

$$F(I) := \Lambda - \frac{\mu(\mu + \nu + \delta)(1 + \alpha I^2)}{\beta_1 - \beta_2 f(I)} - ((\mu + \nu + \delta) - \frac{\gamma \nu}{\mu + \gamma}) I,$$

根据假设 (H1) 可知  $F(I)$  是一个减函数, 因此

$$F(0) = \Lambda - \frac{\mu(\mu + \nu + \delta)}{\beta_1} = \frac{1}{\beta_1} \mu(\mu + \nu + \delta)(R_0 - 1).$$

若  $R_0 > 1$ ,  $F(I) = 0$  存在一个正解  $I^*$ , 则模型 (1.2) 存在唯一的地方病平衡点  $E^* = (S^*, I^*, R^*)$ , 其中

$$S^* = \frac{(\mu + \nu + \delta)(1 + \alpha I^{*2})}{\beta_1 - \beta_2 f(I^*)}, \quad R^* = \frac{\nu}{\mu + \gamma} I^*.$$

### 3 平衡点的全局渐进稳定性

下面讨论模型 (1.2) 的无病平衡点  $E_0$  和地方病平衡点  $E^*$  的全局渐进稳定性.

**定理 3.1** 若  $R_0 \leq 1$ , 则模型 (1.2) 的无病平衡点  $E_0 = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0)$  是全局渐进稳定的.

**证** 定义一个 Lyapunov 函数

$$V(S, I, R) = \frac{1}{2} \left( S - \frac{\Lambda}{\mu} \right)^2 + \theta_1 I + \theta_2 R,$$

其中  $\theta_1 = \frac{\Lambda}{\mu}$ ,

$$\theta_2 = \begin{cases} \frac{\mu^2 \theta_1 (\mu + \nu + \delta)(1 - R_0)}{\nu(\mu^2 + \alpha \Lambda^2)} - \epsilon, & \text{如果 } R_0 < 1, \\ 0, & \text{如果 } R_0 = 1, \end{cases} \quad (3.1)$$

$\epsilon$  足够小. 则有

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (S - \frac{\Lambda}{\mu})(\Lambda - \mu S - (\beta_1 - \beta_2 f(I))\frac{SI}{1 + \alpha I^2} + \gamma R) \\ &\quad + \theta_1((\beta_1 - \beta_2 f(I))\frac{SI}{1 + \alpha I^2} - (\mu + \nu + \delta)I) + \theta_2(\nu I - (\mu + \gamma)R) \\ &= -\mu(S - \frac{\Lambda}{\mu})^2 - (S - \frac{\Lambda}{\mu})(\beta_1 - \beta_2 f(I))\frac{SI}{1 + \alpha I^2} + \gamma(S - \frac{\Lambda}{\mu})R \\ &\quad + \theta_1((\beta_1 - \beta_2 f(I))\frac{SI}{1 + \alpha I^2} - (\mu + \nu + \delta)I) + \theta_2(\nu I - (\mu + \gamma)R). \end{aligned}$$

令

$$(\beta_1 - \beta_2 f(I))\frac{SI}{1 + \alpha I^2} = (\beta_1 - \beta_2 f(I))(S - \frac{\Lambda}{\mu})\frac{I}{1 + \alpha I^2} + \frac{\Lambda}{\mu}(\beta_1 - \beta_2 f(I))\frac{I}{1 + \alpha I^2},$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\leq -\mu(S - \frac{\Lambda}{\mu})^2 - (S - \frac{\Lambda}{\mu})^2(\beta_1 - \beta_2 f(I))\frac{I}{1 + \alpha I^2} \\ &\quad + \frac{\theta_1 \Lambda(\beta_1 - \beta_2 f(I)) - \mu(1 + \alpha I^2)(\theta_1(\mu + \nu + \delta) - \theta_2 \nu)}{\mu(1 + \alpha I^2)} I - \theta_2(\mu + \gamma)R. \end{aligned} \quad (3.2)$$

分析  $\theta_1 \Lambda(\beta_1 - \beta_2 f(I)) - \mu(1 + \alpha I^2)(\theta_1(\mu + \nu + \delta) - \theta_2 \nu)$ , 有

$$\begin{aligned} &\theta_1 \Lambda(\beta_1 - \beta_2 f(I)) - \mu(1 + \alpha I^2)(\theta_1(\mu + \nu + \delta) - \theta_2 \nu) \\ &= \theta_1[\Lambda\beta_1 - \mu(1 + \alpha I^2)(\mu + \nu + \delta)] - \theta_1 \Lambda\beta_2 f(I) + \theta_2 \mu(1 + \alpha I^2)\nu \\ &\leq \theta_1[\Lambda\beta_1 - \mu(\mu + \nu + \delta)] + \theta_2 \mu(1 + \alpha I^2)\nu. \end{aligned}$$

将上面的不等式代入 (3.2) 式, 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\leq -\left(\mu + (\beta_1 - \beta_2 f(I))\frac{I}{1 + \alpha I^2}\right)\left(S - \frac{\Lambda}{\mu}\right)^2 \\ &\quad - \frac{\theta_1 \mu^2(\mu + \nu + \delta)(R_0 - 1)}{\mu^2 + \alpha \Lambda^2} I + \theta_2 \nu I - \theta_2(\mu + \gamma)R. \end{aligned} \quad (3.3)$$

(1) 当  $\mathcal{R}_0 < 1$  时,

$$\frac{dV}{dt} \leq -\left(\mu + (\beta_1 - \beta_2 f(I))\frac{I}{1 + \alpha I^2}\right)\left(S - \frac{\Lambda}{\mu}\right)^2 - \nu \epsilon I - \theta_2(\mu + \gamma)R. \quad (3.4)$$

因为  $S, I, R$  非负, 则 (3.4) 式的右边非正, 即  $\frac{dV}{dt} \leq 0$ ;  $\frac{dV}{dt} = 0$  当且仅当  $(S, I, R) = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0)$ .

(2) 当  $\mathcal{R}_0 = 1$  时,  $\theta_2 = 0$ , 从 (3.3) 式可以得到

$$\frac{dV}{dt} \leq -\left(\mu + (\beta_1 - \beta_2 f(I))\frac{I}{1 + \alpha I^2}\right)\left(S - \frac{\Lambda}{\mu}\right)^2, \quad (3.5)$$

$\frac{dV}{dt} = 0$  当且仅当  $S = \frac{\Lambda}{\mu}$ . 根据 LaSalle 不变原理, 模型 (1.2) 的任意解都收敛到  $B$ , 其中  $B \subset \{(S, I, R) : S = \frac{\Lambda}{\mu}, I = 0, R = 0\}$  是模型 (1.2) 的最大不变子集, 即  $B = \{E_0\}$  是一个单点集. 因此, 当  $R_0 \leq 1$  时, 在有界集  $\Gamma$  中,  $E_0$  是全局渐进稳定的. 证毕.

**定理 3.2** 当  $R_0 > 1$  时, 模型 (1.2) 存在唯一的地方病平衡点  $E^* = (S^*, I^*, R^*)$  是全局渐进稳定的, 且  $E_0$  是不稳定的.

**证** 将  $E^*$  代入模型 (1.2) 的 Jacobian 矩阵

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -\mu - \frac{(\beta_1 - \beta_2 f(I^*))I^*}{1 + \alpha I^{*2}} & \frac{\beta_2 f'(I^*)(\mu + \nu + \delta)I^*}{\beta_1 - \beta_2 f(I^*)} + \frac{2\alpha(\mu + \nu + \delta)I^{*2}}{1 + \alpha I^{*2}} - (\mu + \nu + \delta) & \gamma \\ \frac{(\beta_1 - \beta_2 f(I^*))I^*}{1 + \alpha I^{*2}} & -\frac{\beta_2 f'(I^*)(\mu + \nu + \delta)I^*}{\beta_1 - \beta_2 f(I^*)} - \frac{2\alpha(\mu + \nu + \delta)I^{*2}}{1 + \alpha I^{*2}} & 0 \\ 0 & \nu & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix},$$

$J(E^*)$  的特征多项式为

$$\lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 = 0.$$

为了计算  $b_1, b_2, b_3$  的值, 令

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} A & B & \gamma \\ C & D & 0 \\ 0 & \nu & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} A &= -\mu - C, \\ B &= -D - (\mu + \nu + \delta), \\ C &= \frac{(\beta_1 - \beta_2 f(I^*))I^*}{1 + \alpha I^{*2}} > 0, \\ D &= -\frac{\beta_2 f'(I^*)(\mu + \nu + \delta)I^*}{\beta_1 - \beta_2 f(I^*)} - \frac{2\alpha(\mu + \nu + \delta)I^{*2}}{1 + \alpha I^{*2}} < 0. \end{aligned}$$

进一步计算可得

$$\begin{aligned} b_1 &= 2\mu + \gamma + C - D > 0, \\ b_2 &= (-2\mu - \gamma)D + (2\mu + \nu + \delta + \gamma)C + \mu^2 + \mu\gamma > 0, \\ b_3 &= -(\mu^2 + \mu\gamma)D + (\mu^2 + \mu\gamma + (\mu + \gamma)\delta + \mu\nu)C > 0. \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} b_1 b_2 - b_3 &= (2\mu + \gamma)D^2 + (2\mu + \nu + \delta + \gamma)C^2 - (4\mu + 2\gamma + \nu + \delta)DC \\ &\quad + (\mu(\nu + \delta + \gamma + 4) + \gamma(3\mu + \nu + \gamma))C - (2\mu + \gamma)^2 D + (2\mu + \gamma)(\mu^2 + \mu\gamma) > 0, \end{aligned}$$

由于  $b_1 > 0, b_2 > 0$  且  $b_3 > 0$ , 则  $J(E^*)$  的三个特征值的实部都非负, 由 Routh-Hurwitz 准则可知,  $E^*$  是局部渐进稳定的.

令  $N_t = S_t + I_t + R_t$ , 把 (1.2) 式中的三个方程相加得  $\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N - \delta I$ . 则方程 (1.2) 变为

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N - \delta I, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{(\beta_1 - \beta_2 f(I))I}{1 + \alpha I^2} (N - I - R) - (\mu + \nu + \delta)I, \\ \frac{dR}{dt} = \nu I - (\mu + \gamma)R, \end{cases} \quad (3.6)$$

且  $N^* = S^* + I^* + R^*$ . 接下来继续证明模型 (1.2) 的地方病平衡点  $E^*$  是全局渐进稳定的, 则只需要证明模型 (3.6) 的解  $(N^*, I^*, R^*)$  是全局渐进稳定的. 考虑下面的 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}(N - N^*)^2 + k_1(I - I^* - I^* \log \frac{I}{I^*}) + \frac{1}{2}k_2(R - R^*)^2,$$

其中  $k_1$  和  $k_2$  是正常数.  $V$  的倒数为

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (N - N^*) \frac{dN}{dt} + k_1 \frac{I - I^*}{I} \frac{dI}{dt} + k_2 (R - R^*) \frac{dR}{dt} \\ &= (N - N^*)(\Lambda - \mu N - \delta I) + \frac{k_1(I - I^*)}{1 + \alpha I^2} (\beta_1 - \beta_2 f(I))(N - I - R) \\ &\quad - k_1(I - I^*)(\mu + \nu + \delta) + k_2(R - R^*)(\nu I - (\mu + \gamma)R). \end{aligned}$$

因为  $\Lambda = \mu N^* + \delta I^*$ ,  $\mu + \nu + \delta = \frac{\beta_1 - \beta_2 f(I^*)}{1 + \alpha I^{*2}}(N^* - I^* - R^*)$  且  $\nu I^* = (\mu + \gamma)R^*$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\leq -\mu(N - N^*)^2 - \frac{k_1(\beta_1 - \beta_2 f(I^*))}{1 + \alpha I^{*2}}(I - I^*)^2 - k_2(\mu + \gamma)(R - R^*)^2 \\ &\quad + k_1(N - I - R)(I - I^*) \left( \frac{\beta_1 - \beta_2 f(I)}{1 + \alpha I^2} - \frac{\beta_1 - \beta_2 f(I^*)}{1 + \alpha I^{*2}} \right) \\ &\quad + \left( \frac{k_1(\beta_1 - \beta_2 f(I^*))}{1 + \alpha I^{*2}} - \delta \right) (N - N^*)(I - I^*) \\ &\quad + \left( k_2\nu - \frac{k_1(\beta_1 - \beta_2 f(I^*))}{1 + \alpha I^{*2}} \right) (I - I^*)(R - R^*). \end{aligned}$$

又  $f(I)$  是增函数, 选取  $k_1 = \frac{\delta(1 + \alpha I^{*2})}{\beta_1 - \beta_2 f(I^*)}$  和  $k_2 = \frac{\delta}{\nu}$ , 可以得到

$$\frac{dV}{dt} \leq -\mu(N - N^*)^2 - \delta(I - I^*)^2 - \frac{\delta}{\nu}(\mu + \gamma)(R - R^*)^2.$$

根据 LaSalle 渐进稳定定理<sup>[12, 13]</sup>, 可知模型 (1.2) 的地方病平衡点  $E^*$  是全局渐进稳定的, 又

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} & \gamma \\ 0 & \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} - (\mu + \nu + \delta) & 0 \\ 0 & \nu & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix},$$

它的特征值  $-\mu < 0, \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} - (\mu + \nu + \delta) = (\mu + \nu + \delta)(R_0 - 1) > 0$  ( $R_0 > 1$ ),  $-(\mu + \gamma) < 0$ . 因此当  $R_0 > 1$  时, 无病平衡点  $E_0$  是不稳定的. 证毕.

#### 4 数值分析

下面给出例子对以上结论进行验证. 选取一个满足条件 (H1) 的函数  $f(I) = \frac{I}{m+I}$ , 模型 (1.2) 可化为

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \mu S - \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{m+I}\right) \frac{SI}{1 + \alpha I^2} + \gamma R, \\ \frac{dI}{dt} = \left(\beta_1 - \frac{\beta_2 I}{m+I}\right) \frac{SI}{1 + \alpha I^2} - (\mu + \nu + \delta)I, \\ \frac{dR}{dt} = \nu I - (\mu + \gamma)R. \end{cases} \quad (4.1)$$

则模型 (4.1) 有一个无病平衡点  $E_0 = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0)$  和一个地方病平衡点  $E^* = (S^*, I^*, R^*)$  ( $R_0 > 1$ ), 其中

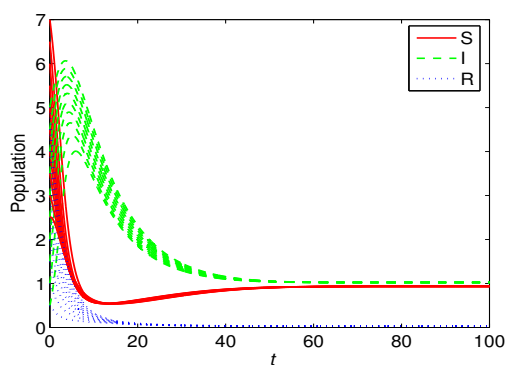
$$S^* = \frac{(\mu + \nu + \delta)(1 + \alpha I^{*2})(m + I^*)}{\beta_1(m + I^*) - \beta_2 I^*}, \quad R^* = \frac{\nu}{\mu + \gamma} I^*. \quad (4.2)$$

下面对 (4.2) 式中的参数赋值计算如下表 2.

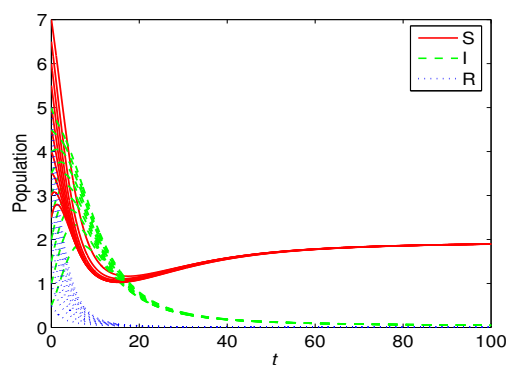
表 2: 各参数取值计算

| $\Lambda$ | $\mu$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\nu$ | $\delta$ | $\gamma$ | $\alpha$ | $m$ | $R_0$      | $E_0$          | $E^* = (S^*, I^*, R^*)$  |
|-----------|-------|-----------|-----------|-------|----------|----------|----------|-----|------------|----------------|--------------------------|
| 0.2       | 0.08  | 0.15      | 0.1       | 0.01  | 0.04     | 0.25     | 0.01     | 10  | 2.8846(>1) | (2.5000, 0, 0) | (0.9335, 1.0236, 0.0310) |
| 0.2       | 0.10  | 0.10      | 0.1       | 0.01  | 0.09     | 0.25     | 0.01     | 10  | 1.0000     | (2.0000, 0, 0) | 不存在                      |
| 0.2       | 0.15  | 0.10      | 0.1       | 0.01  | 0.09     | 0.25     | 0.01     | 10  | 0.5333(<1) | (1.3333, 0, 0) | 不存在                      |

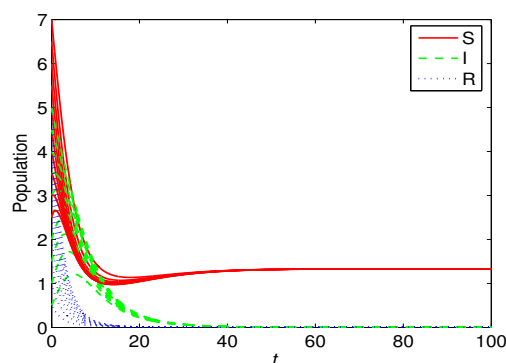
通过 MATLAB 软件运算作图如图 1.



(a):  $R_0 = 2.8846$



(b):  $R_0 = 1.0000$

(c):  $\mathcal{R}_0 = 0.5333$ 图 1: 对于三组不同的参数值, 模型 (4.1) 的解  $S(t)$ ,  $I(t)$  和  $R(t)$  的时间序列图

分析上图可知在图 1(a) 中, 因为  $\mathcal{R}_0 > 1$ , 计算得

$$E_0 = (2.5000, 0, 0), \quad E^* = (0.9335, 1.0236, 0.0310).$$

选取不同的初值时,  $S$ ,  $I$ ,  $R$  最后都将趋于唯一的地方病平衡点  $E^*$ , 这说明疾病是持久的; 在图 1(b) 中, 因为  $\mathcal{R}_0 = 1$ , 计算得  $E_0 = (2.0000, 0, 0)$ , 此时  $E^*$  是不存在的, 通过选取不同的初值,  $S$  最后都将趋于  $\frac{\Lambda}{\mu} = 2.0000$ , 而  $I$  和  $R$  逐渐趋于 0, 即疾病灭绝; 在图 1(c) 中, 因为  $\mathcal{R}_0 = 0.5333 < 1$ , 计算得  $E_0 = (1.3333, 0, 0)$ , 此时,  $E^*$  也是不存在的, 且选取不同的初值,  $S$  最后都将趋于  $\frac{\Lambda}{\mu} = 1.3333$ , 而  $I$  和  $R$  逐渐趋于 0, 即疾病灭绝.

综上所述, 无病平衡点  $E_0 = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0)$  是恒存在的, 当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时, 存在一个地方病平衡点  $E^*$  是全局渐进稳定的, 而当  $\mathcal{R}_0 \leq 1$  时, 疾病灭绝.

## 5 结论

流行病的传播给人们的生活带来了巨大的损失和伤害. 因此, 本文讨论了一类确定性 SIRS 传染病模型的持久与灭绝: 当基本再生数  $\mathcal{R}_0 \leq 1$  时, 疾病是灭绝的; 当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时, 疾病是持久的. 然而在现实生活中, 流行病不可避免地受到随机因素的影响, 所以下一步将要讨论不确定环境下随机扰动对模型 (1.2) 的影响.

## 参 考 文 献

- [1] Cui J, Tao X, Zhu H. An SIS infection model incorporating media coverage[J]. Rocky Mountain J. Math., 2008, 38(5): 1323–1334.
- [2] 傅金波, 陈兰荪. 具有垂直传染和接触传染的传染病模型的稳定性研究 [J]. 数学杂志, 2016, 36(6): 1283–1290.
- [3] 郭文娟, 张启敏. 媒体报道下的一类 SIS 传染病模型的动力学行为研究 [J]. 河南师范大学学报 (自然版), 2017, 45(3): 42–47.
- [4] Liu R, Wu J, Zhu H. Media/psychological impact on multiple outbreaks of emerging infectious diseases[J]. Comput. Math. Meth. Med., 2007, 8(3): 153–164.

- [5] 徐文雄, 张仲华, 成芳. 一类 SIS 流行病传播数学模型全局渐近稳定性 [J]. 四川师范大学学报 (自然科学版), 2004, 27(6): 583–588.
- [6] Brauer F, Castillo-Chavez C. Mathematical models in population biology and epidemics[M]. New York: Springer-Verlag, 2000.
- [7] Wang W, Ruan S. Simulating the SARS outbreak in Beijing with limited data[J]. J. Theor. Biol., 2004, 227: 369–379.
- [8] Webb F, Blaser M J, Zhu H, Ardal S, Wu J. Critical role of nosocomial transmission in the Toronto SARS outbreak[J]. Math. Bios. Engin., 2004, 1: 1–13.
- [9] Li Q, Zhou L, Zhou M, et al. Epidemiology of human infections with avian influenza A(H7N9) virus in China[J]. New Engl. J. Med., 2014, 370(6): 520–532.
- [10] Zhou J, Hethcote H. Population size dependent incidence in models for diseases without immunity[J]. J. Math. Biol., 1994, 32: 809–834.
- [11] Van D D P, Watmough J. Reproduction numbers and subthreshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. Math. Bios., 2002, 180: 29–48.
- [12] LaSalle J P. The stability of dynamical systems[M]. Philadelphia: Soc. Indus. Appl. Math., 1976.
- [13] Lyapunov A M. The general problem of the stability of motion[J]. Inter. J. Contr., 1992, 55(3): 531–534.

## A STUDY OF AN SIRS EPIDEMIC MODEL WITH MEDIA COVERAGE

ZHANG Lin<sup>1</sup>, LI Cun-lin<sup>2</sup>, GUO Wen-juan<sup>1</sup>

(1. School of Mathematics and Computer Science, North Minzu University, Yinchuan 750021, China)

(2. School of Management, North Minzu University, Yinchuan 750021, China)

**Abstract:** This article aims to research the extinction and persistence of an SIRS epidemic model with media coverage. By using the critical value  $\mathcal{R}_0$  to govern the extinction and the persistence of the disease, we obtain that the model exists two equilibria: disease-free equilibrium and unique endemic equilibrium. The results show that if  $\mathcal{R}_0 \leq 1$ , the disease-free equilibrium is globally asymptotically stable which means the disease will die out; if  $\mathcal{R}_0 > 1$ , the endemic equilibrium which is globally asymptotically stable means the persistence of the disease. Finally, the conclusion is verified by numerical analysis.

**Keywords:** SIRS model; media coverage; basic reproduction number; global asymptotic stable

**2010 MR Subject Classification:** 34D20; 34D23