Vol. 38 (2018)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

具有加权测度的 H 型群上漂移 Laplace 算子的 Levitin-Parnovski 型特征值不等式

韩承月, 孙和军, 江绪永
(南京理工大学理学院, 江苏 南京 210014)

摘 要: 本文研究了具有加权测度 $d\mu = e^{-\varphi}dv$ 的 H 型群 G 上漂移 Laplace 算子 $-\Delta_G + \langle \nabla_G\varphi, \nabla_G(\cdot)\rangle$ 的 Dirichlet 特征值问题, 建立了该问题的 Levitin-Parnovski 型特征值不等式, 推广包含了 Ilias 和 Makhoul 对 Heisenberg 群上次 Laplace 算子所获得的结果 (J. Geom. Anal., 2012, 22(1): 206–222).

关键词: H 型群; 特征值; 漂移 Laplace 算子
MR(2010) **主题分类号**: 35P15; 58C40 **中图分类号**: O175.9; O186.1
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2018)05-0861-08

1 引言

Heisenberg 型群是一类 Carnot 群, 简称为 H 型群, 其在满足 Hörmander 条件的向量场理论研究中起着重要作用 [1–3]. 而漂移 Laplace 算子是一类重要的椭圆算子, 也被称为 Witten-Laplace 算子, 在几何分析、概率论等研究中发挥着重要作用 (参见文献 [4–6]).

本文研究具有加权测度的 H 型群 G 上漂移 Laplace 算子的特征值估计问题. 具体来说, 具有加权测度 $d\mu = e^{-\varphi}dv$ 的 $2n+m$ 维 H 型群 G 上漂移 Laplace 算子的形式如下

$$-\Delta_G + \langle \nabla_G\varphi, \nabla_G(\cdot)\rangle,$$

其中 Δ_G 和 ∇_G 分别是 H 型群 G 上的次 Laplace 算子和梯度算子, φ 为光滑函数. 设 Ω 是 H 型群 G 上的一个有界区域. 考虑如下 Dirichlet 特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta_G u + \langle \nabla_G\varphi, \nabla_G u\rangle = \lambda u, & \text{在}\Omega\text{上}, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

由文献 [7–8] 可知, 该算子有离散谱 $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_i \le \cdots \nearrow$, 其中每个特征值按照其重数排列.

问题 (1.1) 包含了几种有趣的特征值问题. 由 H 型群的定义可知: 一方面, 当 $m=1$ 时, H 型群即为 Heisenberg 群. 此时, 问题 (1.1) 变为如下 Heisenberg 群 H^n 上漂移

*收稿日期: 2017-10-16 接收日期:2018-02-23
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11001130); 中央高校基本科研业务费专项基金资助 (30917011335).
作者简介: 韩承月 (1993–), 女, 安徽马鞍山, 硕士, 主要研究方向: 微分几何.
通讯作者: 孙和军.

Laplace 算子的 Dirichlet 特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta_{H^n} u + \langle \nabla_{H^n}\varphi, \nabla_{H^n} u\rangle = \lambda u \quad 在\Omega上, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

另一方面, 当 φ 为常数时, 问题 (1.1) 变为如下 H 型群 G 上的次 Laplace 算子的 Dirichlet 特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta_G u = \lambda u \quad 在\Omega上, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

因此当 $m = 1$ 时, 问题 (1.3) 进一步变为如下 Heisenberg 群 H^n 上次 Laplace 算子的 Dirichlet 特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta_{H^n} u = \lambda u \quad 在\Omega上, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

随着黎曼流形上微分算子研究的深入, Heisenberg 群、H 型群上微分算子的特征值估计问题开始被学者们所关注 (参见文献 [9–10]). 2006 年, 韩军强和钮鹏程 [11] 获得了 H 型群上次 Laplace 算子相邻特征值之差的估计; 2015 年, 谭沈阳和黄体仁 [12] 建立了 H 型群上漂移 Laplace 算子问题 (1.1) 的 Yang 型特征值不等式.

本文的目标是对 H 型群上漂移 Laplace 算子的问题 (1.1) 建立 Levitin-Parnovski 型特征值不等式. 对任意的正整数 j, Ilias 和 Makhoul[13] 在 2012 年对 Heisenberg 群 H^n 上次 Laplace 算子的 Dirichlet 特征值问题 (1.4) 建立了如下 Levitin-Parnovski 型特征值不等式

$$\sum_{l=1}^{n} \lambda_{j+l} \le (n+2)\,\lambda_j. \tag{1.5}$$

当 $j = 1$ 时, 不等式 (1.5) 变为 $\sum\limits_{l=1}^{n} \lambda_{l+1} \le (n+2)\,\lambda_1$. 这就变为文献 [14–15] 等所获得类型的低阶特征值估计结果. 即用第一特征值给出了从第 2 个到第 $n+1$ 个特征值之和的上界估计.

在本文中, 首先建立了具有加权测度的 H 型群上漂移 Laplace 算子问题 (1.1) 的一个特征值一般不等式.

定理 1 设 Ω 是具有加权测度 $d\mu = e^{-\varphi}dv$ 的 $2n+m$ 维 H 型群 G 上的有界区域, φ 是区域 Ω 闭包 $\bar{\Omega}$ 上的光滑函数, λ_l 是 Ω 上漂移 Laplace 算子 $-\Delta_G + \langle \nabla_G\varphi, \nabla_G(\cdot)\rangle$ 特征值问题 (1.1) 的第 l 个特征值, u_l 为对应于 λ_l 的单位正交特征函数, 且对应于不同特征值的特征函数相互正交. 那么对任意正整数 j, 有

$$\sum_{l=1}^{n} (\lambda_{j+l} - \lambda_j) \le \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(u_j^2 |\nabla_G\varphi|^2 + 4|\nabla_G u_j|^2 - 4u_j \langle \nabla_G u_j, \nabla_G\varphi\rangle \Big)\, d\mu. \tag{1.6}$$

进而获得了问题 (1.1) 的如下 Levitin-Parnovski 型特征值不等式.

定理 2 设 Ω 是具有加权测度 $d\mu=e^{-\varphi}dv$ 的 $2n+m$ 维 H 型群 G 上的有界区域, φ 是区域 Ω 闭包 $\bar{\Omega}$ 上的光滑函数, λ_l 为 Ω 上漂移 Laplace 算子 $-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle$ 特征值问题 (1.1) 的第 l 个特征值. 如果 $|\nabla_G\varphi|\le c$, 则对任意正整数 j, 有

$$\sum_{l=1}^{n}\lambda_{j+l}\le(n+2)\lambda_j+2c\lambda_j^{\frac{1}{2}}+\frac{c^2}{2}. \tag{1.7}$$

不难看出, (1.7) 式对问题 (1.2) 也成立. 即有如下结论.

推论 1 设 Ω 是具有加权测度 $d\mu=e^{-\varphi}dv$ 的 n 维 Heisenberg 群 H^n 上的有界区域, φ 是区域 Ω 闭包 $\bar{\Omega}$ 上的光滑函数, λ_l 为 Ω 上漂移 Laplace 算子 $-\Delta_{H^n}+\langle\nabla_{H^n}\varphi,\nabla_{H^n}(\cdot)\rangle$ 特征值问题 (1.2) 的第 l 个特征值. 如果 $|\nabla_{H^n}\varphi|\le c$, 则对任意正整数 j, 有

$$\sum_{l=1}^{n}\lambda_{j+l}\le(n+2)\lambda_j+2c\lambda_j^{\frac{1}{2}}+\frac{c^2}{2}.$$

另外, 当 φ 为常数时, 问题 (1.1) 变为问题 (1.3). 因此可由定理 2 得到如下推论.

推论 2 设 Ω 是 $2n+m$ 维 H 型群 G 上的有界区域, λ_l 为 Ω 上次 Laplace 算子 Δ_G 特征值问题 (1.3) 的第 l 个特征值, 则对任意正整数 j, 有 $\sum\limits_{l=1}^{n}\lambda_{j+l}\le(n+2)\lambda_j$.

当 $m=1$ 时, 推论 2 即变为 Ilias 和 Makhoul[13] 对 Heisenberg 群 H^n 上次 Laplace 算子的 Dirichlet 特征值问题 (1.4) 所获得结果. 因此本文的结果推广并包含了 Ilias 和 Makhoul[13] 所获得的结果.

2 基础知识

本节给出 H 型群的一些基本概念与性质. 设 $U^1,U^2,\cdots,U^{2n}$ 是满足下列条件的矩阵

(1) U^j 是 $m\times m$ 阶反对称正交矩阵, $\forall j=1,2,\cdots,2n$;

(2) $U^iU^j+U^jU^i=0$, $\forall i,j\in\{1,2,\cdots,2n\}$, $i\ne j$.

在 $2n+m$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ 定义如下群运算:

$$(z,t)\circ(z',t')=(x,y,t)\circ(x',y',t')=\left(z_i+z_i',t_j+t_j'+\frac{1}{2}\langle z,U^jz'\rangle\right),$$

其中 $i=1,2,\cdots,2n$; $j=1,2,\cdots,m$, $z=(x,y)\in\mathbb{R}^{2n}$, $t\in\mathbb{R}^m$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示欧氏内积. 满足这种群运算的 $2n+m$ 维欧氏空间称为 H 型群, 李代数 g 的基底为

$$X_j=\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{2n}z_lU_{l,j}^{(k)}\right)\frac{\partial}{\partial t_k},\quad Y_j=\frac{\partial}{\partial y_j}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{2n}z_lU_{l,j+n}^{(k)}\right)\frac{\partial}{\partial t_k},\quad T_k=\frac{\partial}{\partial t_k},$$

其中 $\left(U_{l,j}^{(k)}\right)_{2n\times 2n}=U^{(k)}$. 当 $m=1$ 时, H 型群即为 Heisenberg 群. H 型群 G 上的次 Laplace 算子和梯度算子定义为

$$\Delta_G=\sum_{j=1}^{n}\left(X_j^2+Y_j^2\right),\quad \nabla_G=(X_1,X_2,\cdots,X_n,Y_1,Y_2,\cdots,Y_n).$$

在定理 1 的证明过程中, 需要使用 Levitin 和 Parnovski[16] 获得的代数恒等式.

引理 1 设 M 是一个给定内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的复 Hilbert 空间, $A: D\subset M\to M$ 是定义在有界稠密区域 D 上的一个自伴算子, 并且 A 有一组离散谱 $\lambda_1\le\lambda_2\le\lambda_3\le\cdots$. 设 $\{B_l: A(D)\to M\}_{l=1}^N$ 是由一组对称算子构成的集合, 且满足 $B_l(D)\subset D$. 令 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ 是算子 A 的正交特征向量构成的集合, u_i 是第 i 个特征值 λ_i 对应的特征向量, 并且这组特征向量可构成 M 的一组正交基. 那么, 对任意正整数 j, 如下代数恒等式成立

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\langle[A,B_l]\,u_j,u_k\rangle|^2}{\lambda_k-\lambda_j}=-\frac{1}{2}\,\langle[[A,B_l]\,,B_l]\,u_j,u_j\rangle, \tag{2.1}$$

其中 $[A,B_l]:=AB_l-B_lA$ 是 A 和 B_l 的括号积.

3 主要定理及其证明

本节给出定理 1 和定理 2 的证明.

定理 1 的证明 因为 u_i 为问题 (1.1) 的对应于第 i 个特征值 λ_i 的单位正交特征函数, 即 u_i 满足

$$\begin{cases}-\Delta_G u_i+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G u_i\rangle=\lambda_i u_i \quad 在\Omega上,\\ u|_{\partial\Omega}=0,\\ \displaystyle\int_\Omega u_iu_jd\mu=\delta_{ij}.\end{cases} \tag{3.1}$$

设 $y_1,\cdots,y_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一组标准坐标函数, 定义如下 $n\times n$ 阶矩阵 T

$$T:=\begin{pmatrix}\langle[-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle\,,y_1]\,u_j,u_{j+1}\rangle & \cdots & \langle[-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle\,,y_1]\,u_j,u_{j+n}\rangle\\ \langle[-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle\,,y_1]\,u_j,u_{j+1}\rangle & \cdots & \langle[-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle\,,y_2]\,u_j,u_{j+n}\rangle\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \langle[-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle\,,y_n]\,u_j,u_{j+1}\rangle & \cdots & \langle[-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle\,,y_n]\,u_j,u_{j+n}\rangle\end{pmatrix}.$$

根据 QR - 因式分解定理, 存在一个 $n\times n$ 阶正交矩阵 $Q=(q_{lr})_{n\times n}$ 使得 $S=QT$, 其中 S 是一个上三角矩阵. 因此有

$$\sum_{r=1}^{n}q_{lr}\,\langle[-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle\,,y_l]\,u_j,u_{j+k}\rangle=0,\quad 1\le k<l\le n.$$

令 $x_l=\sum\limits_{r=1}^{n}q_{lr}y_r$, 可知 $\mathbb{R}^n$ 上的一组标准坐标函数 $x_1,\cdots,x_n$ 满足如下等式

$$\langle[-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle\,,x_l]\,u_j,u_{j+k}\rangle=0,\quad 1\le k<l\le n. \tag{3.2}$$

从而, 根据 (3.2) 式, 可以得到

$$\sum_{k=1}^{l-1}\frac{|\langle[-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle\,,x_l]\,u_j,u_{j+k}\rangle|^2}{\lambda_{j+k}-\lambda_j}=0. \tag{3.3}$$

在 (2.1) 式中取 $A=-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle$, $B_l=x_l$, $l=1,2,\cdots,n$, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\langle[-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle,x_l]\,u_j,u_k\rangle|^2}{\lambda_k-\lambda_j}\\&=-\frac{1}{2}\left\langle[[-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle,x_l],x_l]\,u_j,u_j\right\rangle.\end{aligned}\tag{3.4}$$

通过直接计算, 可得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\langle[-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle,x_l]\,u_j,u_k\rangle|^2}{\lambda_k-\lambda_j}\\&=\sum_{k=1}^{j-1}\frac{|\langle[-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle,x_l]\,u_j,u_k\rangle|^2}{\lambda_k-\lambda_j}+\sum_{k=j+1}^{j+l-1}\frac{|\langle[-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle,x_l]\,u_j,u_k\rangle|^2}{\lambda_k-\lambda_j}\\&\quad+\sum_{k=j+l}^{\infty}\frac{|\langle[-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle,x_l]\,u_j,u_k\rangle|^2}{\lambda_k-\lambda_j}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

根据特征值的单调性, 知道

$$\sum_{k=1}^{j-1}\frac{|\langle[-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle,x_l]\,u_j,u_k\rangle|^2}{\lambda_k-\lambda_j}\le 0.\tag{3.6}$$

并且根据 (3.2) 式, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=j+1}^{j+l-1}\frac{|\langle[-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle,x_l]\,u_j,u_k\rangle|^2}{\lambda_k-\lambda_j}\\&=\sum_{k=1}^{l-1}\frac{|\langle[-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle,x_l]\,u_j,u_{j+k}\rangle|^2}{\lambda_{j+k}-\lambda_j}=0.\end{aligned}\tag{3.7}$$

结合 (3.5), (3.6) 和 (3.7) 式, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\langle[-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle,x_l]\,u_j,u_k\rangle|^2}{\lambda_k-\lambda_j}\\&\le\sum_{k=j+l}^{\infty}\frac{|\langle[-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle,x_l]\,u_j,u_k\rangle|^2}{\lambda_k-\lambda_j}\\&\le\frac{1}{\lambda_{j+l}-\lambda_j}\sum_{k=1}^{\infty}|\langle[-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle,x_l]\,u_j,u_k\rangle|^2.\end{aligned}\tag{3.8}$$

由 Parseval 等式可知

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle[-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle,x_l]\,u_j,u_k\rangle|^2=\|[-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle,x_l]\,u_j\|^2.\tag{3.9}$$

将 (3.4) 和 (3.9) 式代入 (3.8) 式中, 整理并对 l 从 1 到 n 求和, 可得

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\left(\lambda_{j+l}-\lambda_{j}\right)\left\langle\left[\left[-\Delta_{G}+\left\langle\nabla_{G}\varphi,\nabla_{G}\left(\cdot\right)\right\rangle,x_{l}\right],x_{l}\right]u_{j},u_{j}\right\rangle\\ \leq&\sum_{l=1}^{n}\left\|\left[-\Delta_{G}+\left\langle\nabla_{G}\varphi,\nabla_{G}\left(\cdot\right)\right\rangle,x_{l}\right]u_{j}\right\|^{2}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

同理, 在 (2.1) 式中取 $A=-\Delta_G+\langle\nabla_G\varphi,\nabla_G(\cdot)\rangle$, $B_l=y_l$, $l=1,2,\cdots,n$, 可得与 (3.10) 式类似的关于 y_l 的不等式. 进而有

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\left(\lambda_{j+l}-\lambda_{j}\right)\left\langle\left[\left[-\Delta_{G}+\left\langle\nabla_{G}\varphi,\nabla_{G}\left(\cdot\right)\right\rangle,x_{l}\right],x_{l}\right]u_{j},u_{j}\right\rangle\\ &-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\left(\lambda_{j+l}-\lambda_{j}\right)\left\langle\left[\left[-\Delta_{G}+\left\langle\nabla_{G}\varphi,\nabla_{G}\left(\cdot\right)\right\rangle,y_{l}\right],y_{l}\right]u_{j},u_{j}\right\rangle\\ \leq&\sum_{l=1}^{n}\left\|\left[-\Delta_{G}+\left\langle\nabla_{G}\varphi,\nabla_{G}\left(\cdot\right)\right\rangle,x_{l}\right]u_{j}\right\|^{2}+\sum_{l=1}^{n}\left\|\left[-\Delta_{G}+\left\langle\nabla_{G}\varphi,\nabla_{G}\left(\cdot\right)\right\rangle,y_{l}\right]u_{j}\right\|^{2}.\end{aligned}\tag{3.11}$$

直接计算可知

$$\begin{aligned}&\left[-\Delta_{G}+\left\langle\nabla_{G}\varphi,\nabla_{G}\left(\cdot\right)\right\rangle,x_{l}\right]u_{j}\\ =&-\Delta_{G}\left(x_{l}u_{j}\right)+\left\langle\nabla_{G}\varphi,\nabla_{G}\left(x_{l}u_{j}\right)\right\rangle-x_{l}\left(-\Delta_{G}u_{j}+\left\langle\nabla_{G}\varphi,\nabla_{G}\left(u_{j}\right)\right\rangle\right)\\ =&-\left(X_{l}^{2}+Y_{l}^{2}\right)\left(x_{l}u_{j}\right)+u_{j}X_{l}\varphi+\left\langle\nabla_{G}\varphi,x_{l}\Delta_{G}u_{j}\right\rangle-x_{l}\left(-\Delta_{G}u_{j}+\left\langle\nabla_{G}\varphi,\Delta_{G}u_{j}\right\rangle\right)\\ =&-X_{l}\left(u_{j}+x_{l}X_{l}u_{j}\right)-x_{l}Y_{l}^{2}u_{j}+u_{j}X_{l}\varphi+x_{l}\Delta_{G}u_{j}\\ =&-2X_{l}u_{j}+u_{j}X_{l}\varphi.\end{aligned}$$

同理, 可得

$$\left[-\Delta_{G}+\left\langle\nabla_{G}\varphi,\nabla_{G}\left(\cdot\right)\right\rangle,y_{l}\right]u_{j}=-2Y_{l}u_{j}+u_{j}Y_{l}\varphi.$$

因此有

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{n}\left\|\left[-\Delta_{G}+\left\langle\nabla_{G}\varphi,\nabla_{G}\left(\cdot\right)\right\rangle,x_{l}\right]u_{j}\right\|^{2}+\sum_{l=1}^{n}\left\|\left[-\Delta_{G}+\left\langle\nabla_{G}\varphi,\nabla_{G}\left(\cdot\right)\right\rangle,y_{l}\right]u_{j}\right\|^{2}\\ =&\int_{\Omega}(u_{j}^{2}|\nabla_{G}\varphi|^{2}+4|\nabla_{G}u_{j}|^{2}-4u_{j}\left\langle\nabla_{G}u_{j},\nabla_{G}\varphi\right\rangle)d\mu.\end{aligned}\tag{3.12}$$

又因为

$$\begin{aligned}\left[\left[-\Delta_{G}+\left\langle\nabla_{G}\varphi,\nabla_{G}\left(\cdot\right)\right\rangle,x_{l}\right],x_{l}\right]u_{j}&=\left[-2X_{l}+X_{l}\varphi,x_{l}\right]u_{j}\\ &=\left[\left(-2X_{l}+X_{l}\varphi\right)x_{l}-x_{l}\left(-2X_{l}+X_{l}\varphi\right)\right]u_{j}\\ &=-2X_{l}\left(x_{l}u_{j}\right)+x_{l}u_{j}X_{l}\varphi+2x_{l}X_{l}u_{j}-x_{l}u_{j}X_{l}\varphi\\ &=-2u_{j}.\end{aligned}\tag{3.13}$$

同理可得

$$[[-\Delta_G + \langle \nabla_G\varphi, \nabla_G(\cdot)\rangle, y_l], y_l] u_j = [-2Y_l + Y_l\varphi, y_l] u_j = -2u_j. \tag{3.14}$$

所以

$$\langle [[-\Delta_G + \langle \nabla_G\varphi, \nabla_G(\cdot)\rangle, x_l], x_l] u_j, u_j\rangle = -2\int_\Omega u_j^2 d\mu = -2, \tag{3.15}$$

$$\langle [[-\Delta_G + \langle \nabla_G\varphi, \nabla_G(\cdot)\rangle, y_l], y_l] u_j, u_j\rangle = -2\int_\Omega u_j^2 d\mu = -2. \tag{3.16}$$

最后将 (3.12), (3.15) 和 (3.16) 式代入 (3.11) 式中, 就可以得到 (1.6) 式. 从而完成定理 1 的证明.

定理 2 的证明 因为

$$\begin{aligned} -\int_\Omega u_j \langle \nabla_G\varphi, \nabla_G u_j\rangle d\mu &\le \int_\Omega |u_j|\,|\nabla_G\varphi|\,|\nabla_G u_j|\, d\mu \\ &\le c\Big(\int_\Omega u_j^2 d\mu\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega |\nabla_G u_j|^2 d\mu\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= c\Big(\int_\Omega |\nabla_G u_j|^2 d\mu\Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

并且注意到

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla_G u_j|^2 d\mu &= \int_\Omega \langle \nabla_G u_j, \nabla_G u_j\rangle d\mu \\ &= \int_\Omega u_j(-\Delta_G u_j + \langle \nabla_G\varphi, \nabla_G u_j\rangle) d\mu = \lambda_j. \end{aligned} \tag{3.18}$$

由 (3.17) 和 (3.18) 式, 可得

$$-\int_\Omega u_j \langle \nabla_G\varphi, \nabla_G u_j\rangle d\mu \le c\lambda_j^{\frac{1}{2}}. \tag{3.19}$$

将 (3.17)–(3.19) 式代入 (1.6) 式中, 可获得 (1.7) 式. 这就完成了定理 2 的证明.

参 考 文 献

[1] Kaplan A. Fundamental solution for a class of hypoelliptic PDE generated by composition of quadratic forms[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1980, 258(1): 147–153.

[2] Garofalo N, Vassilev D. Regularity near the characteristic set in the nonlinear Dirichlet problem and conformal geometry of sub-Laplacians[J]. Math. Ann., 2000, 318(3): 453–516.

[3] Garofalo N, Vassilev D. Symmetry properties of positive entire solutions of Yamabe-type equations on groups of Heisenberg type[J]. Duke. Math. J., 2001, 106(3): 411–448.

[4] Colding T H, Ii W P M. Generic mean curvature flow I; generic singularities[J]. Ann. Math., 2009, 2(2): 755–833.

[5] Futaki A, Li H, Li X D. On the first eigenvalue of the Witten-Laplacian and the diameter of compact shrinking solitons[J]. Ann. Global Anal. Geom., 2013, 44(2): 105–114.

[6] Huang G Y, Zhang C, Zhang J. Liouville-type theorem for the drifting Laplacian operator[J]. Arch. Math. (Basel), 2011, 96(4): 379–385.

[7] Friedrichs K O. Spectral theory of operators in Hilbert space[M]. New York: Springer, 1973.

[8] Inglis J. Spectral inequalities for operators on H-type groups[J]. J. Spectr. Theory., 2012, 2(1): 79–105.

[9] Niu P C, Zhang H Q. Payne-Pólya-Weinberger type inequalities for eigenvalues of nonelliptic operator[J]. Pac. J. Math., 2003, 208(2): 325–345.

[10] Sun H J. Universal inequalities and bounds for weighted eigenvalues of the Schrödinger operator on the Heisenberg group[J]. Turkish J. Math., 2011(35): 249–258.

[11] 韩军强, 钮鹏程. H 型群上次 Laplace 算子相邻特征值之差的估计 [J]. 西北大学学报 (自然科学版), 2006, 36(4): 522–524.

[12] 谭沈阳, 黄体仁. H 型群上 Witten-Laplace 算子的特征值估计 [J]. 数学进展, 2016, 45(3): 417–423.

[13] Ilias S, Makhoul O. A generalization of a Levitin and Parnovski universal inequality for eigenvalues[J]. J. Geom. Anal., 2012, 22(1): 206–222.

[14] Ashbaugh S M, Benguria D R. More bounds on eigenvalues ratios for Dirichlet Laplacians in n dimensions[J]. Siam J. Math. Anal., 1993, 24(6): 1622–1651.

[15] Sun H J, Cheng Q M, Yang H C. Lower order eigenvalue of Dirichlet Laplacian[J]. Manuscripta Math., 2008, 125(2): 139–156.

[16] Levitin M, Parnovski L. Commutators, spectral trace identities, and universal estimates for eigenvalues[J]. J. Funct. Anal., 2002, 192(2): 425–445.

LEVITIN-PARNOVSKI-TYPE INEQUALITY FOR EIGENVALUES OF THE DRIFTING LAPLACIAN ON THE H-TYPE GROUP WITH THE WEIGHTED MEASURE

HAN Cheng-yue, SUN He-jun, JIANG Xu-yong

(*College of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210014, China*)

Abstract: In this paper, we study the Dirichlet eigenvalue problem of the drifting Laplacian $-\Delta_G + \langle \nabla_G \varphi, \nabla_G (\cdot) \rangle$ on the H-type group G with the weighted measured $d\mu = e^{-\varphi} dv$. We establish a Levitin-Parnovski universal inequality for eigenvalues of this problem, which generalize the result derived by Ilias and Makhoul for the Kohn Laplacian on the Heisenberg group (J. Geom. Anal., 2012, 22(1): 206–222).

Keywords: H-type group; eigenvalue; drifting Laplacian

2010 MR Subject Classification: 35P15; 58C40